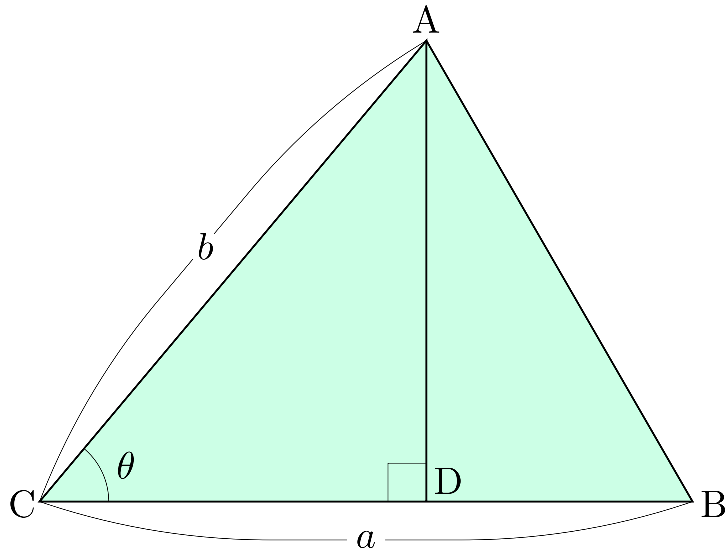
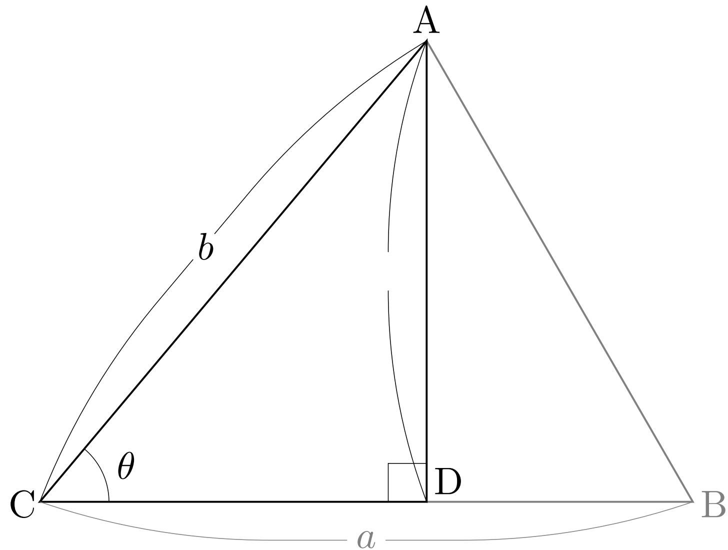
6.7 三角形の面積と正弦定理

三角形 ABC において角 ACB が鋭角であるとする． $\theta = \angle \mathrm{ACB}$ ，
$a = \overline{\mathrm{BC}}$ ， $b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおき，頂点 A から直線 BC に下した垂線の足を D と
おく．



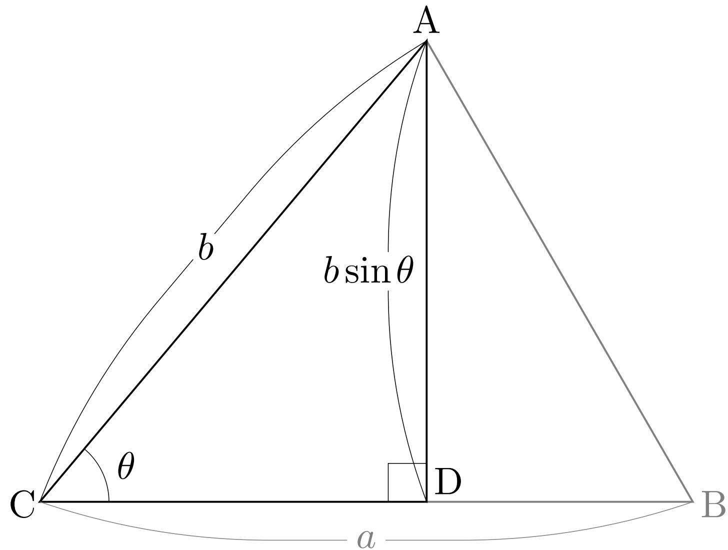
三角形 ABC において角 ACB が鋭角であるとする． $\theta = \angle\mathrm{ACB}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$ ， $b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおき，頂点 A から直線 BC に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角なので，

$$\overline{\mathrm{AD}} = \qquad\qquad .$$



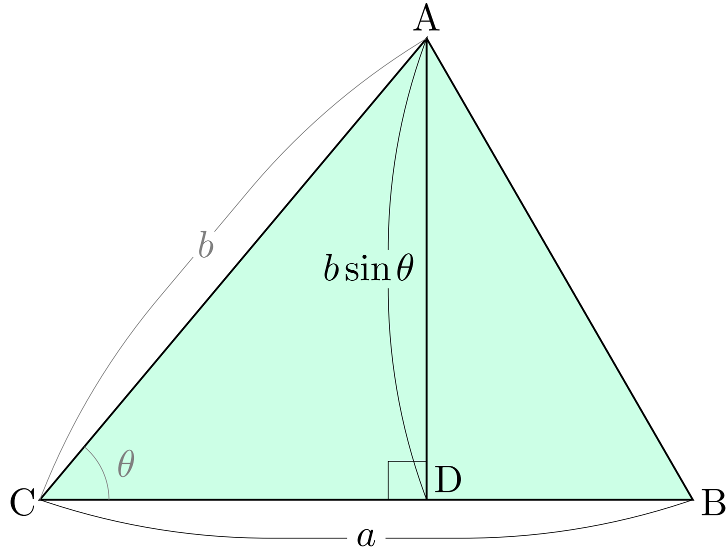
三角形 ABC において角 ACB が鋭角であるとする． $\theta = \angle \mathrm{ACB}$ ， $a = \overline{\mathrm{BC}}$ ， $b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおき，頂点 A から直線 BC に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角なので，

$$\overline{\mathrm{AD}} = b \sin \theta \ .$$



三角形 ABC において角 ACB が鋭角であるとする． $\theta = \angle \mathrm{ACB}$ ，$a = \overline{\mathrm{BC}}$ ， $b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおき，頂点 A から直線 BC に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角なので，

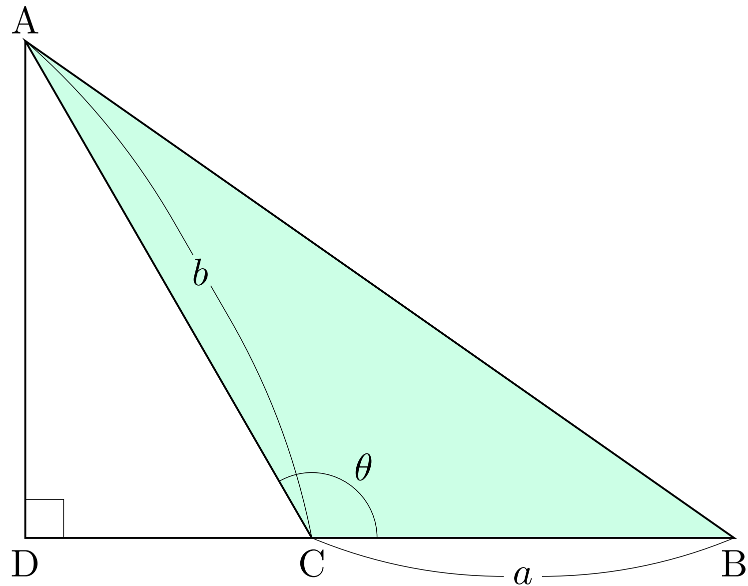
$$\overline{\mathrm{AD}} = b\sin\theta \ .$$



三角形 ABC で囲まれる領域の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\overline{\mathrm{AD}} &= \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}ab\sin\theta \ .\end{aligned}$$

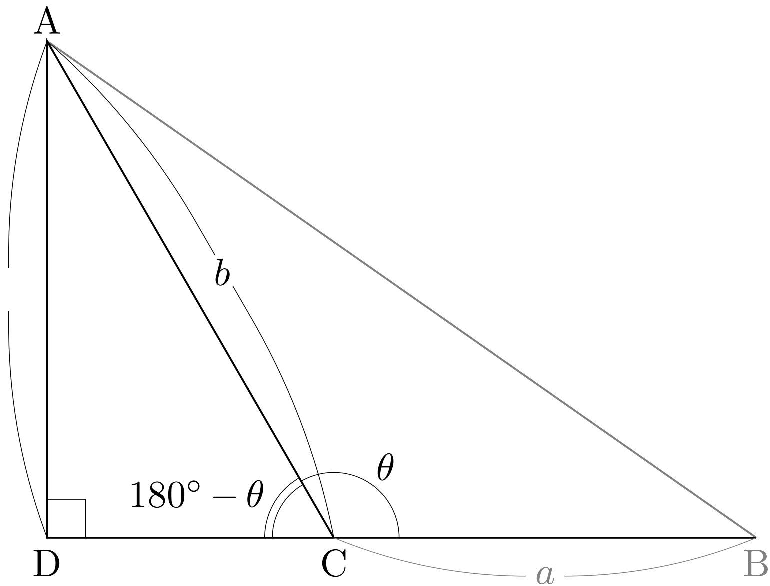
三角形 ABC において角 ACB が鈍角であるとする． $\theta = \angle \mathrm{ACB}$ ， $a = \overline{\mathrm{BC}}$ ， $b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおき，頂点 C から直線 BC に下した垂線の足を D とおく．



三角形 ABC において角 ACB が鈍角であるとする． $\theta = \angle\mathrm{ACB}$ ， $a = \overline{\mathrm{BC}}$ ， $b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおき，頂点 C から直線 BC に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角で， $\angle\mathrm{ACD} = 180° - \theta$ なので，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AD}} &= b\sin(180° - \theta)\\ &= \qquad\qquad .\end{aligned}$$

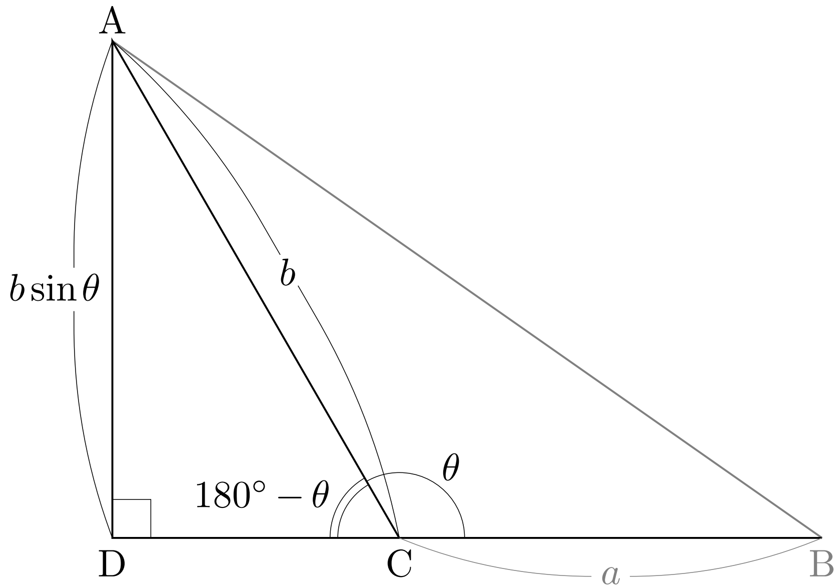
$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$



