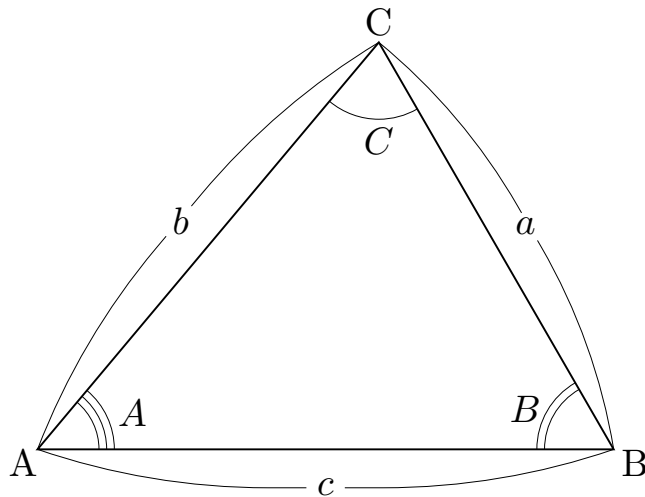


6.8 余弦定理

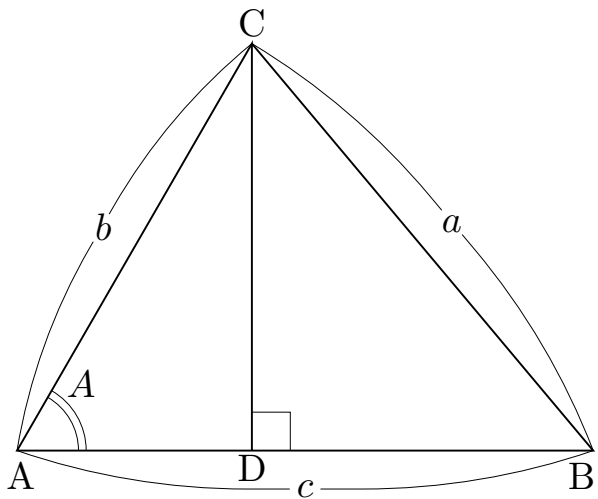
平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、辺の長さ及び角の大きさを次のようにおくことが多い：

$$a = \overline{BC}, \quad b = \overline{AC}, \quad c = \overline{AB},$$

$$A = \angle BAC, \quad B = \angle ABC, \quad C = \angle ACB.$$



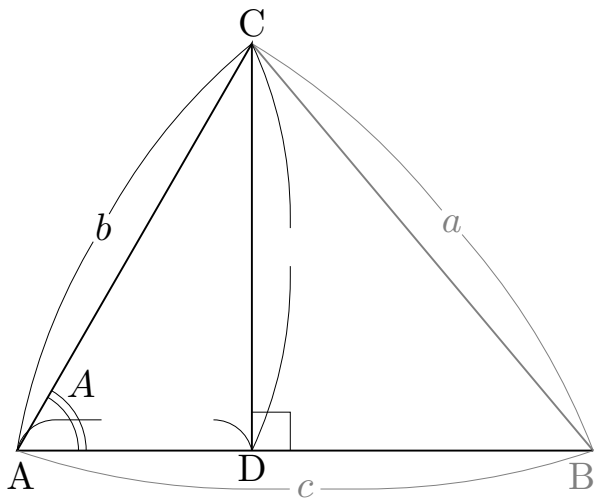
三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
角 BAC と角 ABC とが鋭角であるとする. 頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく.



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
 角 BAC と角 ABC とが鋭角であるとする. 頂点 C から辺 AB に下した垂
 線の足を D とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角なので,

$$\overline{CD} = \quad ,$$

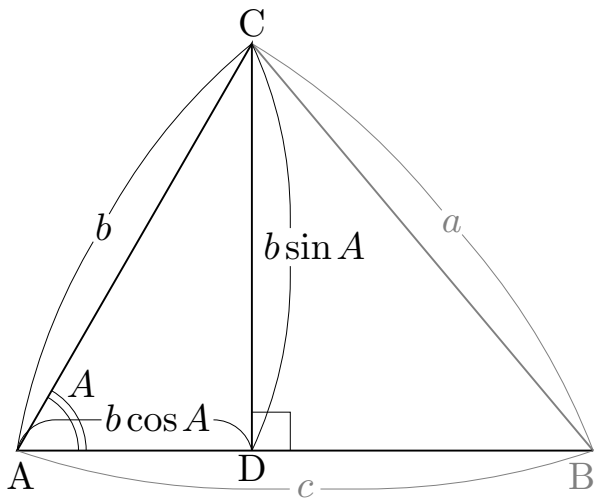
$$\overline{AD} = \quad .$$



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
角 BAC と角 ABC とが鋭角であるとする. 頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角なので,

$$\overline{CD} = b \sin A ,$$

$$\overline{AD} = b \cos A ,$$

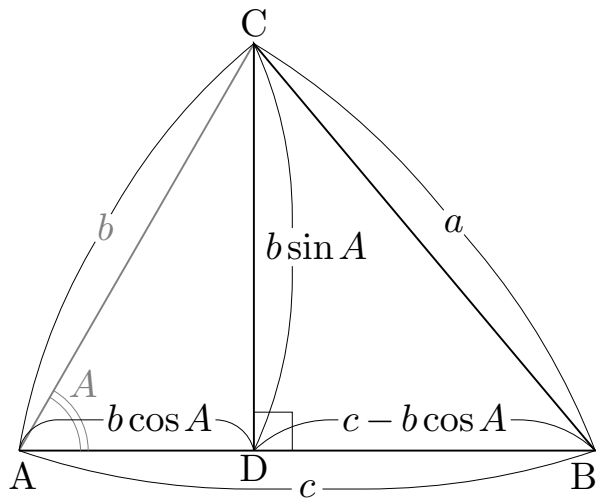


三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
 角 BAC と角 ABC とが鋭角であるとする. 頂点 C から辺 AB に下した垂
 線の足を D とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角なので,

$$\overline{CD} = b \sin A ,$$

$$\overline{AD} = b \cos A ,$$

$$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = c - b \cos A .$$



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
 角 BAC と角 ABC とが鋭角であるとする. 頂点 C から辺 AB に下した垂
 線の足を D とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角なので,

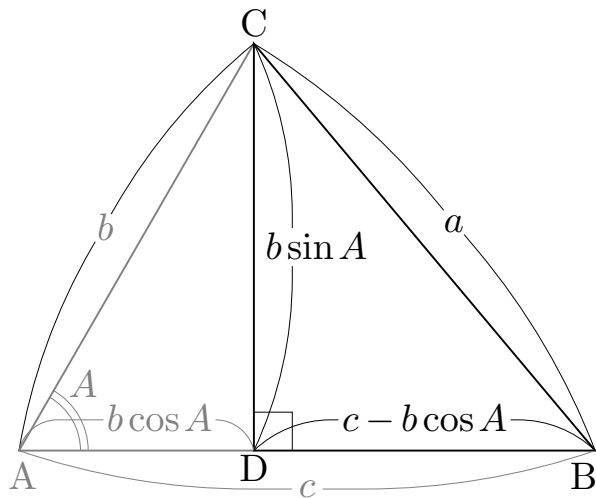
$$\overline{CD} = b \sin A ,$$

$$\overline{AD} = b \cos A ,$$

$$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = c - b \cos A ,$$

直角三角形 BCD において,

$$a^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$$



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
 角 BAC と角 ABC とが鋭角であるとする. 頂点 C から辺 AB に下した垂
 線の足を D とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角なので,

$$\overline{CD} = b \sin A ,$$

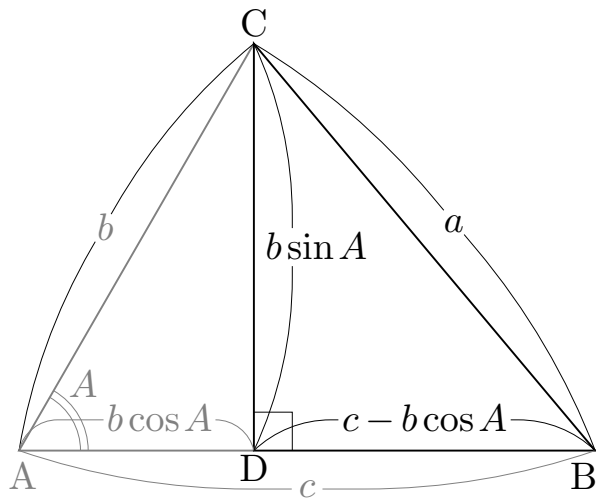
$$\overline{AD} = b \cos A ,$$

$$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = c - b \cos A ,$$

直角三角形 BCD において,

$$a^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$$

$$= (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2$$



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
 角 BAC と角 ABC とが鋭角であるとする. 頂点 C から辺 AB に下した垂
 線の足を D とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角なので,

