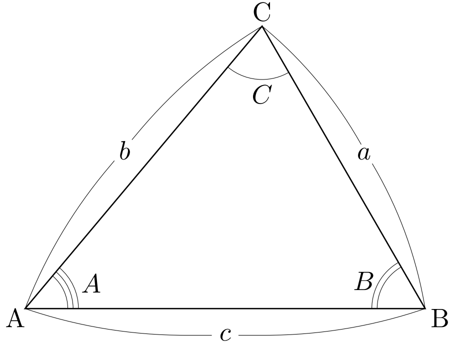
6.8 余弦定理

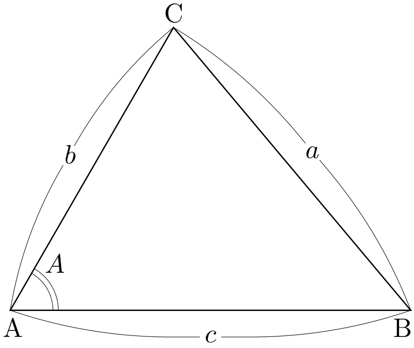
平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，辺の長さ及び角の大きさを次のようにおくことが多い：

$$a = \overline{\mathrm{BC}}\ , \qquad b = \overline{\mathrm{AC}}\ , \qquad c = \overline{\mathrm{AB}}\ ,$$

$$A = \angle\mathrm{BAC}\ , \qquad B = \angle\mathrm{ABC}\ , \qquad C = \angle\mathrm{ACB}\ .$$



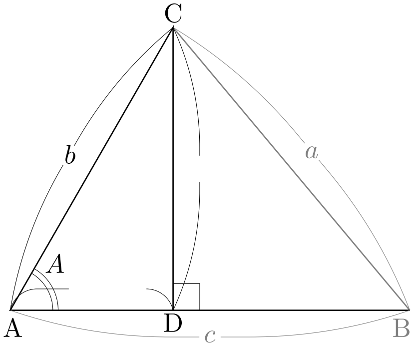
三角形 ABC において $A=\angle \mathrm{BAC}$, $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$, $c=\overline{\mathrm{AB}}$ とおく.
角 BAC と角 ABC とが鋭角であるとする.



　三角形 ABC において $A=\angle\mathrm{BAC}$, $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$, $c=\overline{\mathrm{AB}}$ とおく．角 BAC と角 ABC とが鋭角であるとする．頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角なので，

$$\overline{\mathrm{CD}}= \qquad\qquad ,$$

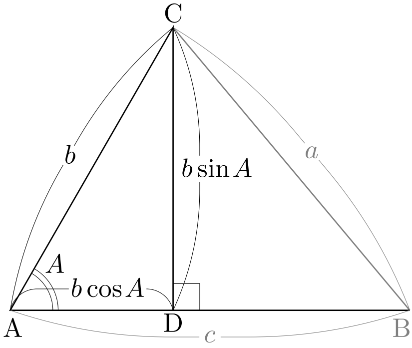
$$\overline{\mathrm{AD}}= \qquad\qquad .$$



三角形 ABC において $A=\angle\mathrm{BAC}$, $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$, $c=\overline{\mathrm{AB}}$ とおく．角 BAC と角 ABC とが鋭角であるとする．頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角なので，

$$\overline{\mathrm{CD}}=b\sin A\ ,$$

$$\overline{\mathrm{AD}}=b\cos A\ ,$$

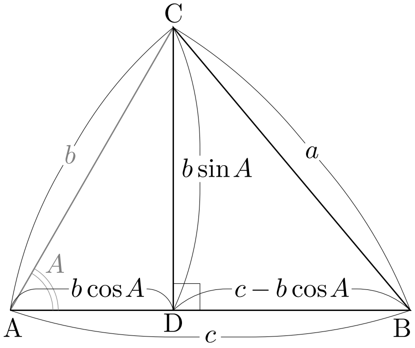


三角形 ABC において $A = \angle \mathrm{BAC}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ とおく. 角 BAC と角 ABC とが鋭角であるとする. 頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角なので,

$$\overline{\mathrm{CD}} = b \sin A \ ,$$

$$\overline{\mathrm{AD}} = b \cos A \ ,$$

$$\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{AB}} - \overline{\mathrm{AD}} = c - b \cos A \ .$$

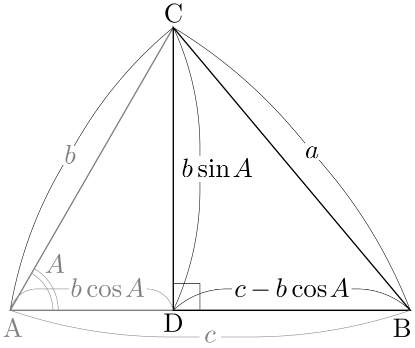


三角形 ABC において $A=\angle\mathrm{BAC}$, $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$, $c=\overline{\mathrm{AB}}$ とおく．角 BAC と角 ABC とが鋭角であるとする．頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角なので，

$$\overline{\mathrm{CD}}=b\sin A\ ,$$

$$\overline{\mathrm{AD}}=b\cos A\ ,$$

$$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AD}}=c-b\cos A\ ,$$



直角三角形 BCD において，

$$a^2=\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2$$

三角形 ABC において $A=\angle\mathrm{BAC}$, $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$, $c=\overline{\mathrm{AB}}$ とおく．角 BAC と角 ABC とが鋭角であるとする．頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角なので，