三角形 ABC において角 ACB が鈍角であるとする． $\theta = \angle\mathrm{ACB}$ ， $a = \overline{\mathrm{BC}}$ ， $b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおき，頂点 C から直線 BC に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角で， $\angle\mathrm{ACD} = 180^\circ - \theta$ なので，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AD}} &= b\sin(180^\circ - \theta)\\ &= b\sin\theta\ .\end{aligned}$$

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

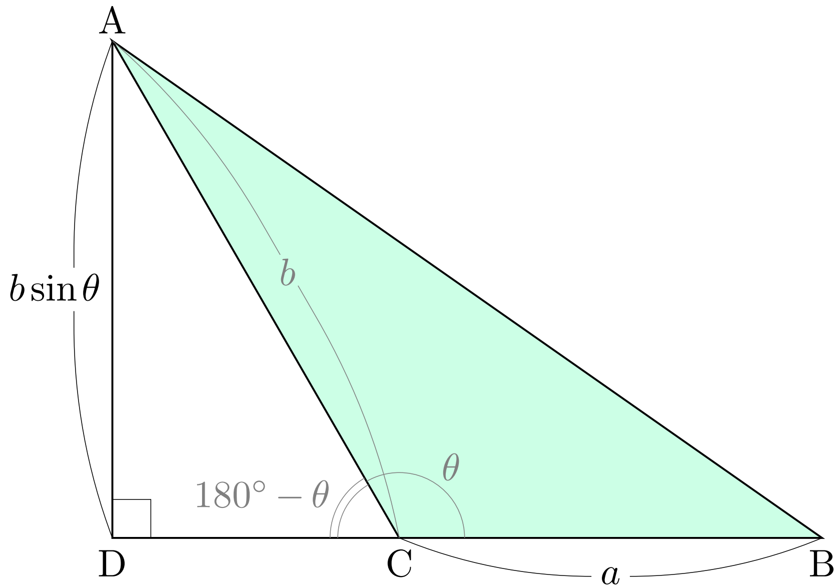


三角形 ABC において角 ACB が鈍角であるとする． $\theta = \angle\mathrm{ACB}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおき，頂点 C から直線 BC に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角で， $\angle\mathrm{ACD} = 180^\circ - \theta$ なので，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AD}} &= b\sin(180^\circ - \theta)\\ &= b\sin\theta\ .\end{aligned}$$

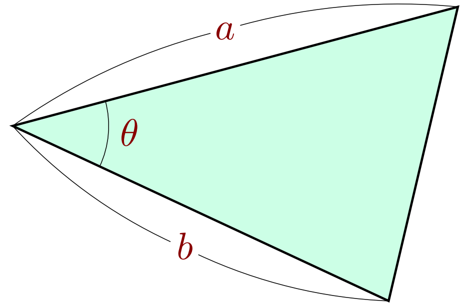
三角形 ABC で囲まれる領域の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\overline{\mathrm{AD}} &= \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\sin\theta\\ &= \frac{1}{2}ab\sin\theta\ .\end{aligned}$$



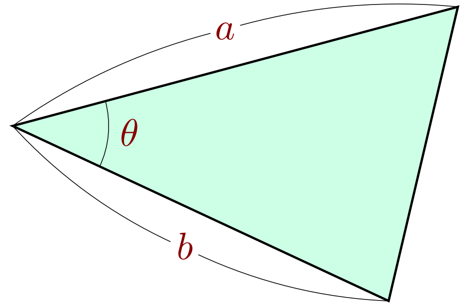
定理　三角形の 2 辺の各々の長さが a と b とでその 2 辺が成す角の大きさが θ であるとき，この三角形で囲まれる領域の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta \ .$$



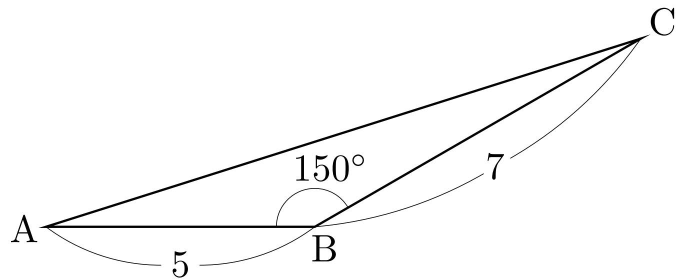
定理　三角形の 2 辺の各々の長さが a と b とでその 2 辺が成す角の大きさが θ であるとき，この三角形で囲まれる領域の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta \ .$$



　この定理より，三角形の 2 辺の長さとその 2 辺が成す角の大きさとからその三角形の面積を計算できる．

$\boxed{例}$ 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{AB} = 5$ かつ $\overline{BC} = 7$ かつ $\angle ABC = 150°$ とする．三角形 ABC の面積を求める．

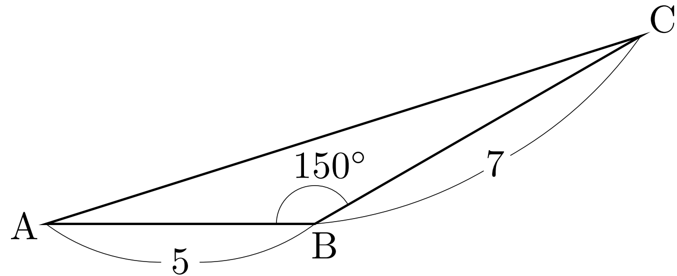


$\boxed{例}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 7$ かつ $\angle \mathrm{ABC} = 150^\circ$ とする．三角形 ABC の面積を求める．

$$\sin 150^\circ = \sin(60^\circ + 90^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} .$$

$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$

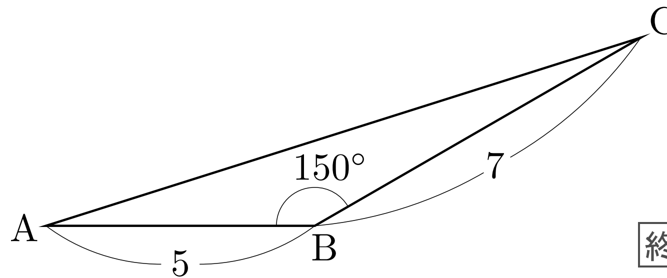


$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 7$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 150^\circ$ とする．三角形 ABC の面積を求める．

$$\sin 150^\circ = \sin(60^\circ + 90^\circ) = \cos 60^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\ .$$

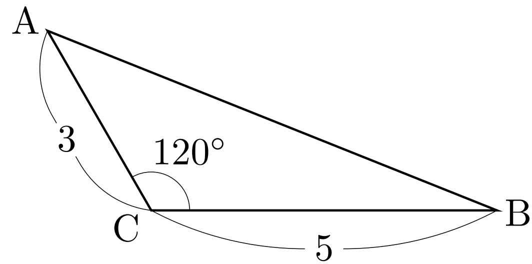
三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin 150^\circ = \frac{35}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{4}\ .$$



$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問6.7.1}$ 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AC}} = 3$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 5$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 120^\circ$ とする．三角形 ABC の面積を求めよ．

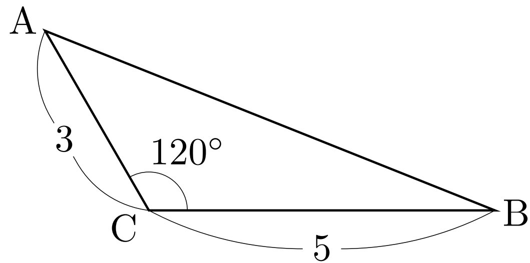


$$\sin 120^\circ = \cos \qquad = \qquad .$$

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot \qquad = \qquad = \qquad .$$

問6.7.1 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AC}} = 3$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 5$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 120^\circ$ とする．三角形 ABC の面積を求めよ．



$$\sin 120^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

三角形 ABC の面積は

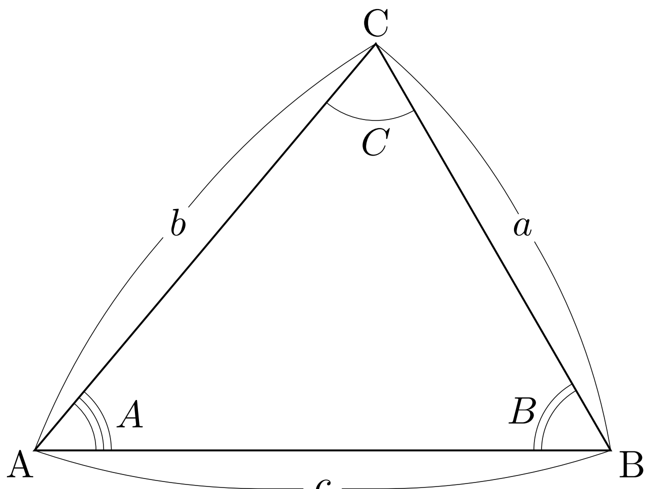
$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{4}\sqrt{3} .$$

終

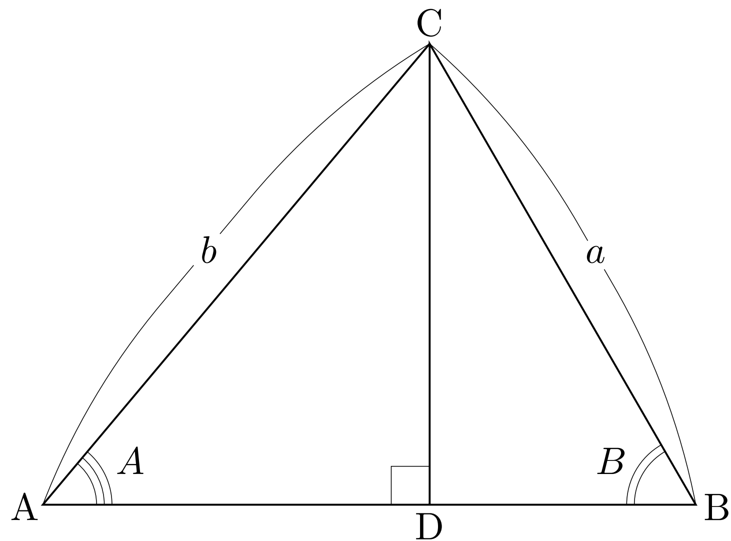
平面上の相異なる３点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，辺の長さ及び角の大きさを次のようにおくことが多い：

$$a = \overline{\mathrm{BC}}\ , \qquad b = \overline{\mathrm{AC}}\ , \qquad c = \overline{\mathrm{AB}}\ ,$$