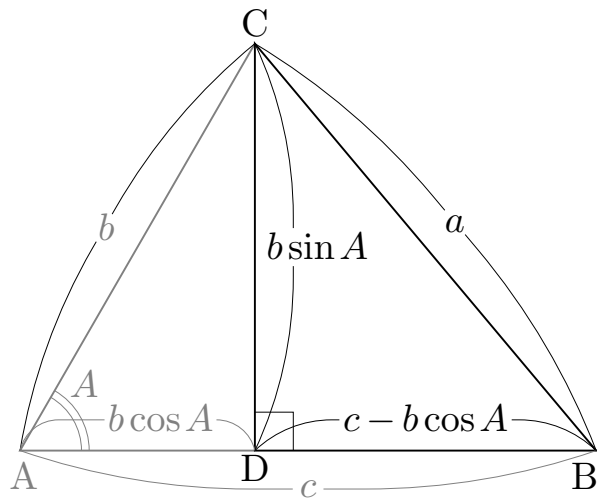
$$\overline{CD} = b \sin A ,$$

$$\overline{AD} = b \cos A ,$$

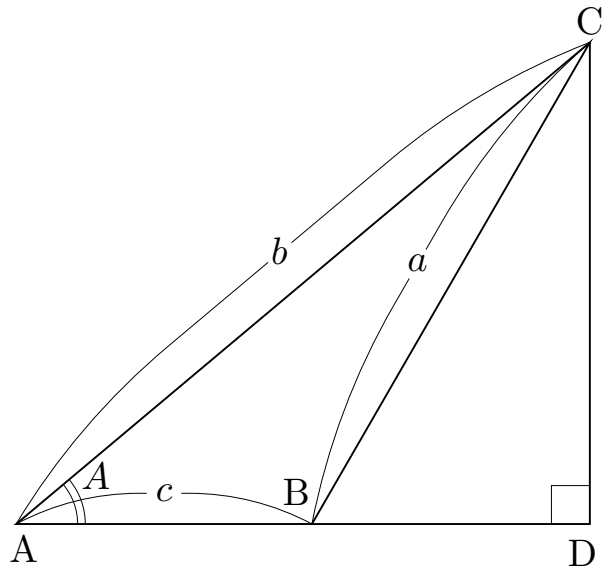
$$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = c - b \cos A .$$

直角三角形 BCD において,

$$\begin{aligned} a^2 &= \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 \\ &= (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2 (\sin A)^2 + c^2 - 2bc \cos A + b^2 (\cos A)^2 \\ &= b^2 \{ (\sin A)^2 + (\cos A)^2 \} + c^2 - 2bc \cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A . \end{aligned}$$



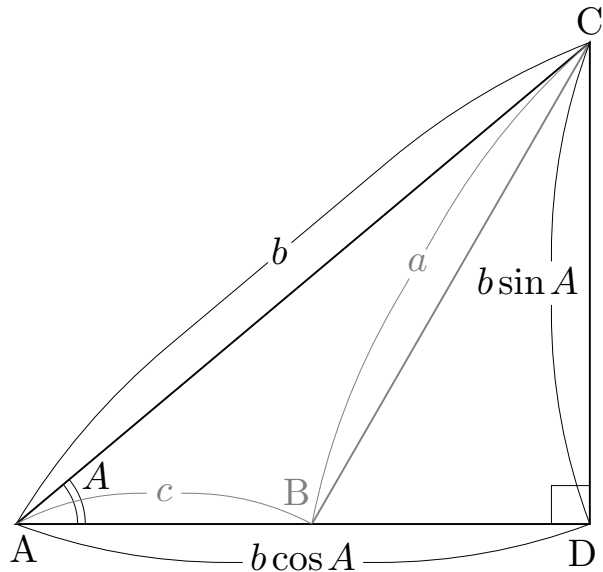
三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
角 ABC が鈍角であるとする. 頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D
とおく.



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
 角 ABC が鈍角であるとする. 頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D
 とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角なので,

$$\overline{CD} = b \sin A ,$$

$$\overline{AD} = b \cos A ,$$

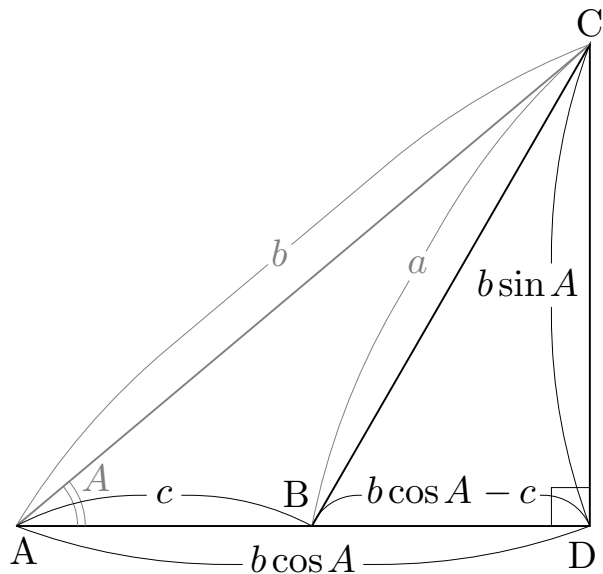


三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
 角 ABC が鈍角であるとする. 頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D
 とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角なので,

$$\overline{CD} = b \sin A ,$$

$$\overline{AD} = b \cos A ,$$

$$\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = b \cos A - c .$$



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
 角 ABC が鈍角であるとする. 頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D
 とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角なので,

$$\overline{CD} = b \sin A ,$$

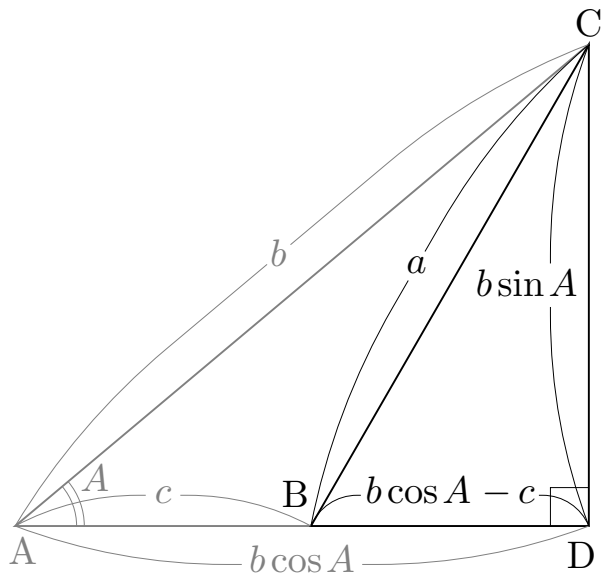
$$\overline{AD} = b \cos A ,$$

$$\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = b \cos A - c .$$

直角三角形 BCD において,

$$a^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$$

$$= (b \sin A)^2 + (b \cos A - c)^2$$



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
 角 ABC が鈍角であるとする. 頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D
 とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角なので,