$$\overline{\mathrm{CD}}=b\sin A\ ,$$

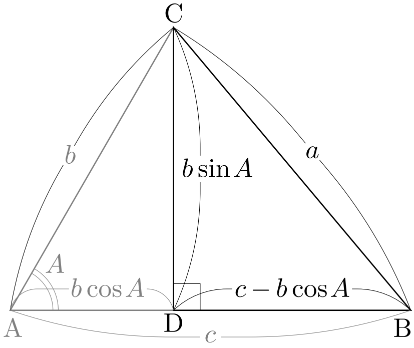
$$\overline{\mathrm{AD}}=b\cos A\ ,$$

$$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AD}}=c-b\cos A\ ,$$

直角三角形 BCD において，

$$a^2=\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2$$

$$=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2$$

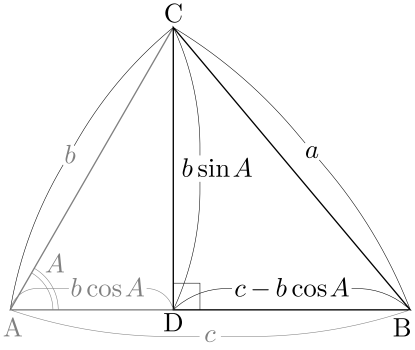


三角形 ABC において $A=\angle\mathrm{BAC}$, $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$, $c=\overline{\mathrm{AB}}$ とおく. 角 BAC と角 ABC とが鋭角であるとする. 頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角なので,

$$\overline{\mathrm{CD}}=b\sin A\ ,$$

$$\overline{\mathrm{AD}}=b\cos A\ ,$$

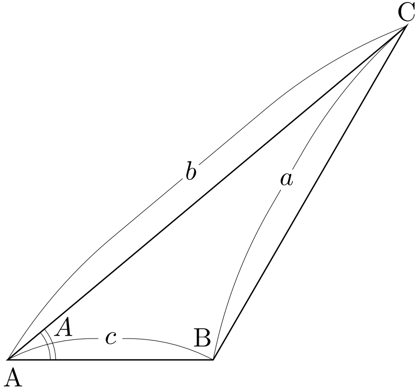
$$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AD}}=c-b\cos A\ .$$



直角三角形 BCD において,

$$\begin{aligned}
a^2&=\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2\\
&=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2\\
&=b^2(\sin A)^2+c^2-2bc\cos A+b^2(\cos A)^2\\
&=b^2\{(\sin A)^2+(\cos A)^2\}+c^2-2bc\cos A\\
&=b^2+c^2-2bc\cos A\ .
\end{aligned}$$

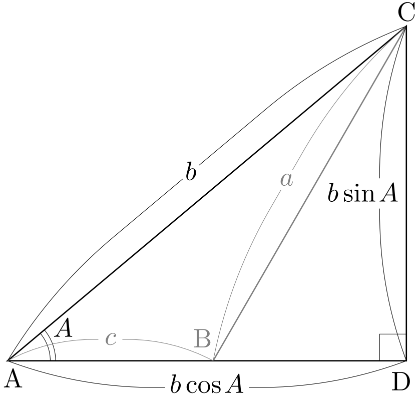
三角形 ABC において $A = \angle \mathrm{BAC}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ とおく.
角 ABC が鈍角であるとする.



三角形 ABC において $A = \angle\mathrm{BAC}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ とおく．角 ABC が鈍角であるとする．頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角なので，

$$\overline{\mathrm{CD}} = b\sin A \ ,$$

$$\overline{\mathrm{AD}} = b\cos A \ ,$$

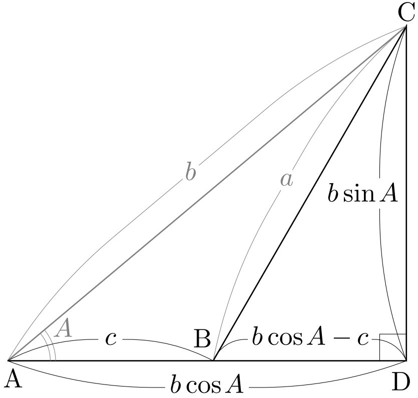


三角形 ABC において $A = \angle\mathrm{BAC}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ とおく．角 ABC が鈍角であるとする．頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角なので，

$$\overline{\mathrm{CD}} = b\sin A \ ,$$

$$\overline{\mathrm{AD}} = b\cos A \ ,$$

$$\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{AD}} - \overline{\mathrm{AB}} = b\cos A - c \ .$$



　三角形 ABC において $A=\angle\mathrm{BAC}$, $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$, $c=\overline{\mathrm{AB}}$ とおく．角 ABC が鈍角であるとする．頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角なので，