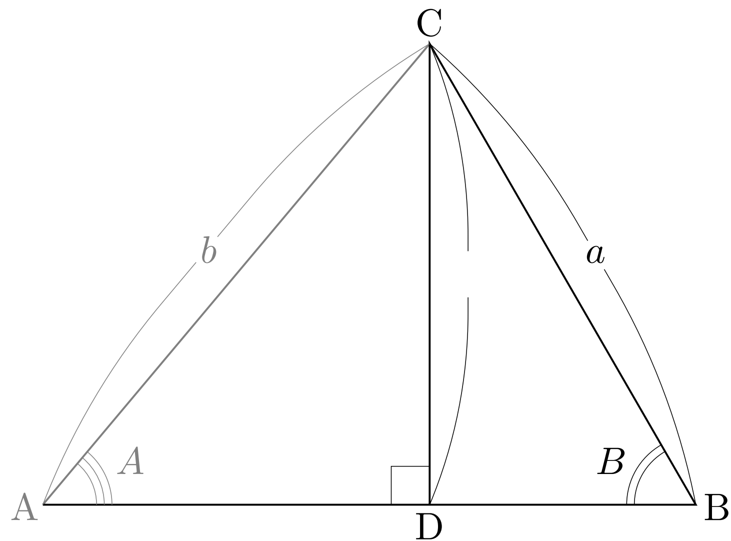
$$A = \angle\mathrm{BAC}\ , \qquad B = \angle\mathrm{ABC}\ , \qquad C = \angle\mathrm{AVB}\ .$$



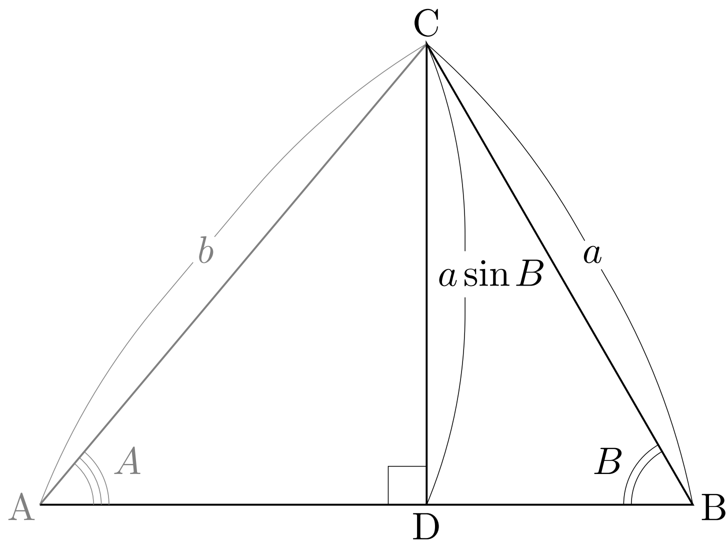
鋭角三角形 ABC において $A=\angle\mathrm{BAC}$, $B=\angle\mathrm{ABC}$, $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$ とおく. 頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく.



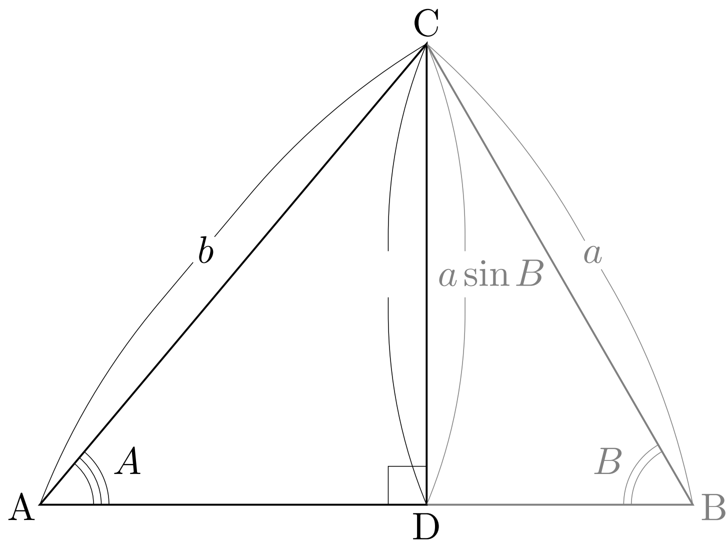
鋭角三角形 ABC において $A = \angle\mathrm{BAC}$, $B = \angle\mathrm{ABC}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおく．頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 BCD において，角 BDC が直角なので，$\overline{\mathrm{CD}} =$ 　　　　　．



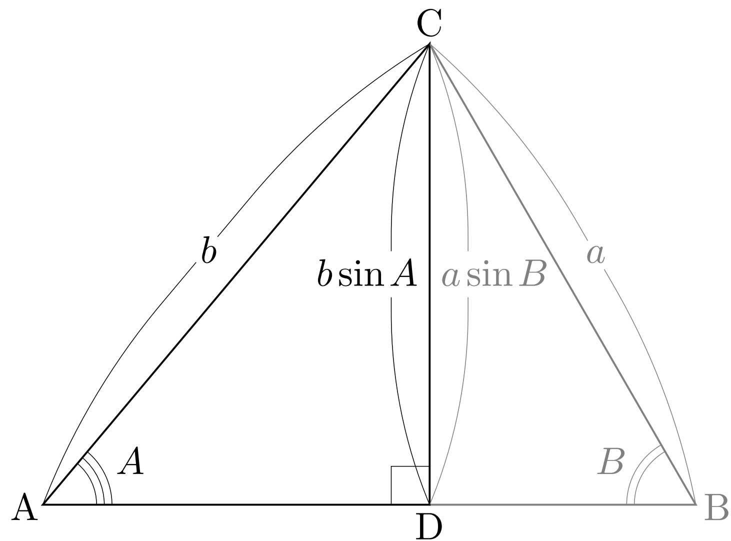
鋭角三角形 ABC において $A=\angle\mathrm{BAC}$, $B=\angle\mathrm{ABC}$, $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$ とおく．頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 BCD において，角 BDC が直角なので， $\overline{\mathrm{CD}}=a\sin B$ ．



鋭角三角形 ABC において $A=\angle\mathrm{BAC}$, $B=\angle\mathrm{ABC}$, $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$ とおく．頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 BCD において，角 BDC が直角なので， $\overline{\mathrm{CD}}=a\sin B$ ．三角形 ACD において，角 ADC が直角なので， $\overline{\mathrm{CD}}=$ 　　　　 .

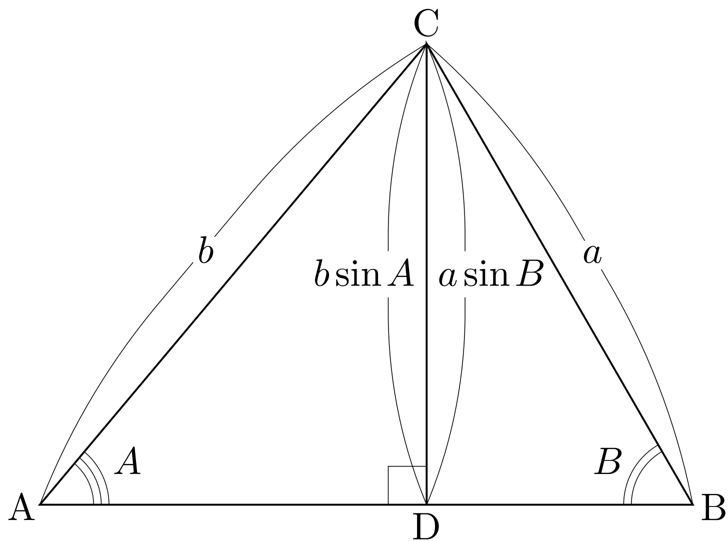


鋭角三角形 ABC において $A = \angle\mathrm{BAC}$, $B = \angle\mathrm{ABC}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおく．頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 BCD において，角 BDC が直角なので， $\overline{\mathrm{CD}} = a \sin B$ ．三角形 ACD において，角 ADC が直角なので， $\overline{\mathrm{CD}} = b \sin A$ ．

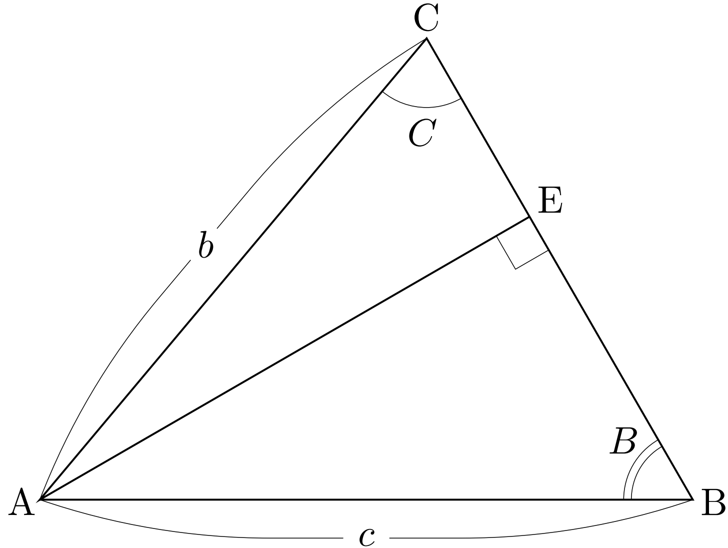


鋭角三角形 ABC において $A=\angle\mathrm{BAC}$, $B=\angle\mathrm{ABC}$, $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$ とおく．頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 BCD において，角 BDC が直角なので， $\overline{\mathrm{CD}}=a\sin B$ ．三角形 ACD において，角 ADC が直角なので， $\overline{\mathrm{CD}}=b\sin A$ ．よって，

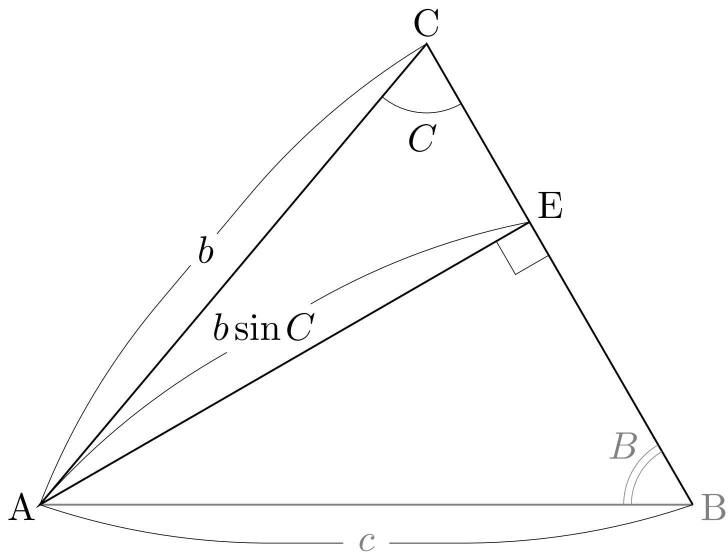
$$a\sin B = b\sin A \ .$$



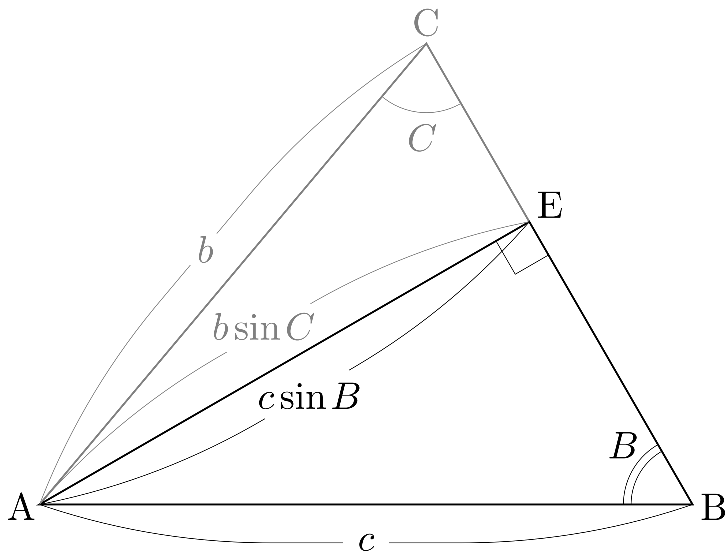
　鋭角三角形 ABC において $B=\angle\mathrm{ABC}$，$C=\angle\mathrm{ACB}$，$b=\overline{\mathrm{AC}}$，$c=\overline{\mathrm{AB}}$ とおく．頂点 A から辺 BC に下した垂線の足を E とおく．