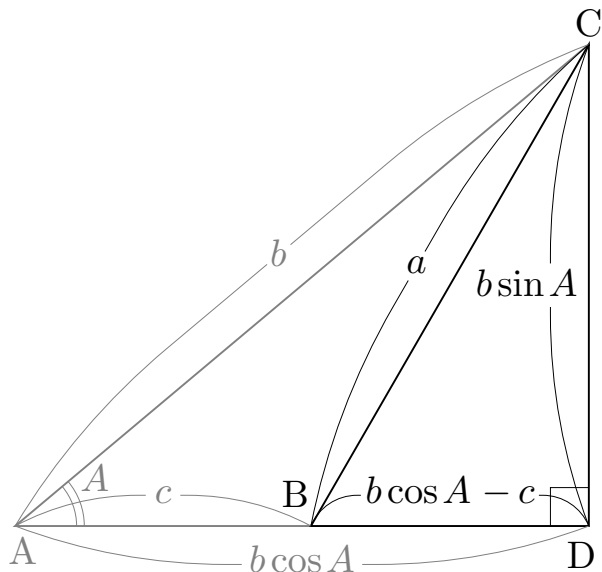
$$\overline{CD} = b \sin A ,$$

$$\overline{AD} = b \cos A ,$$

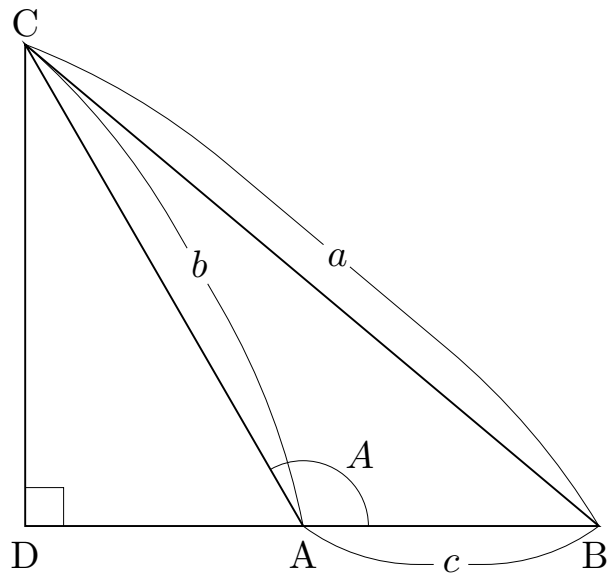
$$\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = b \cos A - c .$$

直角三角形 BCD において,

$$\begin{aligned} a^2 &= \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 \\ &= (b \sin A)^2 + (b \cos A - c)^2 \\ &= b^2 (\sin A)^2 + b^2 (\cos A)^2 - 2bc \cos A + c^2 \\ &= b^2 \{ (\sin A)^2 + (\cos A)^2 \} + c^2 - 2bc \cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A . \end{aligned}$$



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
角 BAC が鈍角であるとする. 頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D
とおく.



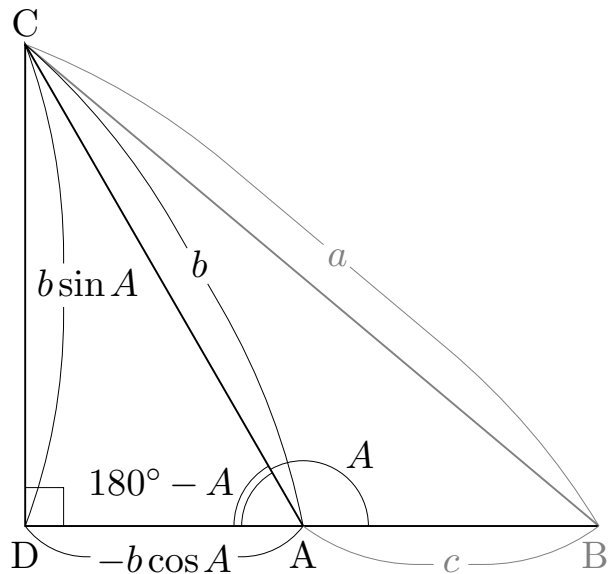
三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
 角 BAC が鈍角であるとする. 頂点 C から直線 AB 到下した垂線の足を D
 とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角で, $\angle CAD = 180^\circ - A$ な
 ので,

$$\overline{CD} = b \sin(180^\circ - A) = b \sin A ,$$

$$\overline{AD} = b \cos(180^\circ - A) = -b \cos A ,$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

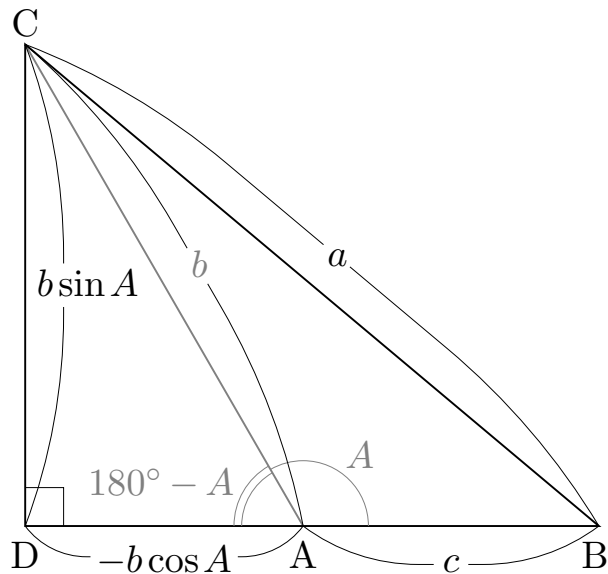


三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
 角 BAC が鈍角であるとする. 頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D
 とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角で, $\angle CAD = 180^\circ - A$ な
 ので,

$$\overline{CD} = b \sin(180^\circ - A) = b \sin A ,$$

$$\overline{AD} = b \cos(180^\circ - A) = -b \cos A ,$$

$$\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AD} = c - b \cos A .$$



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.
 角 BAC が鈍角であるとする. 頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D
 とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角で, $\angle CAD = 180^\circ - A$ な
 ので,

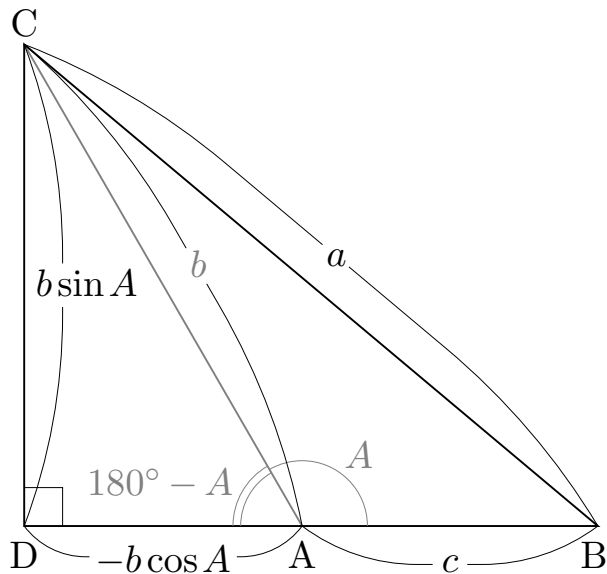
$$\overline{CD} = b \sin(180^\circ - A) = b \sin A ,$$

$$\overline{AD} = b \cos(180^\circ - A) = -b \cos A ,$$

$$\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AD} = c - b \cos A .$$

直角三角形 BCD において,

$$\begin{aligned} a^2 &= \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 \\ &= (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2(\sin A)^2 + c^2 - 2bc \cos A + b^2(\cos A)^2 \\ &= b^2\{(\sin A)^2 + (\cos A)^2\} + c^2 - 2bc \cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A . \end{aligned}$$

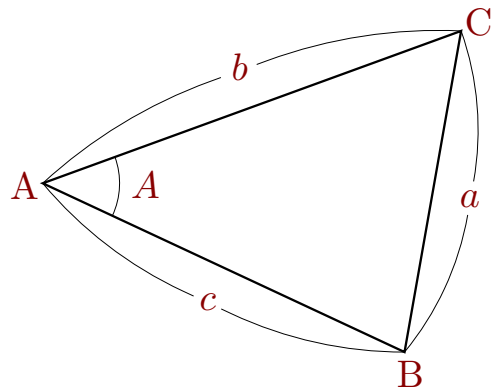


定理（余弦定理） 平面上の相異なる 3 点 A ,
 B, C を頂点とする三角形 ABC において,

$$\overline{AB} = c, \quad \overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b, \quad \angle BAC = A$$