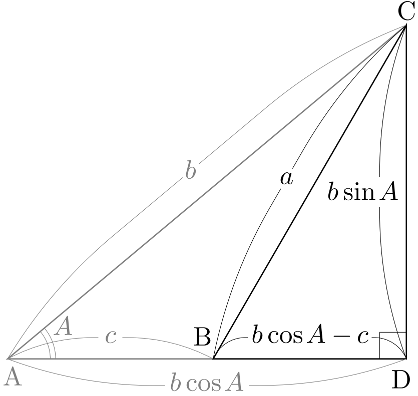
$$\overline{\mathrm{CD}}=b\sin A\ ,$$

$$\overline{\mathrm{AD}}=b\cos A\ ,$$

$$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{AB}}=b\cos A-c\ .$$

直角三角形 BCD において，

$a^2=\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2$

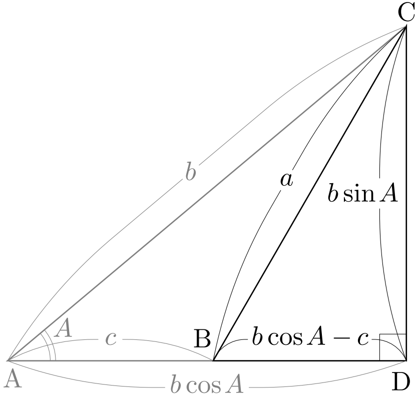


三角形 ABC において $A = \angle\mathrm{BAC}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ とおく．角 ABC が鈍角であるとする．頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角なので，

$$\overline{\mathrm{CD}} = b\sin A \ ,$$

$$\overline{\mathrm{AD}} = b\cos A \ ,$$

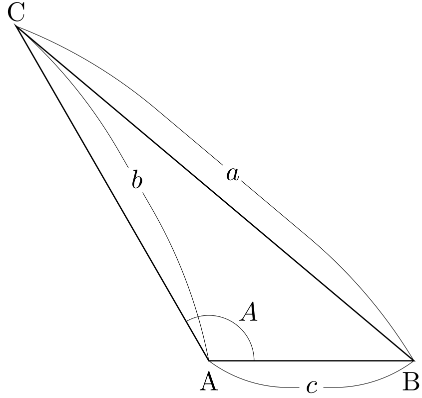
$$\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{AD}} - \overline{\mathrm{AB}} = b\cos A - c \ .$$



直角三角形 BCD において，

$$\begin{aligned}
a^2 &= \overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{BD}}^2 \\
&= (b\sin A)^2 + (b\cos A - c)^2 \\
&= b^2(\sin A)^2 + b^2(\cos A)^2 - 2bc\cos A + c^2 \\
&= b^2\{(\sin A)^2 + (\cos A)^2\} + c^2 - 2bc\cos A \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \ .
\end{aligned}$$

三角形 ABC において $A = \angle \mathrm{BAC}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ とおく. 角 BAC が鈍角であるとする.



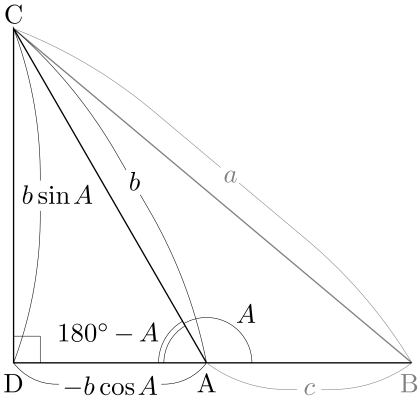
三角形 ABC において $A = \angle\mathrm{BAC}$，$a = \overline{\mathrm{BC}}$，$b = \overline{\mathrm{AC}}$，$c = \overline{\mathrm{AB}}$ とおく．角 BAC が鈍角であるとする．頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角で，$\angle\mathrm{CAD} = 180^\circ - A$ なので，

$$\overline{\mathrm{CD}} = b\sin(180^\circ - A) = b\sin A\ ,$$

$$\overline{\mathrm{AD}} = b\cos(180^\circ - A) = -b\cos A\ ,$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

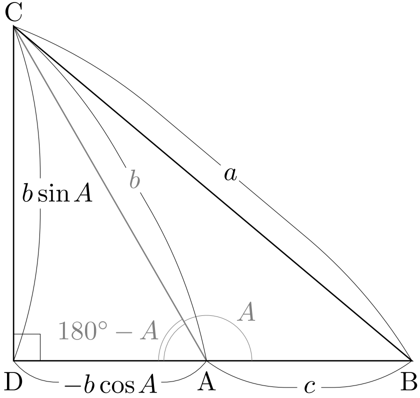


三角形 ABC において $A = \angle\mathrm{BAC}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ とおく．角 BAC が鈍角であるとする．頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角で， $\angle\mathrm{CAD} = 180^\circ - A$ なので，

$$\overline{\mathrm{CD}} = b\sin(180^\circ - A) = b\sin A \ ,$$

$$\overline{\mathrm{AD}} = b\cos(180^\circ - A) = -b\cos A \ ,$$

$$\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AD}} = c - b\cos A \ .$$

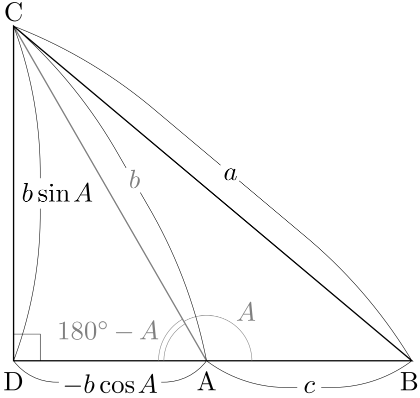


三角形 ABC において $A = \angle\mathrm{BAC}$, $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ とおく．角 BAC が鈍角であるとする．頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角で，$\angle\mathrm{CAD} = 180^\circ - A$ なので，