鋭角三角形 ABC において $B=\angle\mathrm{ABC}$, $C=\angle\mathrm{ACB}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$, $c=\overline{\mathrm{AB}}$ とおく．頂点 A から辺 BC に下した垂線の足を E とおく．三角形 ACE において，角 AEC が直角なので， $\overline{\mathrm{AE}}=b\sin C$ ．

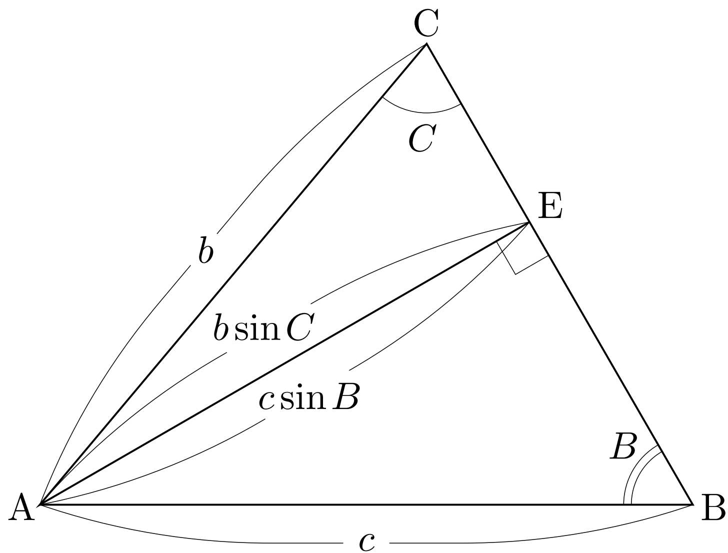


鋭角三角形 ABC において $B=\angle\mathrm{ABC}$, $C=\angle\mathrm{ACB}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$, $c=\overline{\mathrm{AB}}$ とおく．頂点 A から辺 BC に下した垂線の足を E とおく．三角形 ACE において，角 AEC が直角なので， $\overline{\mathrm{AE}}=b\sin C$ ．三角形 ABE において，角 AEB が直角なので， $\overline{\mathrm{AE}}=c\sin B$ ．

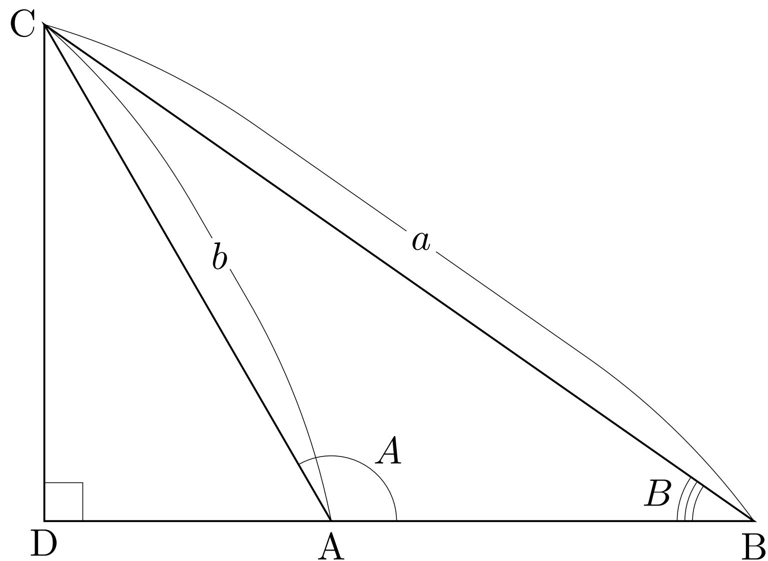


鋭角三角形 ABC において $B = \angle\mathrm{ABC}$, $C = \angle\mathrm{ACB}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ とおく．頂点 A から辺 BC に下した垂線の足を E とおく．三角形 ACE において，角 AEC が直角なので， $\overline{\mathrm{AE}} = b\sin C$ ．三角形 ABE において，角 AEB が直角なので， $\overline{\mathrm{AE}} = c\sin B$ ．よって，

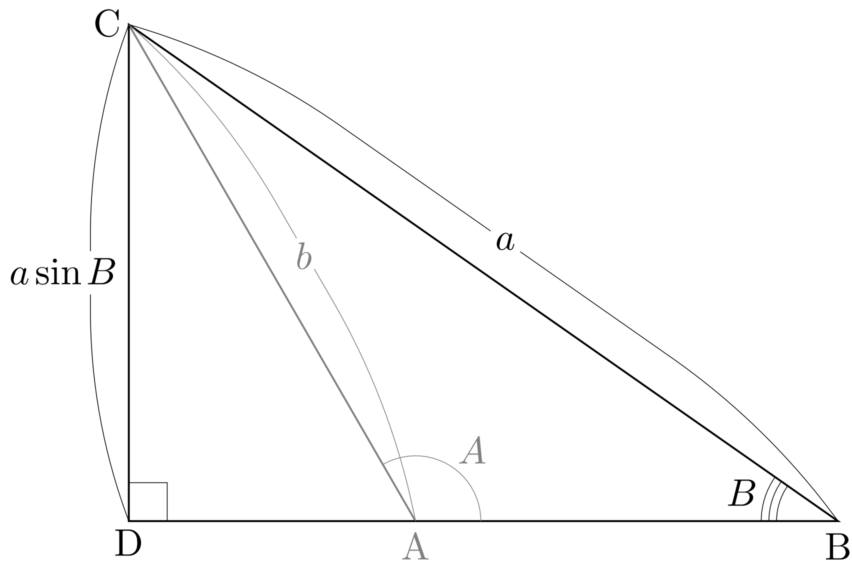
$$b\sin C = c\sin B \ .$$



三角形 ABC において $A=\angle\mathrm{BAC}$, $B=\angle\mathrm{ABC}$, $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$ とおく. 角 BAC が鈍角であるとする. 頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく.

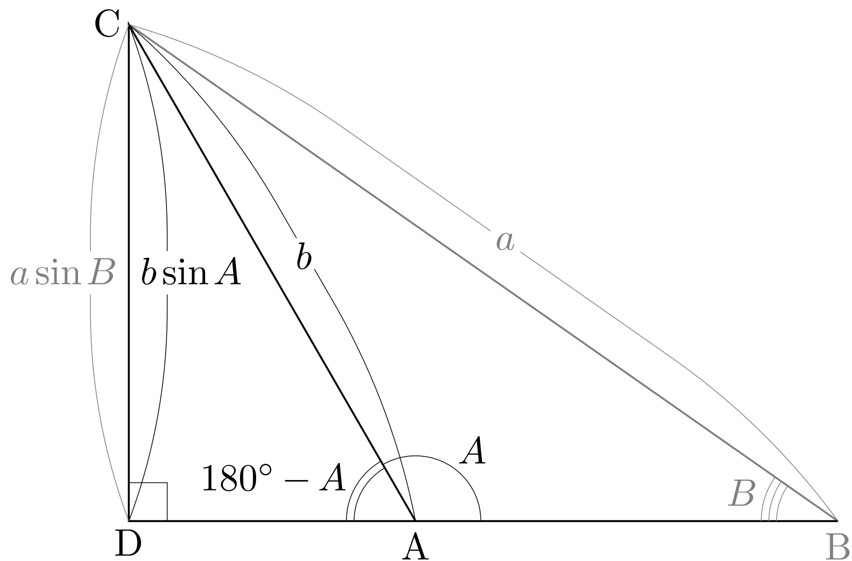


三角形 ABC において $A = \angle\mathrm{BAC}$, $B = \angle\mathrm{ABC}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおく．角 BAC が鈍角であるとする．頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 BCD において，角 BDC が直角なので， $\overline{\mathrm{CD}} = a\sin B$ ．



三角形 ABC において $A = \angle\mathrm{BAC}$, $B = \angle\mathrm{ABC}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおく．角 BAC が鈍角であるとする．頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 BCD において，角 BDC が直角なので，$\overline{\mathrm{CD}} = a\sin B$ ．三角形 ACD において，角 ADC が直角で，$\angle\mathrm{CAD} = 180^\circ - A$ なので，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CD}} &= b\sin(180^\circ - A)\\ &= b\sin A\ .\end{aligned}$$

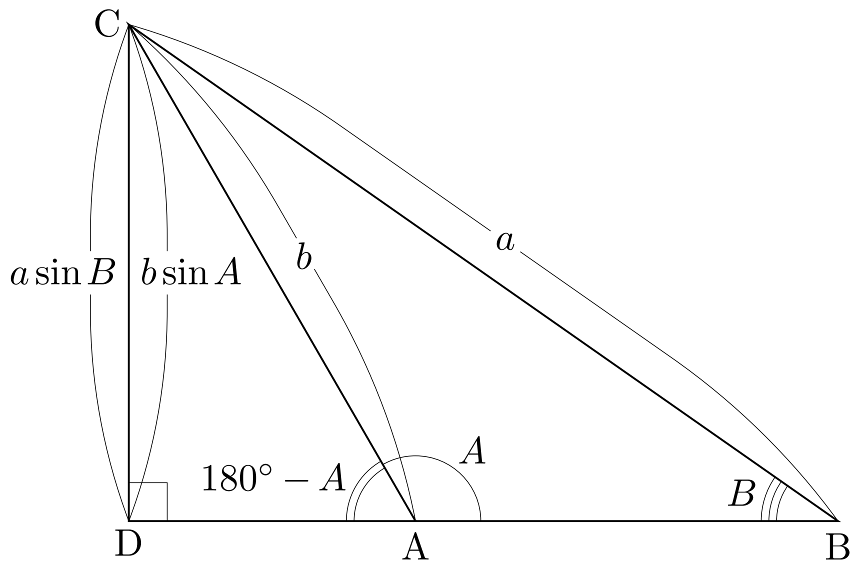


三角形 ABC において $A = \angle\mathrm{BAC}$, $B = \angle\mathrm{ABC}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおく．角 BAC が鈍角であるとする．頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 BCD において，角 BDC が直角なので， $\overline{\mathrm{CD}} = a\sin B$ ．
三角形 ACD において，角 ADC が直角で， $\angle\mathrm{CAD} = 180^\circ - A$ なので，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CD}} &= b\sin(180^\circ - A)\\ &= b\sin A\ .\end{aligned}$$