とおくと,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A .$$



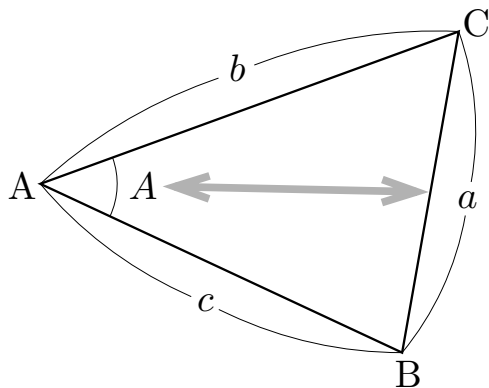
平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において,

$$\overline{AB} = c, \quad \overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b, \quad \angle BAC = A$$

とおくときの余弦定理の公式

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

において、左辺に含まれる辺の長さ a は右辺に現れる角度 A の角 BAC の向かいの辺 BC の長さである。



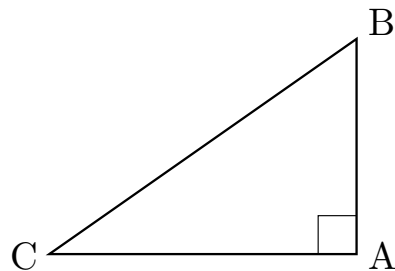
相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、余弦定理より、

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \cos \angle BAC .$$

ここで、角 BAC が直角であるとするとき、
 $\angle BAC = 90^\circ$ より $\cos \angle BAC = \cos 90^\circ = 0$
なので、

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 .$$

これはピタゴラスの定理（三平方の定理）である。このように、ピタゴラスの定理は余弦定理の特殊な場合である。



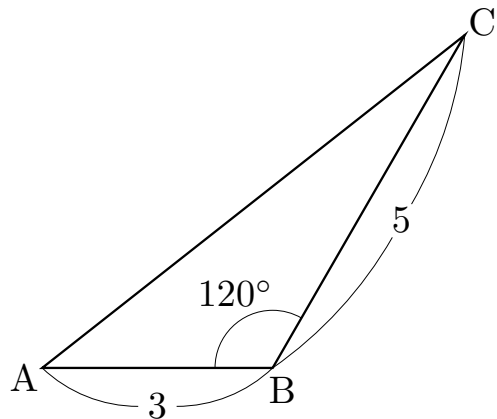
平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において, 余弦定理より, 例えば $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \cos \angle BAC$. このように, 余弦定理は三角形の 3 辺の長さ と 1 個の角の大きさとの間の関係を述べる.

平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、余弦定理より、例えば $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \cos \angle BAC$. このように、余弦定理は三角形の 3 辺の長さ と 1 個の角の大きさ との間の関係を述べる . なので、余弦定理によって次のような計算ができる .

- ・ 三角形の 2 辺の長さ と 1 個の角の大きさ とから他の辺の長さを求める .
- ・ 三角形の 3 辺の長さ から角の大きさを求める .

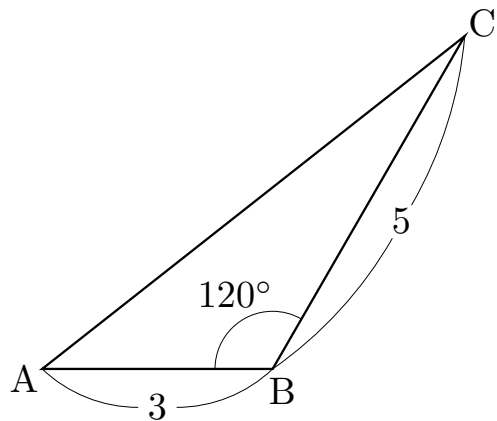
例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = 3$ かつ $\overline{BC} = 5$ かつ $\angle ABC = 120^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.

例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 3$ かつ $\overline{BC} = 5$ かつ $\angle ABC = 120^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.



例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = 3$ かつ $\overline{BC} = 5$ かつ $\angle ABC = 120^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.

$$\begin{aligned}\cos 120^\circ &= \cos(30^\circ + 90^\circ) = -\sin 30^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta\end{aligned}$$

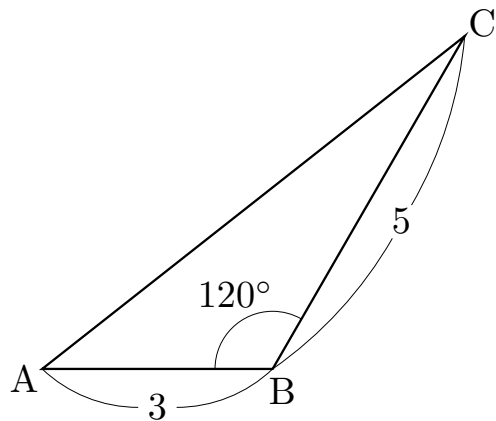


例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = 3$ かつ $\overline{BC} = 5$ かつ $\angle ABC = 120^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.

$$\begin{aligned}\cos 120^\circ &= \cos(30^\circ + 90^\circ) = -\sin 30^\circ \\ &= -\frac{1}{2} .\end{aligned}$$

余弦定理より

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC$$



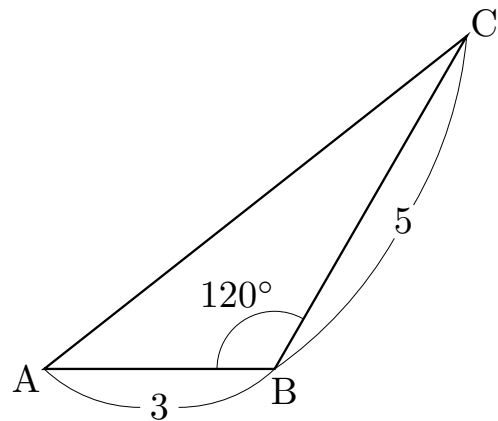
例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 3$ かつ $\overline{BC} = 5$ かつ $\angle ABC = 120^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.

$$\begin{aligned}\cos 120^\circ &= \cos(30^\circ + 90^\circ) = -\sin 30^\circ \\ &= -\frac{1}{2} .\end{aligned}$$

余弦定理より

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC \\ &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ \\ &= 9 + 25 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 49 .\end{aligned}$$

$\overline{AC} \geq 0$ なので $\overline{AC} = \sqrt{49} = 7$.



終

問6.8.1 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 4$ かつ $\overline{AC} = \sqrt{3}$ かつ $\angle BAC = 30^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求めよ.

余弦定理より

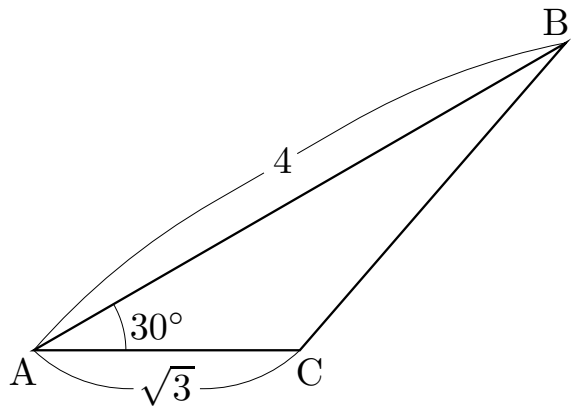
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \overline{AB} \overline{AC} \cos \angle BAC$$

$$= 4^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ$$

=

= ,

$\overline{BC} \geq 0$ なので $\overline{BC} =$.

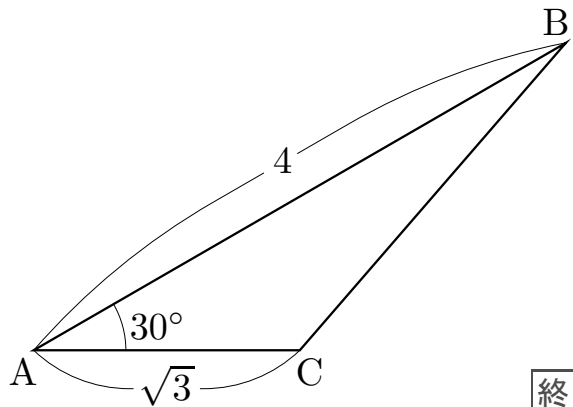


問6.8.1 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 4$ かつ $\overline{AC} = \sqrt{3}$ かつ $\angle BAC = 30^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求めよ.