$$\overline{\mathrm{CD}} = b\sin(180^\circ - A) = b\sin A \ ,$$

$$\overline{\mathrm{AD}} = b\cos(180^\circ - A) = -b\cos A \ ,$$

$$\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AD}} = c - b\cos A \ .$$



直角三角形 BCD において，

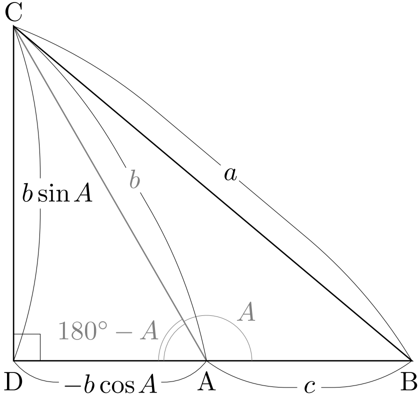
$a^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{BD}}^2$

三角形 ABC において $A=\angle\mathrm{BAC}$, $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$, $c=\overline{\mathrm{AB}}$ とおく．角 BAC が鈍角であるとする．頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 ACD において，角 ADC が直角で，$\angle\mathrm{CAD}=180^\circ-A$ なので，

$$\overline{\mathrm{CD}}=b\sin(180^\circ-A)=b\sin A\ ,$$

$$\overline{\mathrm{AD}}=b\cos(180^\circ-A)=-b\cos A\ ,$$

$$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}}=c-b\cos A\ .$$



直角三角形 BCD において，

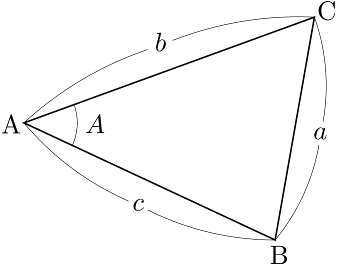
$$\begin{aligned}a^2&=\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2\\&=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2\\&=b^2(\sin A)^2+c^2-2bc\cos A+b^2(\cos A)^2\\&=b^2\{(\sin A)^2+(\cos A)^2\}+c^2-2bc\cos A\\&=b^2+c^2-2bc\cos A\ .\end{aligned}$$

定理（余弦定理）　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，

$\overline{\mathrm{AB}} = c$ ，　$\overline{\mathrm{BC}} = a$ ，　$\overline{\mathrm{CA}} = b$ ，　$\angle \mathrm{BAC} = A$

とおくと，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \ .$$



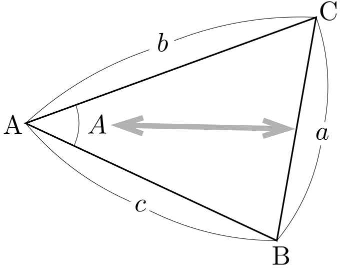
平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において,

$$\overline{\mathrm{AB}} = c\ ,\quad \overline{\mathrm{BC}} = a\ ,\quad \overline{\mathrm{CA}} = b\ ,\quad \angle\mathrm{BAC} = A$$

とおくときの余弦定理の公式

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

において, 左辺に含まれる辺の長さ a は右辺に現れる角度 A の角 BAC の向かいの辺 BC の長さである.

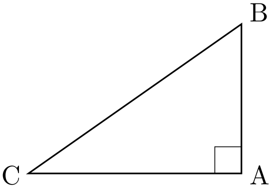


相異なる3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において，余弦定理により，

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC}\ .$$

相異なる3点 $\mathrm{A,B,C}$ を頂点とする三角形 ABC において，余弦定理により，

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC} \ .$$



ここで，角 BAC が直角であるとすると，

$\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$ より $\cos\angle\mathrm{BAC} = \cos 90^\circ = 0$

なので，

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 \ .$$

これはピタゴラスの定理（三平方の定理）である．このように，ピタゴラスの定理は余弦定理の特殊な場合である．

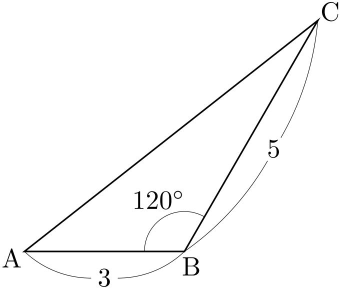
平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において，余弦定理により，例えば $\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC}$ ．このように，余弦定理は三角形の 3 辺の長さと 1 個の角の大きさとの間の関係を述べる.

平面上の相異なる3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において，余弦定理により，例えば $\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC}$ ．このように，余弦定理は三角形の3辺の長さと1個の角の大きさとの間の関係を述べる．なので，余弦定理によって次のような計算ができる．

・三角形の2辺の長さと1個の角の大きさとから他の辺の長さを求める．

・三角形の3辺の長さから角の大きさを求める．

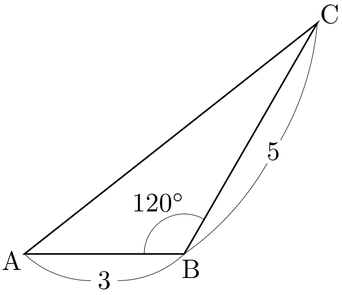
$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
$\overline{\mathrm{AB}} = 3$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 5$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 120^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.