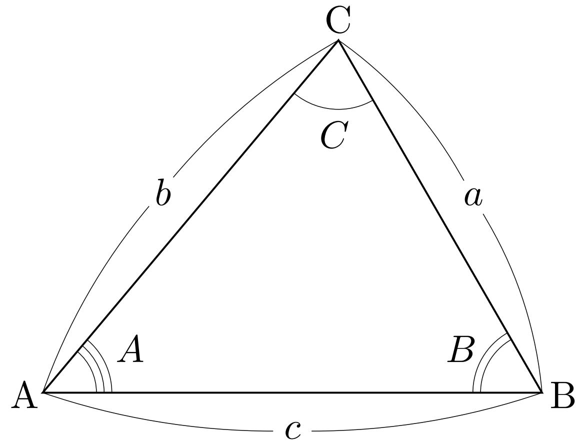
よって，

$$a\sin B = b\sin A\ .$$



三角形 ABC において $A = \angle \mathrm{BAC}$, $B = \angle \mathrm{ABC}$, $C = \angle \mathrm{ACB}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ とおく.

$$a \sin B = b \sin A \, , \qquad b \sin C = c \sin B \, .$$

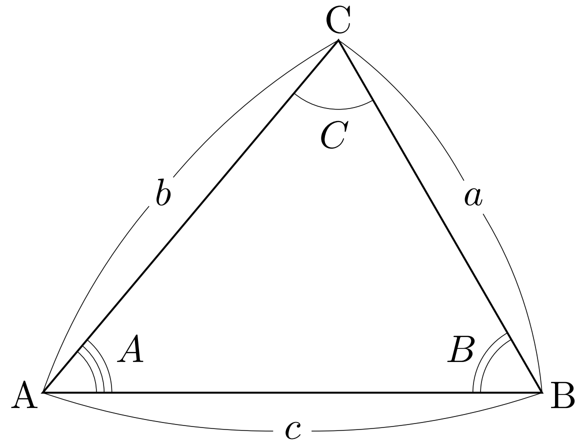


三角形 ABC において $A = \angle \mathrm{BAC}$, $B = \angle \mathrm{ABC}$, $C = \angle \mathrm{ACB}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ とおく.

$$a \sin B = b \sin A \ , \qquad b \sin C = c \sin B \ .$$

$a \sin B = b \sin A$ より,

$$\frac{a \sin B}{\sin A \sin B} = \frac{b \sin A}{\sin A \sin B} \ ,$$
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \ .$$



三角形 ABC において $A = \angle \mathrm{BAC}$, $B = \angle \mathrm{ABC}$, $C = \angle \mathrm{ACB}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ とおく.

$$a \sin B = b \sin A \ , \qquad b \sin C = c \sin B \ .$$

$a \sin B = b \sin A$ より,

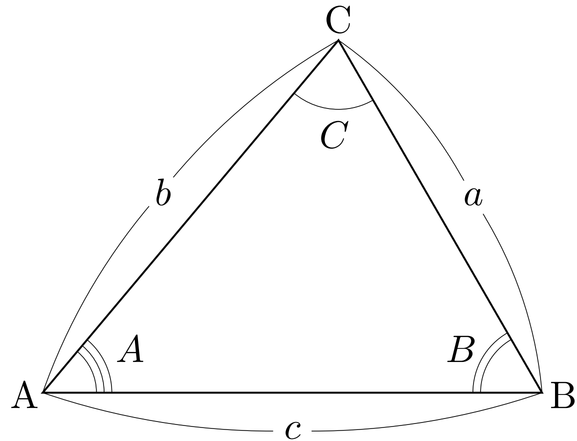
$$\frac{a \sin B}{\sin A \sin B} = \frac{b \sin A}{\sin A \sin B} \ ,$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \ .$$

$b \sin C = c \sin B$ より,

$$\frac{b \sin C}{\sin B \sin C} = \frac{c \sin B}{\sin B \sin C} \ ,$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \ .$$



三角形 ABC において $A = \angle \mathrm{BAC}$, $B = \angle \mathrm{ABC}$, $C = \angle \mathrm{ACB}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ とおく.

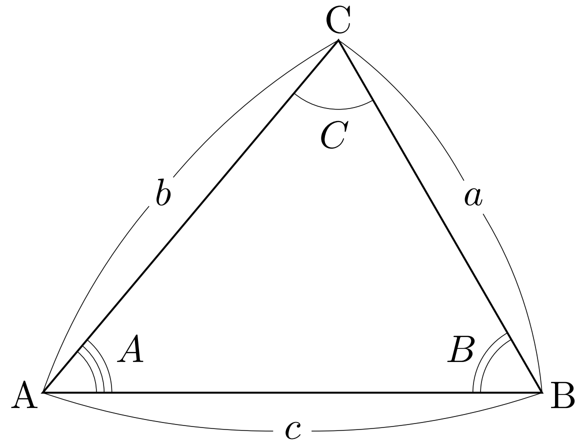
$$a \sin B = b \sin A , \qquad b \sin C = c \sin B .$$

$a \sin B = b \sin A$ より,

$$\frac{a \sin B}{\sin A \sin B} = \frac{b \sin A}{\sin A \sin B} ,$$
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} .$$

$b \sin C = c \sin B$ より,

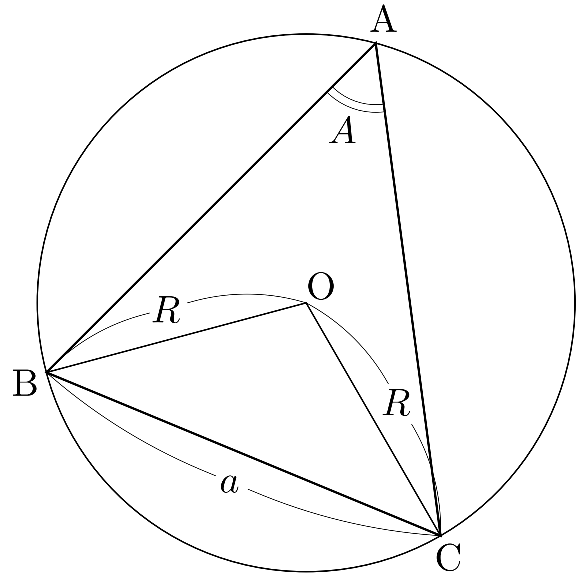
$$\frac{b \sin C}{\sin B \sin C} = \frac{c \sin B}{\sin B \sin C} ,$$
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} .$$



故に

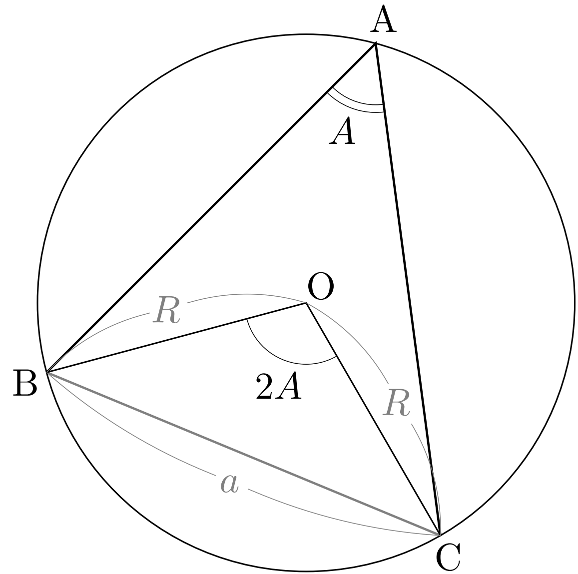
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} .$$

三角形 ABC の 3 個の角のうち少なくとも 2 個は鋭角である．今仮に三角形 ABC の角 BAC が鋭角であるとする．三角形 ABC の外接円の中心を O とおき，外接円の半径を R とおく．



三角形 ABC の 3 個の角のうち少なくとも 2 個は鋭角である．今仮に三角形 ABC の角 BAC が鋭角であるとする．三角形 ABC の外接円の中心を O とおき，外接円の半径を R とおく．この外接円において，弧 BC に対する中心角の大きさ $\angle\mathrm{BOC}$ は弧 BC に対する円周角の大きさ $\angle\mathrm{BAC} = A$ の 2 倍である：

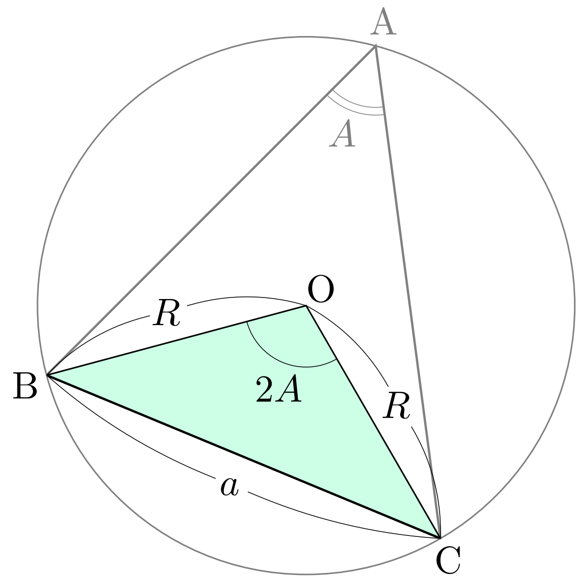
$$\angle\mathrm{BOC} = 2\angle\mathrm{BAC} = 2A\ .$$



三角形 ABC の 3 個の角のうち少なくとも 2 個は鋭角である．今仮に三角形 ABC の角 BAC が鋭角であるとする．三角形 ABC の外接円の中心を O とおき，外接円の半径を R とおく．この外接円において，弧 BC に対する中心角の大きさ $\angle\mathrm{BOC}$ は弧 BC に対する円周角の大きさ $\angle\mathrm{BAC}=A$ の 2 倍である：

$$\angle\mathrm{BOC}=2\angle\mathrm{BAC}=2A\ .$$

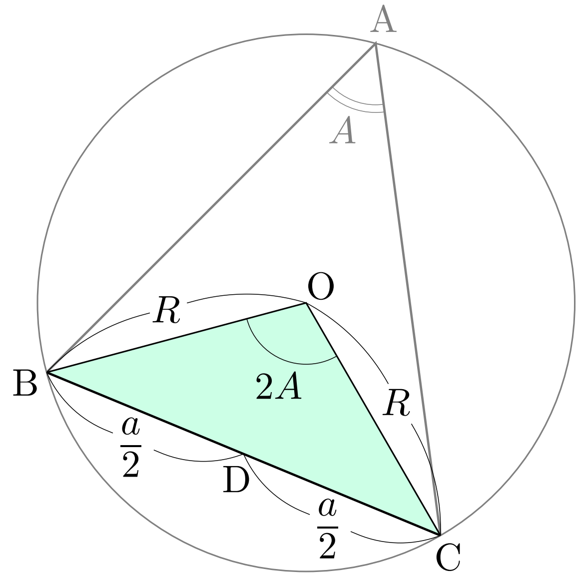
$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=R$ なので，三角形 OBC は二等辺三角形である．