余弦定理より

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \cos \angle BAC \\ &= 4^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ \\ &= 16 + 3 - 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 7,\end{aligned}$$

$\overline{BC} \geq 0$ なので $\overline{BC} = \sqrt{7}$.



終

問6.8.2 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AC} = 5$ かつ $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$ かつ $\angle ACB = 150^\circ$ とする. 辺 AB の長さを求めよ.

$$\cos 150^\circ = \quad = \quad .$$

余弦定理より $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta$

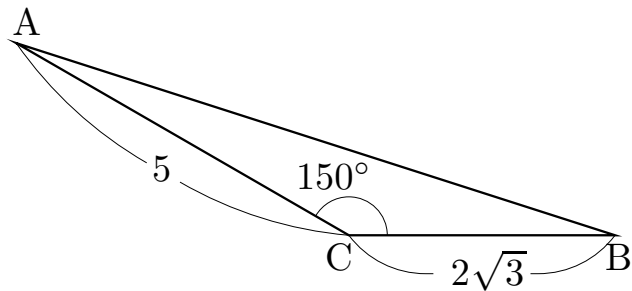
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \overline{AC} \overline{BC} \cos \angle C$$

$$= 5^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 150^\circ$$

$$=$$

$$= \quad ,$$

$\overline{AB} \geq 0$ なので $\overline{AB} = \quad$.



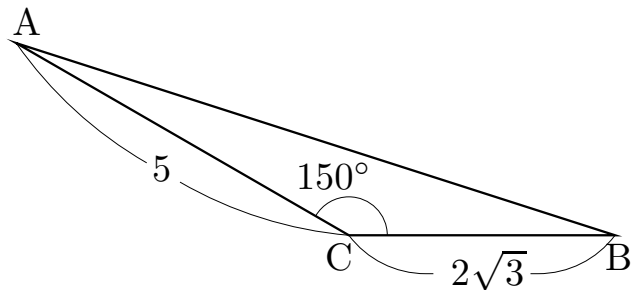
問6.8.2 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AC} = 5$ かつ $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$ かつ $\angle ACB = 150^\circ$ とする. 辺 AB の長さを求めよ.

$$\cos 150^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

余弦定理より

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\overline{BC} \cos \angle ACB \\ &= 5^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 150^\circ \\ &= 25 + 12 - 20\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 67 ,\end{aligned}$$

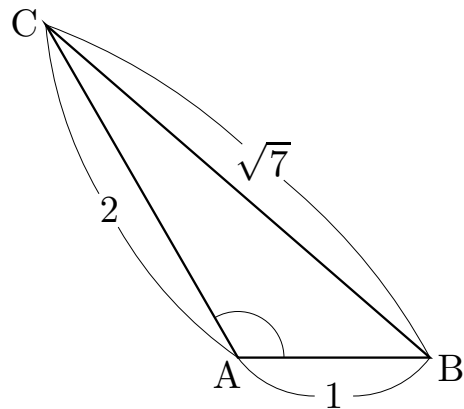
$$\overline{AB} \geq 0 \text{ なので } \overline{AB} = \sqrt{67} .$$



終

例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = 1$ かつ $\overline{AC} = 2$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{7}$ とする. 角 BAC の大きさを求める.

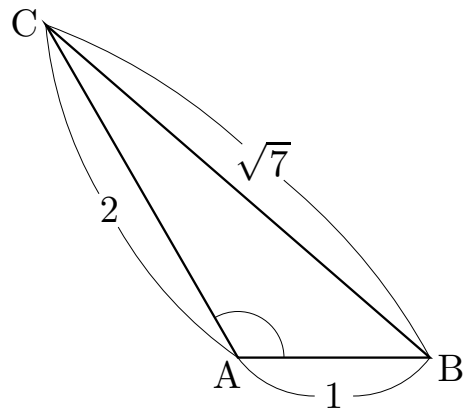
例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = 1$ かつ $\overline{AC} = 2$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{7}$ とする. 角 BAC の大きさを求める.



例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = 1$ かつ $\overline{AC} = 2$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{7}$ とする. 角 BAC の大きさを求める.

余弦定理より,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC}\cos\angle BAC,$$



例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 1$ かつ $\overline{AC} = 2$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{7}$ とする。角 BAC の大きさを求める。

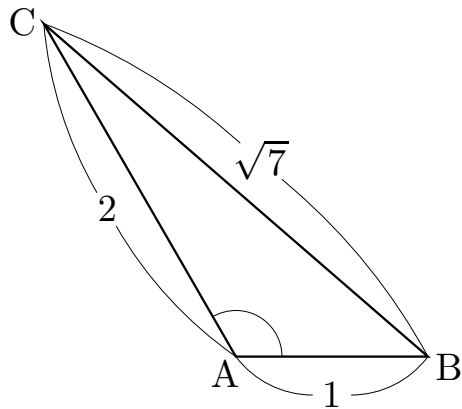
余弦定理より、

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC}\cos\angle BAC,$$

$$\sqrt{7}^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos\angle BAC,$$

$$4\cos\angle BAC = -2,$$

$$\cos\angle BAC = -\frac{1}{2},$$



例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 1$ かつ $\overline{AC} = 2$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{7}$ とする。角 BAC の大きさを求める。

余弦定理より、

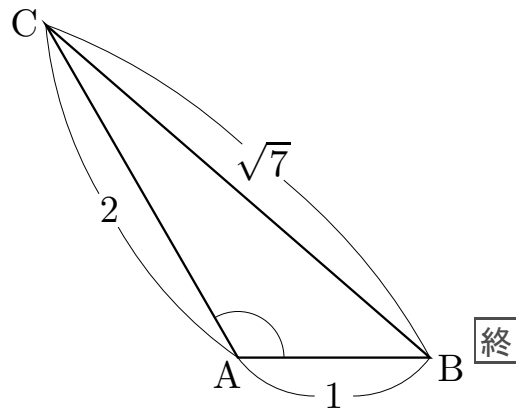
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC}\cos\angle BAC,$$

$$\sqrt{7}^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos\angle BAC,$$

$$4\cos\angle BAC = -2,$$

$$\cos\angle BAC = -\frac{1}{2},$$

$0^\circ \leq \angle BAC \leq 180^\circ$ なので $\angle BAC = 120^\circ$.



問6.8.3 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 3\sqrt{3}$ かつ $\overline{AC} = 7$ かつ $\overline{BC} = 2$ とする. 角 ABC の大きさを求めよ.

余弦定理より,

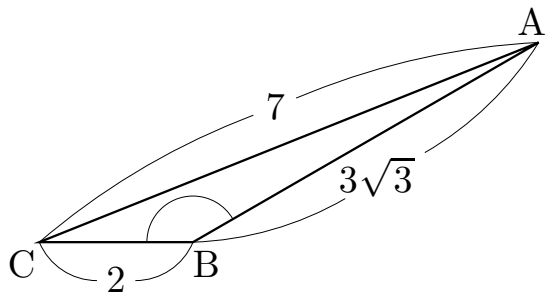
$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cos \angle ABC,$$

$$7^2 = (3\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos \angle ABC,$$

$$\cos \angle ABC = \frac{7^2 - (3\sqrt{3})^2 - 2^2}{-2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2},$$

$$\cos \angle ABC = \frac{49 - 27 - 4}{-12\sqrt{3}} = \frac{18}{-12\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$0^\circ \leq \angle ABC \leq 180^\circ$ なので $\angle ABC = 150^\circ$.



問6.8.3 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 3\sqrt{3}$ かつ $\overline{AC} = 7$ かつ $\overline{BC} = 2$ とする。角 ABC の大きさを求めよ。

余弦定理より、

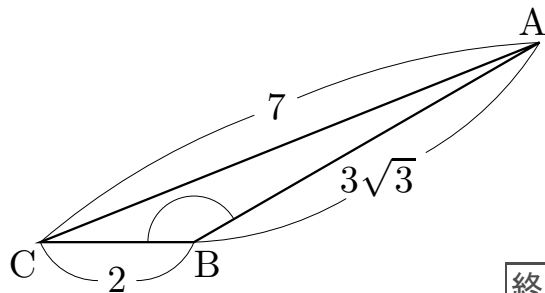
$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC}\cos\angle ABC,$$

$$7^2 = (3\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos\angle ABC,$$

$$12\sqrt{3}\cos\angle ABC = -18,$$

$$\cos\angle ABC = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

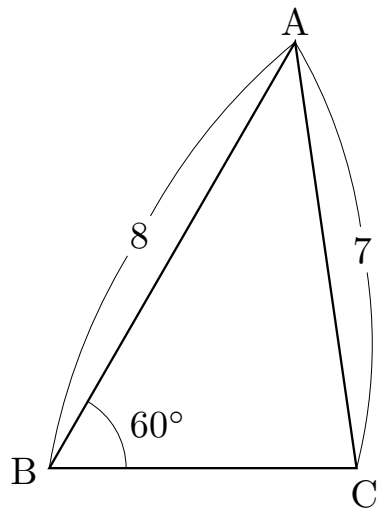
$0^\circ \leq \angle ABC \leq 180^\circ$ なので $\angle ABC = 150^\circ$.