$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，
$\overline{\mathrm{AB}} = 3$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 5$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 120^\circ$ とする．辺 AC の長さを求める．

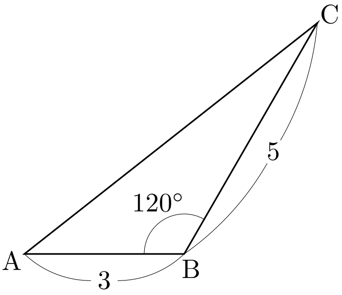
$$\begin{aligned}\cos 120^\circ &= \cos(30^\circ + 90^\circ) = -\sin 30^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$

$\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$



$\boxed{例}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，
$\overline{\mathrm{AB}} = 3$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 5$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 120^\circ$ とする．辺 AC の長さを求める．

$$\begin{aligned}\cos 120^\circ &= \cos(30^\circ + 90^\circ) = -\sin 30^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$

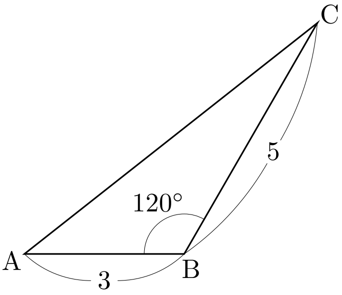


余弦定理により

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\ \overline{\mathrm{BC}} \cos\angle\mathrm{ABC}$$

例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 3$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 5$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 120^\circ$ とする．辺 AC の長さを求める．

$$\cos 120^\circ = \cos(30^\circ + 90^\circ) = -\sin 30^\circ$$
$$= -\frac{1}{2}\ .$$



余弦定理により

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\ \overline{\mathrm{BC}} \cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$= 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos 120^\circ$$
$$= 9 + 25 - 30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= 49\ .$$

$\overline{\mathrm{AC}} \geq 0$ なので $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{49} = 7$ ． 終

$\boxed{問6.8.1}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AB}} = 4$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 30°$ とする. 辺 BC の長さを求めよ.

余弦定理により

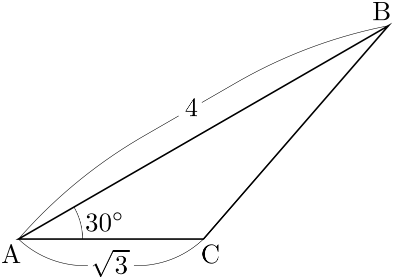
$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{}^2 + \overline{}^2 - 2\,\overline{}\;\overline{}\cos\angle$$

$$= \quad{}^2 + \qquad{}^2 - 2\cdot\quad\cdot\qquad\cdot\cos$$

$$=$$

$$= \quad ,$$

$\overline{\mathrm{BC}} \geq 0$ なので $\overline{\mathrm{BC}} =$.

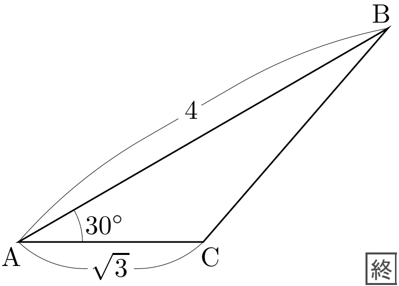


$\boxed{問6.8.1}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 4$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 30^\circ$ とする．辺 BC の長さを求めよ．

余弦定理により

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BC}}^2 &= \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC} \\ &= 4^2 + \sqrt{3}^2 - 2\cdot 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ \\ &= 16 + 3 - 8\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 7\ ,\end{aligned}$$

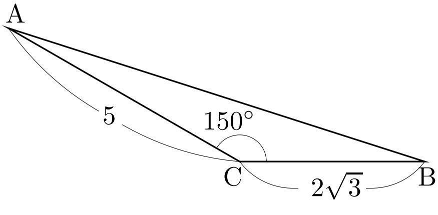
$\overline{\mathrm{BC}} \geq 0$ なので $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{7}$ ．



$\boxed{終}$

$\boxed{問6.8.2}$ 平面上の相異なる3点 $\mathrm{A, B, C}$ を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AC}} = 5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 150^\circ$ とする. 辺 AB の長さを求めよ.

$$\cos 150^\circ = \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$



余弦定理により

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\quad}^2 + \overline{\quad}^2 - 2\,\overline{\quad}\;\overline{\quad}\cos\angle$$

$$= \quad{}^2 + \qquad\quad{}^2 - 2\cdot\quad\cdot\qquad\cdot\cos$$

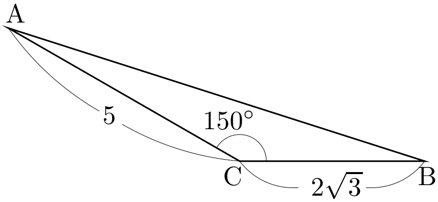
$$=$$

$$= \quad ,$$

$\overline{\mathrm{AB}} \geq 0$ なので $\overline{\mathrm{AB}} = \qquad\quad .$

$\boxed{\text{問}6.8.2}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AC}} = 5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 150^\circ$ とする. 辺 AB の長さを求めよ.