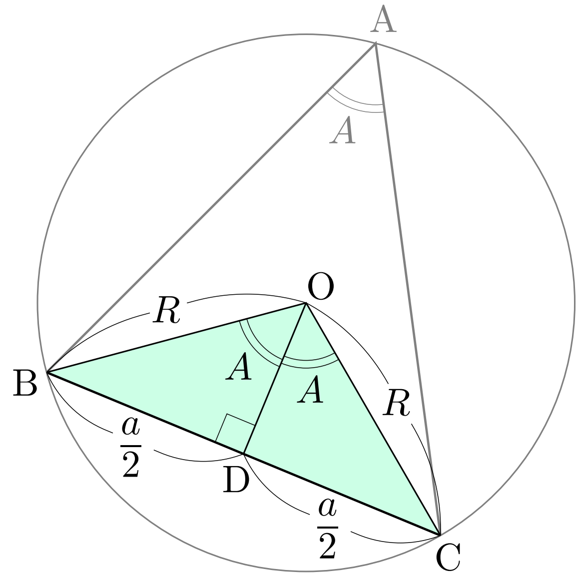
三角形 ABC の 3 個の角のうち少なくとも 2 個は鋭角である．今仮に三角形 ABC の角 BAC が鋭角であるとする．三角形 ABC の外接円の中心を O とおき，外接円の半径を R とおく．この外接円において，弧 BC に対する中心角の大きさ $\angle\mathrm{BOC}$ は弧 BC に対する円周角の大きさ $\angle\mathrm{BAC} = A$ の 2 倍である：

$$\angle\mathrm{BOC} = 2\angle\mathrm{BAC} = 2A\ .$$

$\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}} = R$ なので，三角形 OBC は二等辺三角形である．線分 BC の中点を D とおく．



三角形 ABC の 3 個の角のうち少なくとも 2 個は鋭角である．今仮に三角形 ABC の角 BAC が鋭角であるとする．三角形 ABC の外接円の中心を O とおき，外接円の半径を R とおく．この外接円において，弧 BC に対する中心角の大きさ $\angle\mathrm{BOC}$ は弧 BC に対する円周角の大きさ $\angle\mathrm{BAC} = A$ の 2 倍である：



$$\angle\mathrm{BOC} = 2\angle\mathrm{BAC} = 2A\ .$$

$\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}} = R$ なので，三角形 OBC は二等辺三角形である．線分 BC の中点を D とおく．

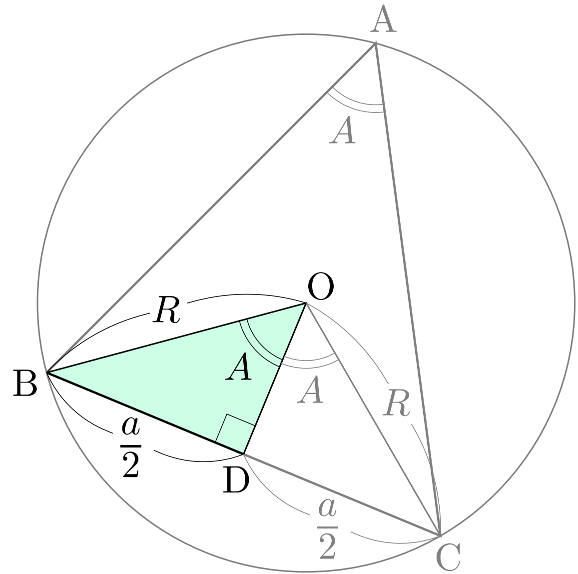
$$\angle\mathrm{BDO} = 90^\circ\ .$$

$$\overline{\mathrm{BD}} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{2} = \frac{a}{2}\ .$$

$$\angle\mathrm{BOD} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC} = \frac{1}{2}\cdot 2A = A\ .$$

$A = \angle\mathrm{BOD}$ より

$$\sin A = \sin\angle\mathrm{BOD} \ .$$

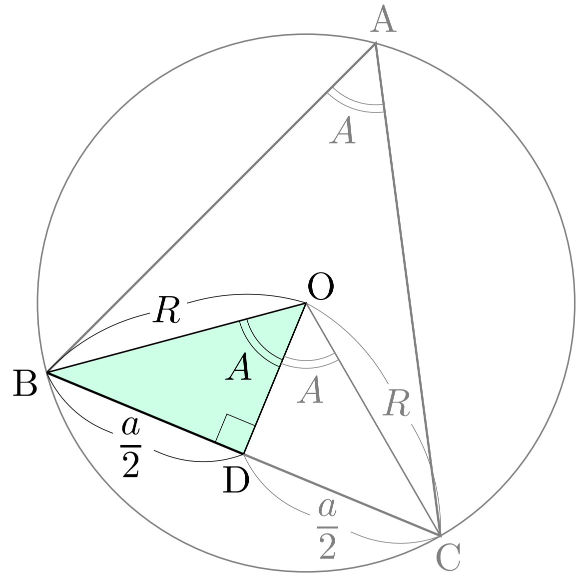


$A = \angle\mathrm{BOD}$ より

$$\sin A = \sin\angle\mathrm{BOD} \ .$$

$\angle\mathrm{BDO} = 90^\circ$ 及び $\overline{\mathrm{BD}} = \dfrac{a}{2}$ より

$$\sin\angle\mathrm{BOD} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{OB}}} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R} \ .$$



$A = \angle\mathrm{BOD}$ より

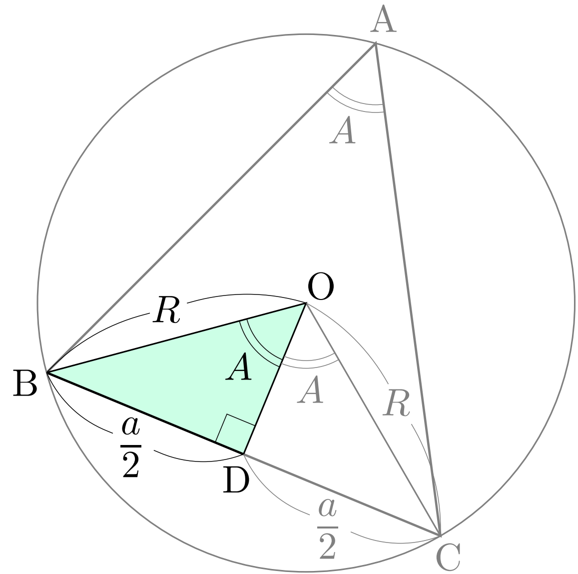
$$\sin A = \sin\angle\mathrm{BOD} \; .$$

$\angle\mathrm{BDO} = 90^\circ$ 及び $\overline{\mathrm{BD}} = \dfrac{a}{2}$ より

$$\sin\angle\mathrm{BOD} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{OB}}} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R} \; .$$

よって $\sin A = \sin\angle\mathrm{BOD} = \dfrac{a}{2R}$ なので,

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \; .$$



$A = \angle \mathrm{BOD}$ より

$$\sin A = \sin \angle \mathrm{BOD} \ .$$

$\angle \mathrm{BDO} = 90^\circ$ 及び $\overline{\mathrm{BD}} = \dfrac{a}{2}$ より

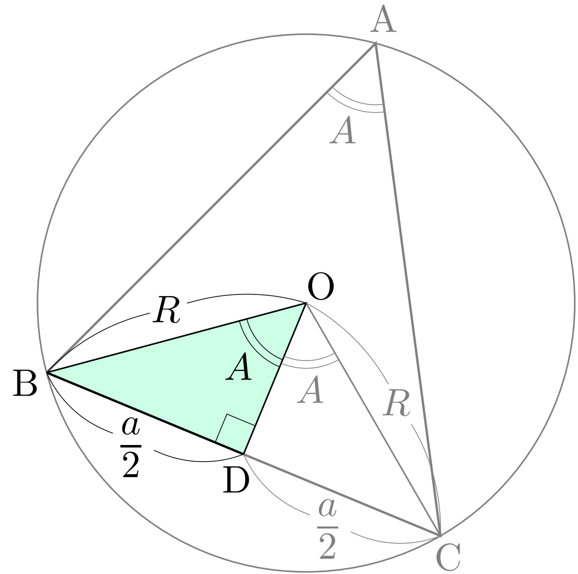
$$\sin \angle \mathrm{BOD} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{OB}}} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R} \ .$$

よって $\sin A = \sin \angle \mathrm{BOD} = \dfrac{a}{2R}$ なので,

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \ .$$

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ なので

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \ .$$



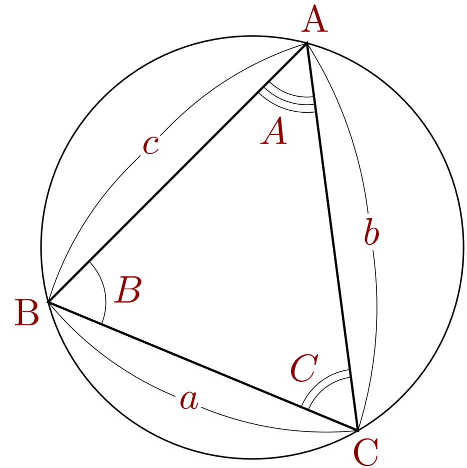
定理（正弦定理）　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において,

$$\angle \mathrm{BAC} = A \ , \quad \angle \mathrm{ABC} = B \ , \quad \angle \mathrm{ACB} = C \ ,$$

$$\overline{\mathrm{BC}} = a \ , \quad \overline{\mathrm{CA}} = b \ , \quad \overline{\mathrm{AB}} = c$$

とおく；更に，三角形 ABC の外接円の半径を R とおく．このとき，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \ .$$



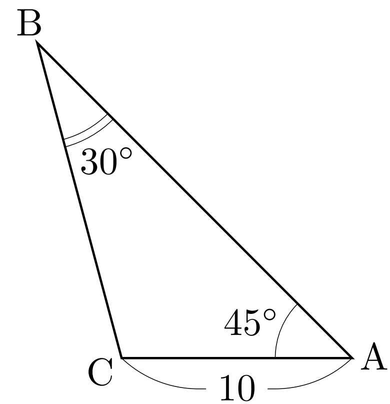
平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において，正弦定理より，例えば $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}$ ．このように，正弦定理は三角形の 2 辺の長さと 2 個の角の大きさとの間の関係を述べる．

平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において，正弦定理より，例えば $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}$ ．このように，正弦定理は三角形の 2 辺の長さと 2 個の角の大きさとの間の関係を述べる．なので，正弦定理によって次のような計算ができる．

・三角形の 1 辺の長さと 2 個の角の大きさとから他の辺の長さを求める．

・三角形の 2 辺の長さと 1 個の角の大きさとから他の角の大きさを求める．

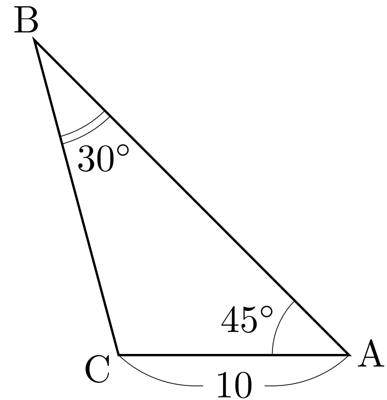
例 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AC}} = 10$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 30^\circ$ とする．辺 BC の長さを求める．



$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AC}} = 10$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 30^\circ$ とする．辺 BC の長さを求める．

正弦定理より，

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} \ ,$$

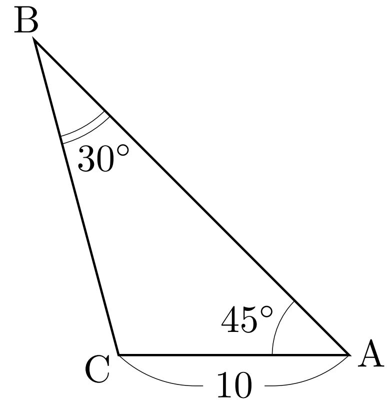


例 平面上の相異なる3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AC}} = 10$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 30^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求める.