終

例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = 8$ かつ $\overline{AC} = 7$ かつ $\angle ABC = 60^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求める.

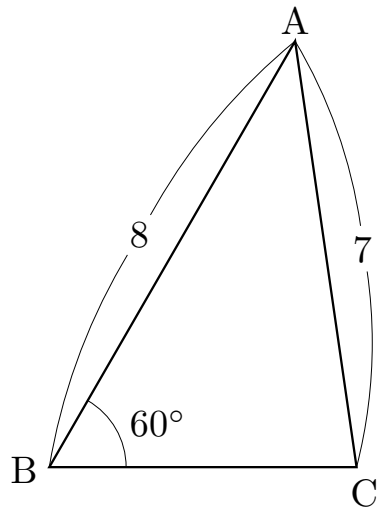
例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 8$ かつ $\overline{AC} = 7$ かつ $\angle ABC = 60^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求める.



例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = 8$ かつ $\overline{AC} = 7$ かつ $\angle ABC = 60^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求める.

余弦定理より

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC .$$



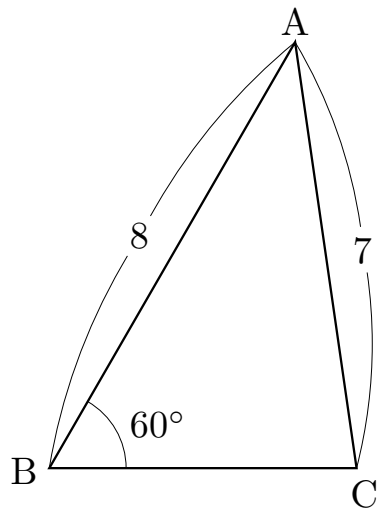
例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 8$ かつ $\overline{AC} = 7$ かつ $\angle ABC = 60^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求める.

余弦定理より

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC .$$

$a = \overline{BC}$ とおく.

$$7^2 = a^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot a \cdot \cos 60^\circ ,$$



例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = 8$ かつ $\overline{AC} = 7$ かつ $\angle ABC = 60^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求める.

余弦定理より

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC .$$

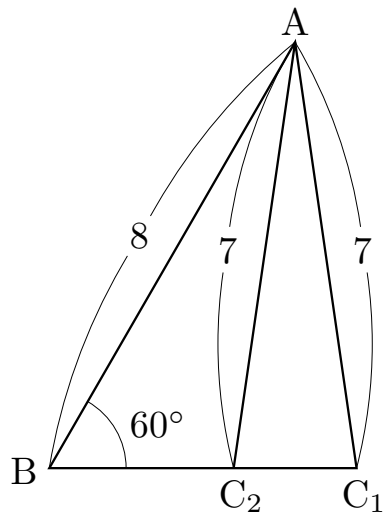
$a = \overline{BC}$ とおく.

$$7^2 = a^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot a \cdot \cos 60^\circ ,$$

$$a^2 - 8a + 15 = 0 ,$$

$$(a - 3)(a - 5) = 0 ,$$

$$a = 3 \text{ または } a = 5 ,$$



例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 8$ かつ $\overline{AC} = 7$ かつ $\angle ABC = 60^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求める.

余弦定理より

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC .$$

$a = \overline{BC}$ とおく.

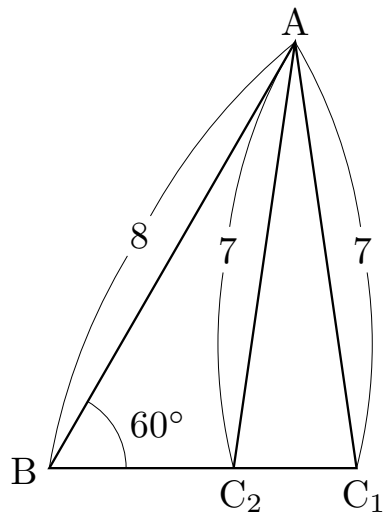
$$7^2 = a^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot a \cdot \cos 60^\circ ,$$

$$a^2 - 8a + 15 = 0 ,$$

$$(a - 3)(a - 5) = 0 ,$$

$$a = 3 \text{ または } a = 5 ,$$

つまり $\overline{BC} = 3$ または $\overline{BC} = 5$. どちらの場合もあり得る.



終

問6.8.4 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 5$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{13}$ かつ $\angle BAC = 45^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求めよ.

余弦定理より

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \overline{AB} \overline{AC} \cos \angle BAC .$$

$b = \overline{AC}$ とおく.

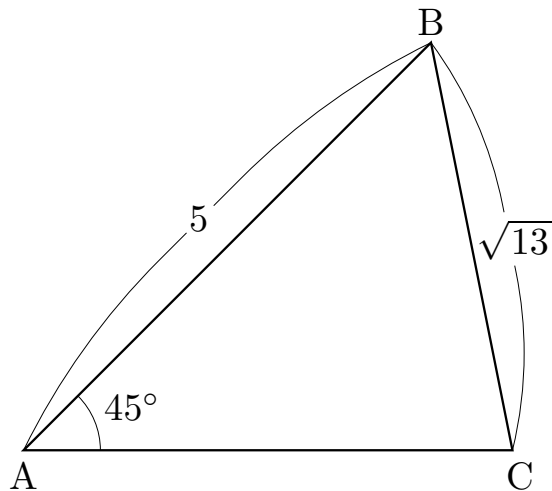
$$= 5^2 + b^2 - 2 \cdot 5 \cdot b \cdot \cos 45^\circ ,$$

$$= 0 ,$$

$$b = \frac{5 \pm 5\sqrt{2}}{2} ,$$

$$b = \frac{5 + 5\sqrt{2}}{2} \quad \text{または} \quad b = \frac{5 - 5\sqrt{2}}{2} .$$

つまり $\overline{AC} = \frac{5 + 5\sqrt{2}}{2}$ または $\overline{AC} = \frac{5 - 5\sqrt{2}}{2}$.



問6.8.4 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 5$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{13}$ かつ $\angle BAC = 45^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求めよ.

余弦定理より

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \cos \angle BAC .$$

$b = \overline{AC}$ とおく.

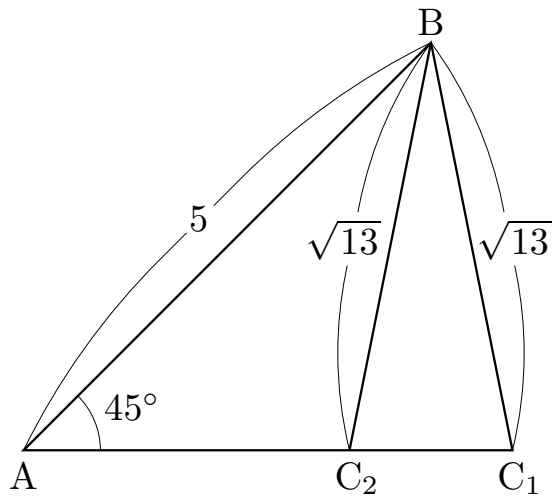
$$13 = b^2 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot b \cdot \cos 45^\circ ,$$

$$b^2 - 5\sqrt{2}b + 12 = 0 ,$$

$$b = \frac{5\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} ,$$

$$b = 2\sqrt{2} \text{ または } b = 3\sqrt{2} .$$

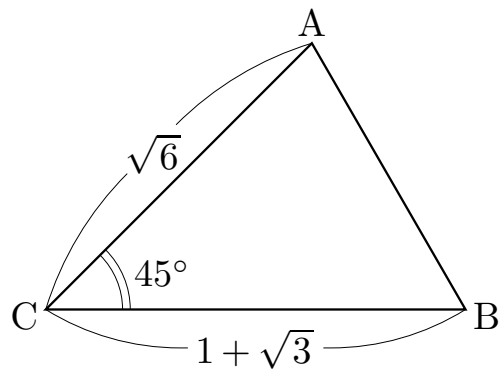
つまり $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$ または $\overline{AC} = 3\sqrt{2}$. どちらの場合もあり得る.