$$\cos 150^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

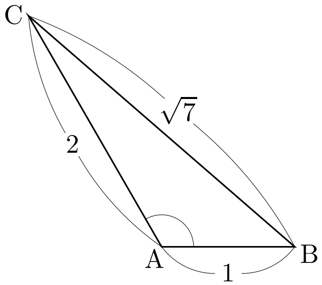


余弦定理により

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{AB}}^2 &= \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AC}}\ \overline{\mathrm{BC}} \cos\angle\mathrm{ACB} \\
&= 5^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 150^\circ \\
&= 25 + 12 - 20\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 67 \ ,
\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AB}} \geq 0$ なので $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{67}$. $\boxed{\text{終}}$

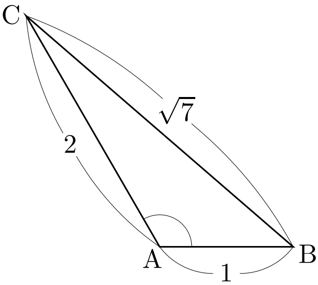
$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A,B,C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 1$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 2$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{7}$ とする．角 BAC の大きさを求める．



$\boxed{例}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 1$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 2$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{7}$ とする．角 BAC の大きさを求める．

余弦定理により

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC}\ .$$

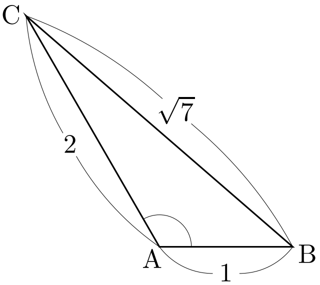


$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，

$\overline{\mathrm{AB}}=1$ かつ $\overline{\mathrm{AC}}=2$ かつ $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{7}$ とする．角 BAC の大きさを求める．

余弦定理により

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC}\ .$$



よって，

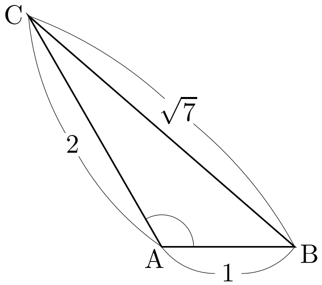
$$\sqrt{7}^{\,2}=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos\angle\mathrm{BAC}\ ,$$

$$4\cos\angle\mathrm{BAC}=-2\ ,$$

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=-\frac{1}{2}\ ,$$

例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，
$\overline{\mathrm{AB}}=1$ かつ $\overline{\mathrm{AC}}=2$ かつ $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{7}$ とする．角 BAC の大きさを求める．
余弦定理により

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC}\ .$$



よって，

$$\sqrt{7}^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos\angle\mathrm{BAC}\ ,$$

$$4\cos\angle\mathrm{BAC}=-2\ ,$$

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=-\frac{1}{2}\ ,$$

$0^\circ \leq \angle\mathrm{BAC} \leq 180^\circ$ なので $\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$ ．

終

$\boxed{\text{問}6.8.3}$ 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AB}} = 3\sqrt{3}$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 7$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 2$ とする. 角 ABC の大きさを求めよ.

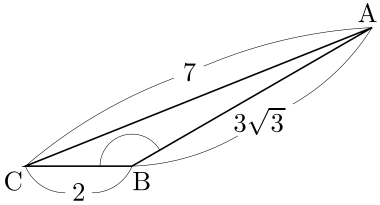
余弦定理により,

$$\overline{\qquad}^2 = \overline{\qquad}^2 + \overline{\qquad}^2 - 2\,\overline{\qquad}\;\overline{\qquad}\cos\angle \mathrm{ABC}\ ,$$

$$\quad^2 = \qquad\quad^2 + \quad^2 - 2\cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \cos\angle \mathrm{ABC}\ ,$$

$$\cos\angle \mathrm{ABC} = \qquad\qquad ,$$

$$\cos\angle \mathrm{ABC} = \qquad\qquad ,$$



$0^\circ \leq \angle \mathrm{ABC} \leq 180^\circ$ なので $\angle \mathrm{ABC} = \qquad\qquad$.

$\boxed{\text{問}6.8.3}$ 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 3\sqrt{3}$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 7$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 2$ とする．角 ABC の大きさを求めよ．

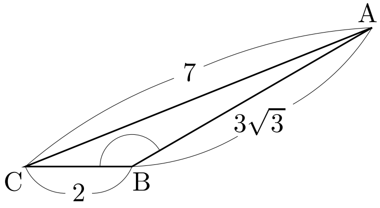
余弦定理により，

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{ABC}\ ,$$

$$7^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 - 2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cos\angle\mathrm{ABC}\ ,$$

$$12\sqrt{3}\cos\angle\mathrm{ABC} = -18\ ,$$

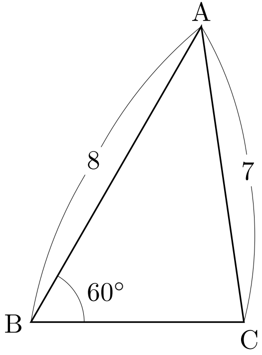
$$\cos\angle\mathrm{ABC} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$



$0^\circ \leq \angle\mathrm{ABC} \leq 180^\circ$ なので $\angle\mathrm{ABC} = 150^\circ$ ．

$\boxed{\text{終}}$

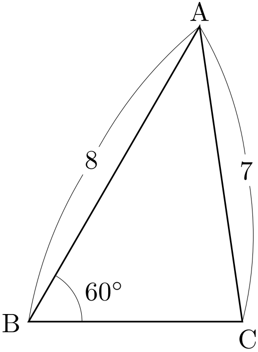
$\boxed{例}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 8$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 7$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ とする．辺 BC の長さを求める．



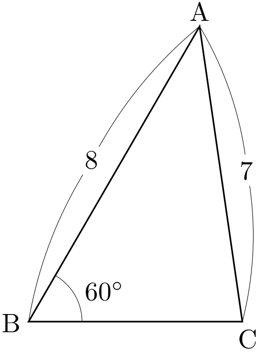
$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AB}} = 8$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 7$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求める.