正弦定理より,

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} ,$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BC}} &= \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}\sin\angle\mathrm{BAC} \\ &= \frac{10}{\sin 30^\circ}\sin 45^\circ = \frac{10}{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = 20\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 10\sqrt{2} .\end{aligned}$$



終

問6.7.2 平面上の相異なる3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{6}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 60^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求めよ.

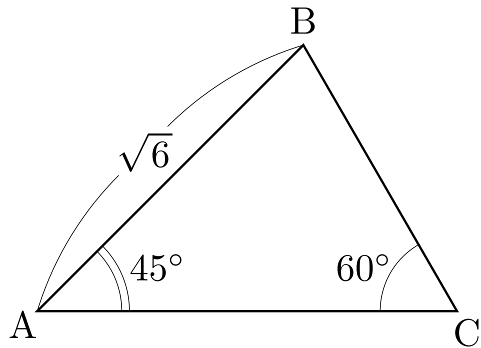
正弦定理より

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\qquad} = \frac{\overline{\qquad}}{\sin\angle\qquad},$$

$$\overline{\mathrm{BC}} = \frac{\overline{\qquad}}{\sin\angle\qquad}\sin\angle\qquad = \frac{\qquad}{\sin\qquad}\sin\qquad$$

$$= \frac{\qquad}{\qquad} =$$

$$= \qquad .$$

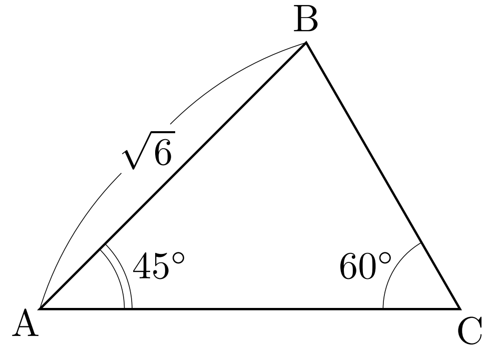


問6.7.2 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{6}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 60^\circ$ とする．辺 BC の長さを求めよ．

正弦定理より

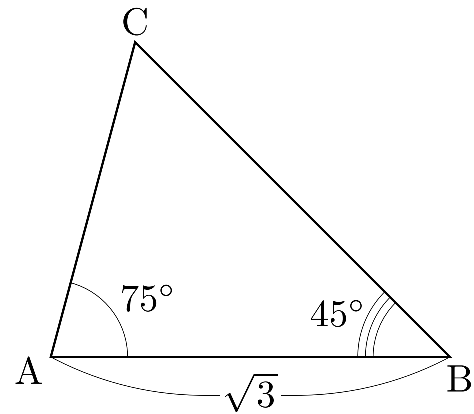
$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} ,$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BC}} &= \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\ &= 2 .\end{aligned}$$



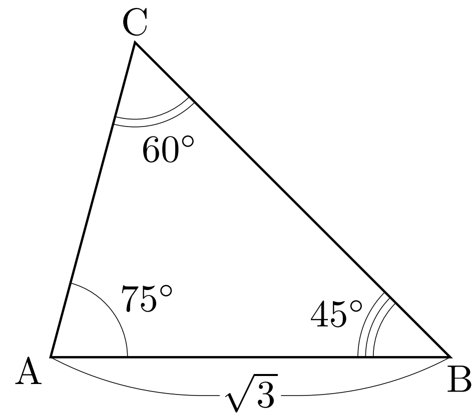
終

$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 75^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 45^\circ$ とする．辺 AC の長さを求める．



例 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 75^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 45^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.

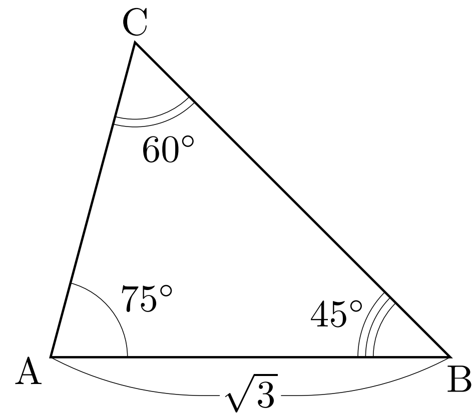
$$\angle\mathrm{ACB} = 180^\circ - \angle\mathrm{BAC} - \angle\mathrm{ABC} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ \ .$$



例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{BAC}=75^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ABC}=45^\circ$ とする．辺 AC の長さを求める．

$$\angle\mathrm{ACB} = 180^\circ - \angle\mathrm{BAC} - \angle\mathrm{ABC} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ \ .$$

正弦定理より，



$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} \ ,$$

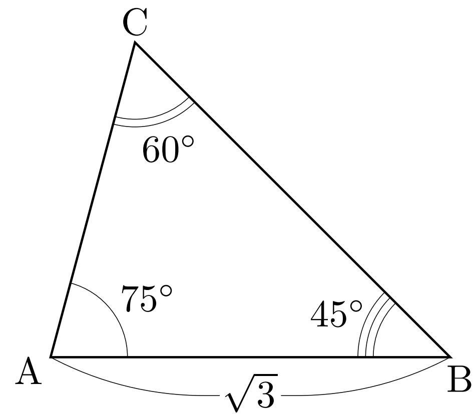
例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 75^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 45^\circ$ とする．辺 AC の長さを求める．

$$\angle\mathrm{ACB} = 180^\circ - \angle\mathrm{BAC} - \angle\mathrm{ABC} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ\ .$$

正弦定理より，

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}\ ,$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AC}} &= \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}\sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}\ .\end{aligned}$$



終

$\boxed{\text{問}6.7.3}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AC}} = 6$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 15^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 45^\circ$ とする．辺 AB の長さを求めよ．

$$\angle\mathrm{ABC} = 180^\circ - \qquad\qquad - \qquad\qquad = 180^\circ - \qquad - \qquad = \qquad\qquad .$$

$$\sin 120^\circ = \sin(\qquad + 90^\circ) = \cos \qquad = \qquad\qquad .$$

$$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$$

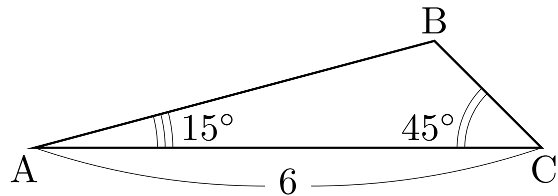
正弦定理より，

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\qquad\quad} = \frac{\overline{\qquad}}{\sin\angle\qquad\quad},$$

$$\overline{\mathrm{AB}} = \frac{\overline{\qquad}}{\sin\angle\qquad\quad}\sin\angle$$

$$= \frac{\qquad\qquad}{\sin\qquad}\sin\qquad = \frac{\qquad}{\qquad} = $$

$$= \qquad\qquad .$$



問6.7.3 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AC}} = 6$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 15^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 45^\circ$ とする．辺 AB の長さを求めよ．

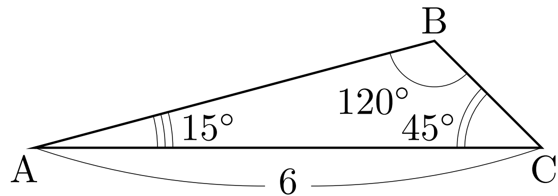
$$\angle\mathrm{ABC} = 180^\circ - \angle\mathrm{BAC} - \angle\mathrm{ACB} = 180^\circ - 15^\circ - 45^\circ = 120^\circ \ .$$

$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

正弦定理より，

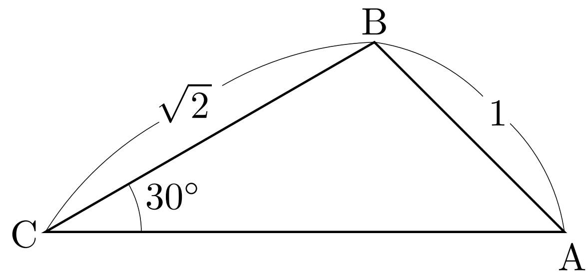
$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} \ ,$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}\sin\angle\mathrm{ACB} \\ &= \frac{6}{\sin 120^\circ}\sin 45^\circ = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot 6}{\sqrt{6}} \\ &= 2\sqrt{6} \ .\end{aligned}$$



終

$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 1$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 30^\circ$ とする．角 BAC の大きさを求める．

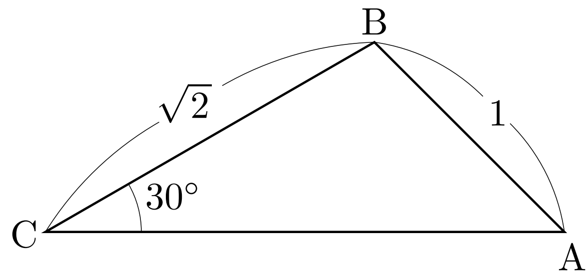


$\boxed{例}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A, B, C}$ を頂点とする三角形 ABC について，

$\overline{\mathrm{AB}} = 1$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 30^\circ$ とする．角 BAC の大きさを求める．

正弦定理より

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} ,$$

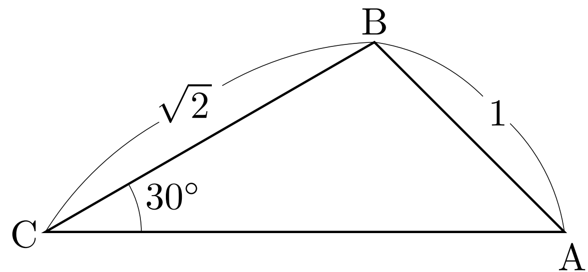


$\boxed{例}$ 平面上の相異なる３点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 1$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 30^\circ$ とする．角 BAC の大きさを求める．

正弦定理より

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}},$$

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{BAC} &= \frac{\sin\angle\mathrm{ACB}}{\overline{\mathrm{AB}}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\\ &= \frac{\sin 30^\circ}{1}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

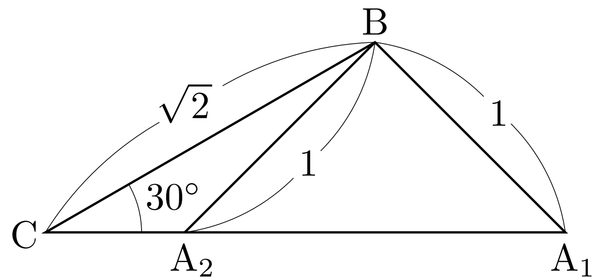


例 平面上の相異なる3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AB}} = 1$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 30^\circ$ とする. 角 BAC の大きさを求める.