終

例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AC} = \sqrt{6}$ かつ $\overline{BC} = 1 + \sqrt{3}$ かつ $\angle ACB = 45^\circ$ とする. 角 $\angle ABC$ の大きさを求める.

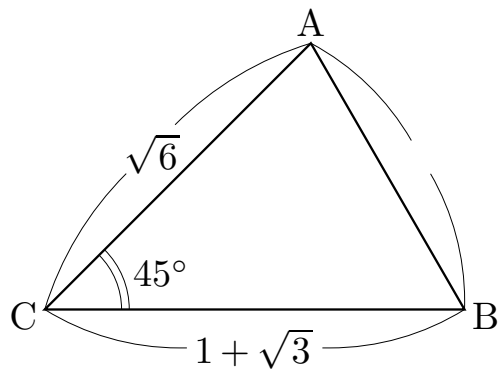
例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AC} = \sqrt{6}$ かつ $\overline{BC} = 1 + \sqrt{3}$ かつ $\angle ACB = 45^\circ$ とする. 角 $\angle ABC$ の大きさを求める.



例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AC} = \sqrt{6}$ かつ $\overline{BC} = 1 + \sqrt{3}$ かつ $\angle ACB = 45^\circ$ とする. 角 $\angle ABC$ の大きさを求める.

余弦定理より

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\overline{BC}\cos\angle ACB$$

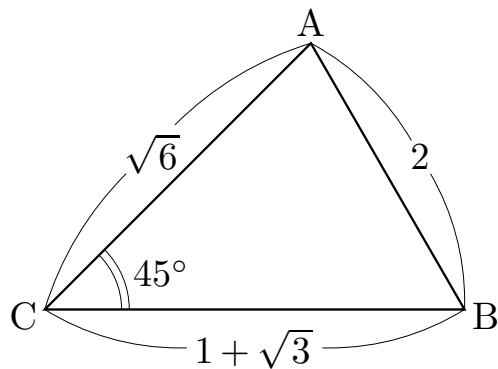


例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AC} = \sqrt{6}$ かつ $\overline{BC} = 1 + \sqrt{3}$ かつ $\angle ACB = 45^\circ$ とする. 角 $\angle ABC$ の大きさを求める.

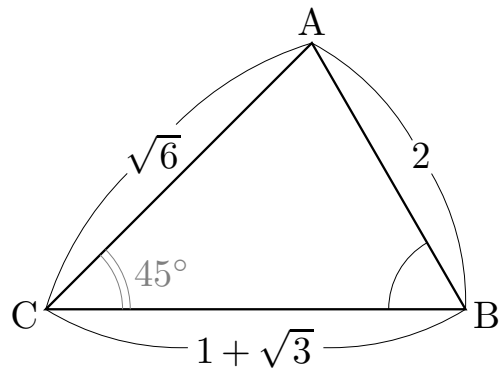
余弦定理より

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\overline{BC}\cos\angle ACB \\ &= \sqrt{6}^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3})\cos 45^\circ \\ &= 6 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3})\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 10 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 6 \\ &= 4,\end{aligned}$$

よって $\overline{AB} = \sqrt{4} = 2$.

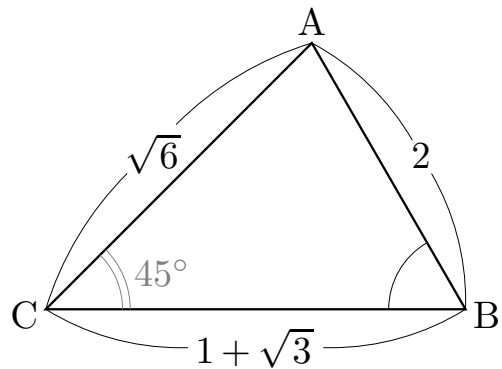


$$\overline{AB} = 2 .$$



$\overline{AB} = 2$. 余弦定理より,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC ,$$



$\overline{AB} = 2$. 余弦定理より,

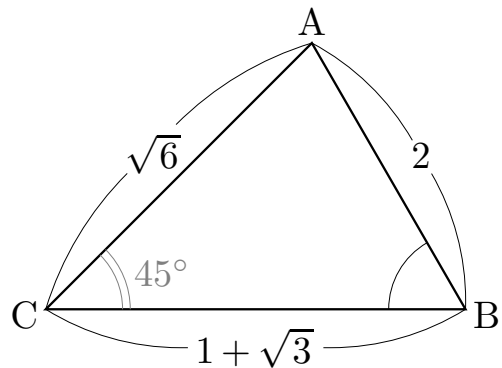
$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC ,$$

$$\sqrt{6}^2 = 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2(1 + \sqrt{3}) \cos \angle ABC ,$$

$$6 = 4 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4(1 + \sqrt{3}) \cos \angle ABC ,$$

$$4(1 + \sqrt{3}) \cos \angle ABC = 2 + 2\sqrt{3} ,$$

$$\cos \angle ABC = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2} ,$$



$\overline{AB} = 2$. 余弦定理より,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC}\cos\angle ABC ,$$

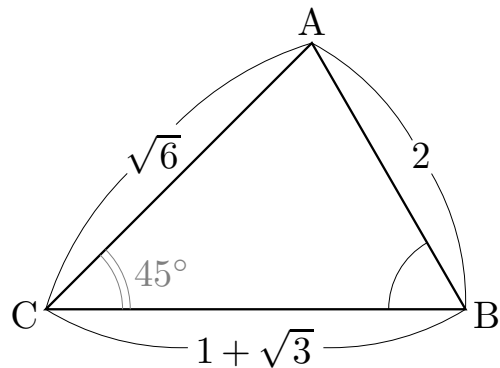
$$\sqrt{6}^2 = 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2(1 + \sqrt{3})\cos\angle ABC ,$$

$$6 = 4 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4(1 + \sqrt{3})\cos\angle ABC ,$$

$$4(1 + \sqrt{3})\cos\angle ABC = 2 + 2\sqrt{3} ,$$

$$\cos\angle ABC = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2} ,$$

$0^\circ \leq \angle ABC \leq 180^\circ$ **なので** $\angle ABC = 60^\circ$.



$\overline{AB} = 2$. 正弦定理より,

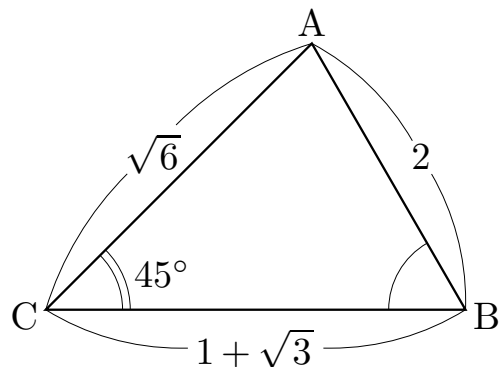
$$\frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} ,$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin \angle ABC} = \frac{2}{\sin 45^\circ} ,$$

$$\frac{\sin \angle ABC}{\sqrt{6}} = \frac{\sin 45^\circ}{2} ,$$

$$\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{6}}{2} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

よって $\angle ABC = 60^\circ$ または $\angle ABC = 120^\circ$.