余弦定理により

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{ABC}\ .$$



$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A,B,C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}}=8$ かつ $\overline{\mathrm{AC}}=7$ かつ $\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ とする．辺 BC の長さを求める．



余弦定理により

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{ABC}\ .$$

$a=\overline{\mathrm{BC}}$ とおく.

$$7^2=a^2+8^2-2\cdot 8\cdot a\cdot\cos 60^\circ\ ,$$

$\boxed{例}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A, B, C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 8$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 7$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 60°$ とする．辺 BC の長さを求める．

余弦定理により

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{ABC} \ .$$

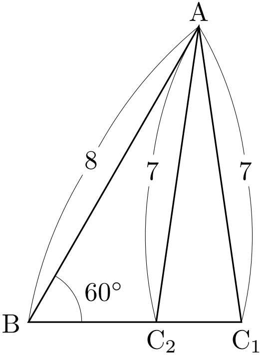
$a = \overline{\mathrm{BC}}$ とおく．

$$7^2 = a^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot a \cdot \cos 60° \ ,$$

$$a^2 - 8a + 15 = 0 \ ,$$

$$(a-3)(a-5) = 0 \ ,$$

$$a = 3 \text{ または } a = 5 \ .$$



例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}}=8$ かつ $\overline{\mathrm{AC}}=7$ かつ $\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ とする．辺 BC の長さを求める．

余弦定理により

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{ABC}\ .$$

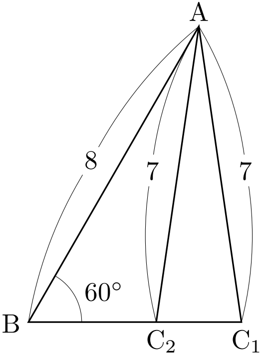
$a=\overline{\mathrm{BC}}$ とおく．

$$7^2=a^2+8^2-2\cdot 8\cdot a\cdot\cos 60^\circ\ ,$$

$$a^2-8a+15=0\ ,$$

$$(a-3)(a-5)=0\ ,$$

$$a=3 \text{ または } a=5\ .$$



つまり $\overline{\mathrm{BC}}=3$ または $\overline{\mathrm{BC}}=5$ ．どちらの場合もあり得る． 終

$\boxed{問6.8.4}$ 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AB}} = 5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{13}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求めよ.

余弦定理により

$$\overline{}^2 = \overline{}^2 + \overline{}^2 - 2\,\overline{}\;\overline{}\cos\angle\mathrm{BAC}\ .$$

$b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおく.

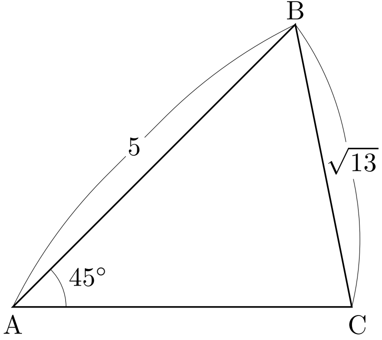
$$\quad = \quad + \quad - 2\cdot\quad\cdot\quad\cdot\cos 45^\circ\ ,$$

$$= 0\ ,$$

$$b = \frac{\quad\pm\quad}{\qquad}\ ,$$

$$b = \qquad \text{または} \quad b = \qquad .$$

つまり $\overline{\mathrm{AC}} = \qquad$ または $\overline{\mathrm{AC}} = \qquad$.



$\boxed{問6.8.4}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A, B, C}$ を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AB}} = 5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{13}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 45°$ とする. 辺 AC の長さを求めよ.

余弦定理により

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC} \ .$$

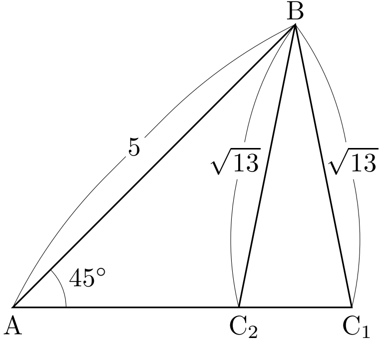
$b = \overline{\mathrm{AC}}$ とおく.