正弦定理より

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}},$$

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{BAC} &= \frac{\sin\angle\mathrm{ACB}}{\overline{\mathrm{AB}}}\cdot\overline{\mathrm{BC}} \\ &= \frac{\sin 30^\circ}{1}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$



これより $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ または $\angle\mathrm{BAC} = 135^\circ$. どちらの場合もあり得る. 終

$\boxed{問6.7.4}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ とする．角 ABC の大きさを求めよ．

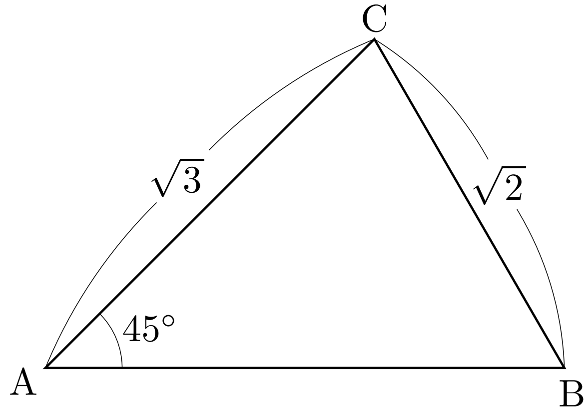
正弦定理より

$$\frac{\overline{\qquad}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \frac{\overline{\qquad}}{\sin\angle\qquad},$$

$$\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{\sin\angle\qquad}{\overline{\qquad}}\cdot\overline{\qquad}$$

$$= \qquad\cdot\qquad =$$

$$= \qquad .$$



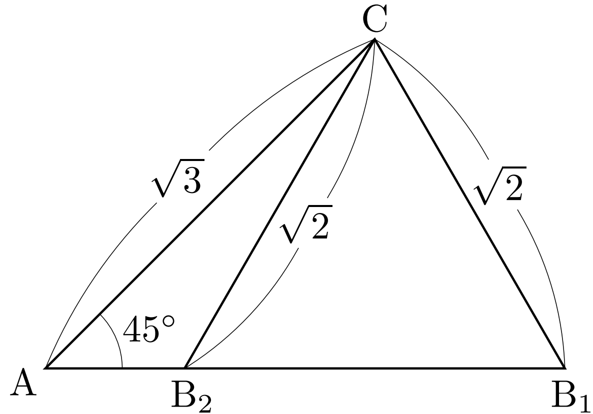
従って $\angle\mathrm{ABC} = \qquad$ または $\angle\mathrm{ABC} = \qquad$.

$\boxed{\text{問}6.7.4}$ 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ とする. 角 ABC の大きさを求めよ.

正弦定理より

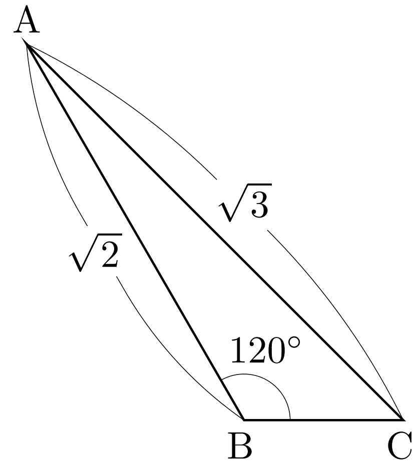
$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} \ ,$$

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{ABC} &= \frac{\sin\angle\mathrm{BAC}}{\overline{\mathrm{BC}}}\cdot\overline{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \ .\end{aligned}$$

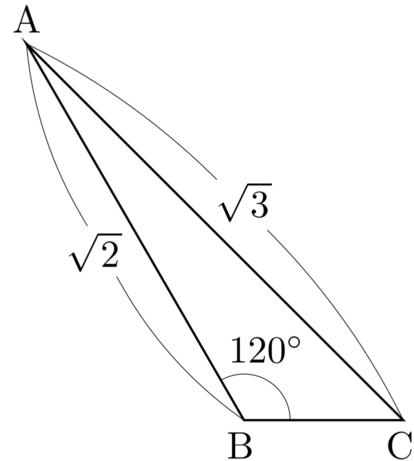


従って $\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ または $\angle\mathrm{ABC} = 120^\circ$. どちらの場合もあり得る. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$ 平面上の相異なる3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 120°$ とする. 角 ACB の大きさを求める.



$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 120^\circ$ とする．角 ACB の大きさを求める．



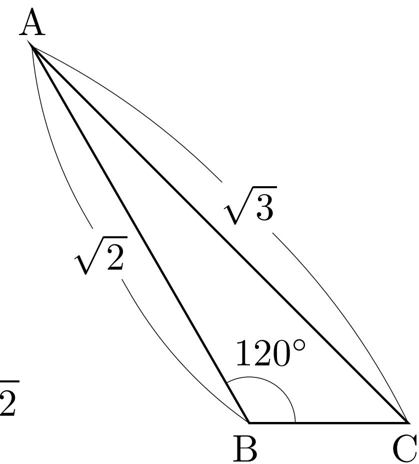
$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$

正弦定理より，

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} ,$$

例 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 120^\circ$ とする．角 ACB の大きさを求める．



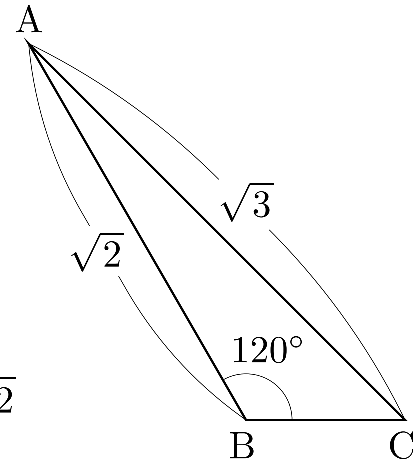
$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

正弦定理より，

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} ,$$

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{ACB} &= \frac{\sin\angle\mathrm{ABC}}{\overline{\mathrm{AC}}} \cdot \overline{\mathrm{AB}} = \frac{\sin 120^\circ}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} .\end{aligned}$$

例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$ かつ $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$ とする．角 ACB の大きさを求める．



$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ+90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

正弦定理より，

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} ,$$

$$\sin\angle\mathrm{ACB} = \frac{\sin\angle\mathrm{ABC}}{\overline{\mathrm{AC}}}\cdot\overline{\mathrm{AB}} = \frac{\sin 120^\circ}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

これより $\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$ または $\angle\mathrm{ACB}=135^\circ$ ． $\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ACB}\leq 180^\circ$ より $\angle\mathrm{ACB}\leq 180^\circ-\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ なので， $\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$ ． 終

$\boxed{問6.7.5}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 1$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 135^\circ$ とする．角 BAC の大きさを求めよ．

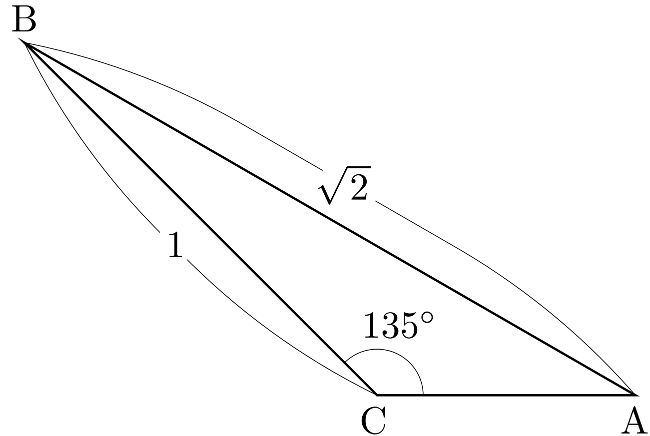
正弦定理より

$$\frac{\overline{\qquad}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = \frac{\overline{\qquad}}{\sin\angle\qquad\qquad} ,$$

$$\sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{\sin\angle\qquad}{\overline{\qquad}}\cdot\overline{\qquad}$$

$$= \frac{\sin 135^\circ}{\sqrt{2}}\cdot 1 = $$

$$= \qquad .$$



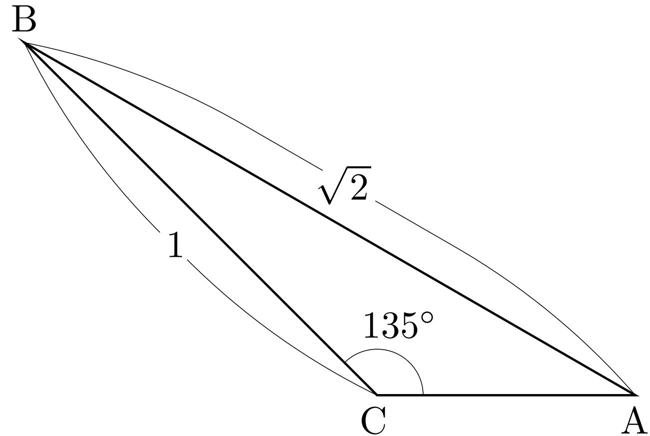
従って $\angle\mathrm{BAC} = \qquad$ または $\angle\mathrm{BAC} = \qquad$ ． $\angle\mathrm{BAC} \leq 180^\circ - \angle\mathrm{ACB} = \qquad$ なので，$\angle\mathrm{BAC} = \qquad$ ．

$\boxed{問6.7.5}$ 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 1$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 135^\circ$ とする．角 BAC の大きさを求めよ．

正弦定理より

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}},$$

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{BAC} &= \frac{\sin\angle\mathrm{ACB}}{\overline{\mathrm{AB}}}\cdot\overline{\mathrm{BC}} \\ &= \frac{\sin 135^\circ}{\sqrt{2}}\cdot 1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$



従って $\angle\mathrm{BAC} = 30^\circ$ または $\angle\mathrm{BAC} = 150^\circ$ ． $\angle\mathrm{BAC} \leq 180^\circ - \angle\mathrm{ACB} = 45^\circ$ なので， $\angle\mathrm{BAC} = 30^\circ$ ．

$\boxed{終}$