$\overline{AB} = 2$. 正弦定理より,

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} ,$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin \angle ABC} = \frac{2}{\sin 45^\circ} ,$$

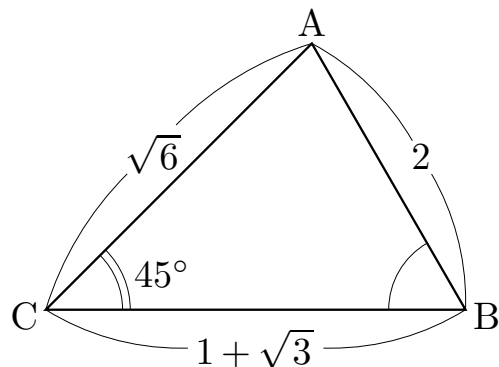
$$\frac{\sin \angle ABC}{\sqrt{6}} = \frac{\sin 45^\circ}{2} ,$$

$$\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{6}}{2} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

よって $\angle ABC = 60^\circ$ または $\angle ABC = 120^\circ$.

このように, 三角形の内角の角度は, 余弦定理を用いると唯一つに定められる場合でも正弦定理を用いると唯一つに定められないことがある.

終



問6.8.5 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AC} = 2$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{3} - 1$ かつ $\angle ACB = 120^\circ$ とする. 角 $\angle ABC$ の大きさを求めよ.

$$\cos 120^\circ = \cos(\quad^\circ + 90^\circ) = \quad = \quad .$$

余弦定理より

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \overline{AC} \overline{BC} \cos \angle C$$

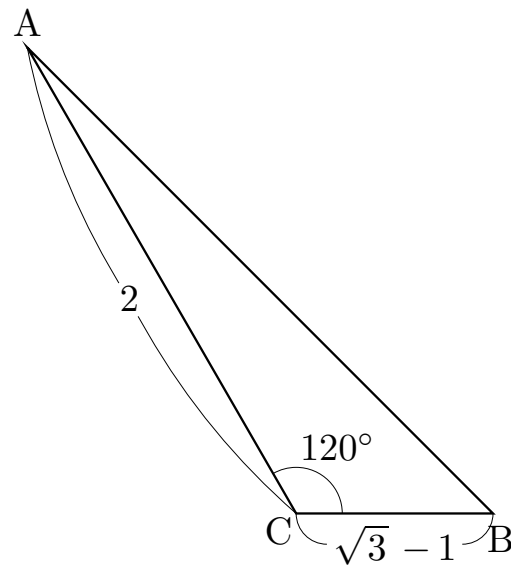
$$= 2^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \cos 120^\circ$$

$$=$$

$$=$$

$$= \quad ,$$

よって $\overline{AB} = \quad .$



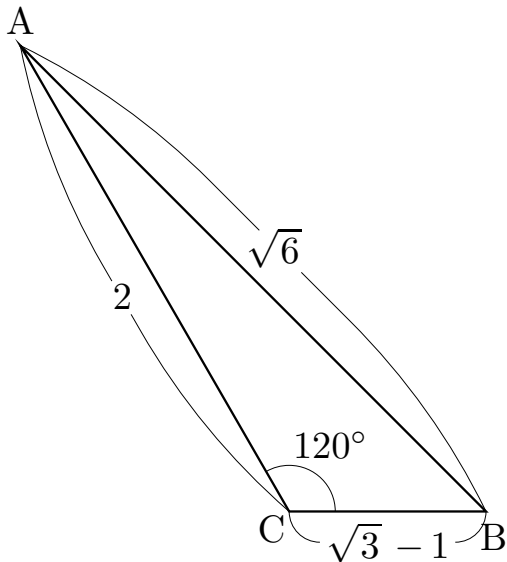
問6.8.5 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AC} = 2$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{3} - 1$ かつ $\angle ACB = 120^\circ$ とする. 角 $\angle ABC$ の大きさを求めよ.

$$\cos 120^\circ = \cos(30^\circ + 90^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} .$$

余弦定理より

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\overline{BC}\cos\angle ACB \\ &= 2^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} - 1)\cos 120^\circ \\ &= 4 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 - 4(\sqrt{3} - 1)\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 8 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 \\ &= 6 ,\end{aligned}$$

よって $\overline{AB} = \sqrt{6}$.



$\overline{AB} = \sqrt{6}$. 余弦定理より

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC ,$$

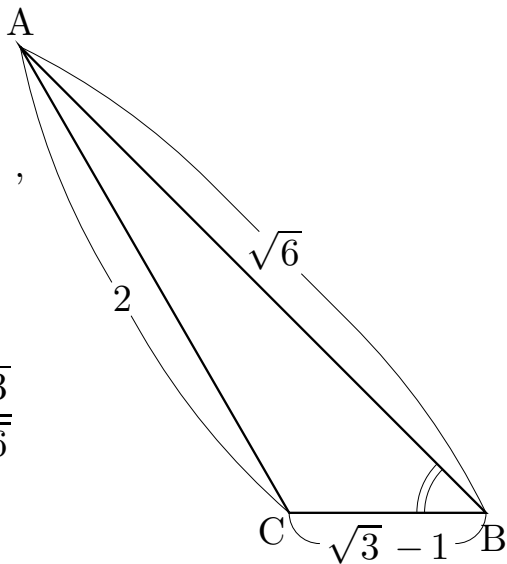
$$2^2 = \sqrt{6}^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1) \cos \angle ABC ,$$

$$4 = 6 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1) \cos \angle ABC ,$$

$$2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1) \cos \angle ABC = 2(3 - \sqrt{3}) ,$$

$$\begin{aligned} \cos \angle ABC &= \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} , \end{aligned}$$

$0^\circ \leq \angle ABC \leq 180^\circ$ なので $\angle ABC = 45^\circ$.



終

例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = 4$ かつ $\overline{AC} = 5$ かつ $\overline{BC} = 7$ とする. 角 BAC の大きさ $\angle BAC$ の余
弦 $\cos \angle BAC$ を求め, 角 BAC の大きさ $\angle BAC$ の正弦 $\sin \angle BAC$ を求め, 三
角形 ABC の面積を求める.

例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = 4$ かつ $\overline{AC} = 5$ かつ $\overline{BC} = 7$ とする. 角 BAC の大きさ $\angle BAC$ の余弦 $\cos \angle BAC$ を求め, 角 BAC の大きさ $\angle BAC$ の正弦 $\sin \angle BAC$ を求め, 三角形 ABC の面積を求める.

余弦定理より $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC}\cos \angle BAC$ なので,

$$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos \angle BAC ,$$

$$40 \cos \angle BAC = 8 ,$$

$$\cos \angle BAC = \frac{1}{5} .$$

例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = 4$ かつ $\overline{AC} = 5$ かつ $\overline{BC} = 7$ とする. 角 BAC の大きさ $\angle BAC$ の余弦 $\cos \angle BAC$ を求め, 角 BAC の大きさ $\angle BAC$ の正弦 $\sin \angle BAC$ を求め, 三角形 ABC の面積を求め.

余弦定理より $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC}\cos \angle BAC$ なので,

$$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos \angle BAC ,$$

$$40 \cos \angle BAC = 8 ,$$

$$\cos \angle BAC = \frac{1}{5} .$$

$(\sin \angle BAC)^2 + (\cos \angle BAC)^2 = 1$ なので,

$$(\sin \angle BAC)^2 = 1 - (\cos \angle BAC)^2 = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25} .$$

$0^\circ \leq \angle BAC \leq 180^\circ$ なので $\sin \angle BAC \geq 0$, よって

$$\sin \angle BAC = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5} .$$

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2} \overline{ABAC} \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6} .$$

終

問6.8.6 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = 4$ かつ $\overline{AC} = 7$ かつ $\overline{BC} = 9$ とする.

- (1) 角 BAC の大きさ $\angle BAC$ の余弦 $\cos \angle BAC$ を求めよ.
- (2) 角 BAC の大きさ $\angle BAC$ の正弦 $\sin \angle BAC$ を求めよ.
- (3) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(1) 余弦定理より

$$32 - 16 - 499^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cos \angle BAC ,$$

$$\cos \angle BAC = \frac{-16}{2 \cdot 4 \cdot 7} = -\frac{2}{7} .$$

(2)

$$(\sin \angle BAC)^2 = 1 - (\cos \angle BAC)^2 = 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{45}{49} ,$$

$0^\circ \leq \angle BAC \leq 180^\circ$ より $\sin \angle BAC \geq 0$ なので, $\sin \angle BAC = \sqrt{\frac{45}{49}} = \frac{\sqrt{45}}{7} .$

(3) 三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2} \overline{AB} \overline{AC} \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{45}}{7} = 2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5} .$$