$$13 = b^2 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot b \cdot \cos 45° \ ,$$

$$b^2 - 5\sqrt{2}\,b + 12 = 0 \ ,$$

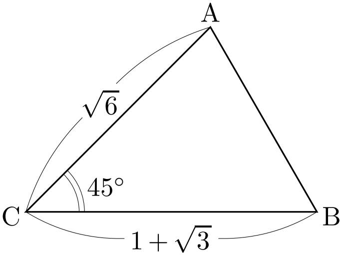
$$b = \frac{5\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} \ ,$$

$$b = 2\sqrt{2} \ \text{または} \ b = 3\sqrt{2} \ .$$



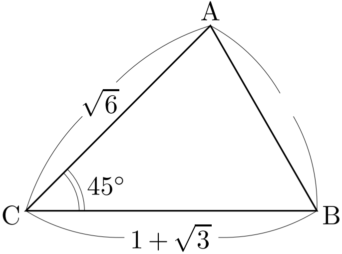
つまり $\overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{2}$ または $\overline{\mathrm{AC}} = 3\sqrt{2}$. どちらの場合もあり得る. $\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A, B, C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{6}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 1 + \sqrt{3}$ かつ $\angle \mathrm{ACB} = 45^\circ$ とする．角 $\angle \mathrm{ABC}$ の大きさを求める．



$\boxed{例}$ 平面上の相異なる3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{6}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 1 + \sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 45^\circ$ とする．角 $\angle\mathrm{ABC}$ の大きさを求める．余弦定理により

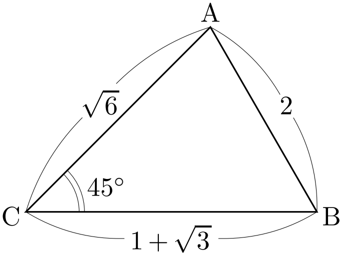
$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AC}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{ACB}$$



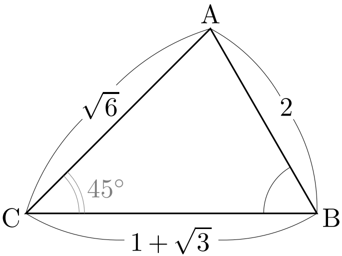
例 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{6}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 1 + \sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 45^\circ$ とする．角 $\angle\mathrm{ABC}$ の大きさを求める．余弦定理により

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{AB}}^2 &= \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AC}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{ACB} \\
&= \sqrt{6}^{\,2} + \left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{6}\left(1+\sqrt{3}\right)\cos 45^\circ \\
&= 6 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{6}\left(1+\sqrt{3}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= 10 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 6 \\
&= 4\ ,
\end{aligned}
$$

よって $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{4} = 2$ ．

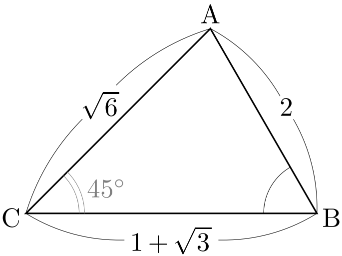


$\overline{\mathrm{AB}} = 2$.



$\overline{\mathrm{AB}} = 2$ ．余弦定理により，

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{ABC} \ ,$$



$\overline{\mathrm{AB}} = 2$ ．余弦定理により，

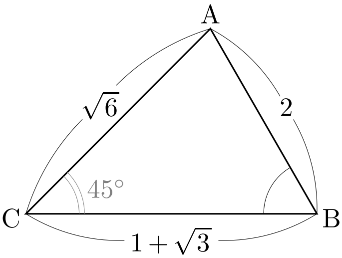
$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{ABC}\ ,$$

$$\sqrt{6}^{\,2} = 2^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot 2\left(1+\sqrt{3}\right)\cos\angle\mathrm{ABC}\ ,$$

$$6 = 4 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4\left(1+\sqrt{3}\right)\cos\angle\mathrm{ABC}\ ,$$

$$4\left(1+\sqrt{3}\right)\cos\angle\mathrm{ABC} = 2 + 2\sqrt{3}\ ,$$

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{2+2\sqrt{3}}{4\left(1+\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2}\ ,$$



$\overline{\mathrm{AB}} = 2$ ． 余弦定理により，

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}} \cos\angle\mathrm{ABC} \ ,$$

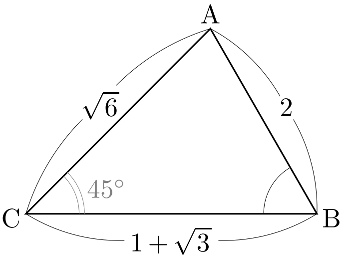
$$\sqrt{6}^{\,2} = 2^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot 2\left(1+\sqrt{3}\right)\cos\angle\mathrm{ABC} \ ,$$

$$6 = 4 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4\left(1+\sqrt{3}\right)\cos\angle\mathrm{ABC} \ ,$$

$$4\left(1+\sqrt{3}\right)\cos\angle\mathrm{ABC} = 2 + 2\sqrt{3} \ ,$$

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{2+2\sqrt{3}}{4\left(1+\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2} \ ,$$

$0^\circ \leq \angle\mathrm{ABC} \leq 180^\circ$ なので $\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ ．



$\overline{\mathrm{AB}} = 2$ ． 正弦定理により，

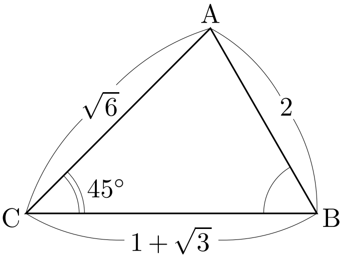
$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} \ ,$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \frac{2}{\sin 45^\circ} \ ,$$

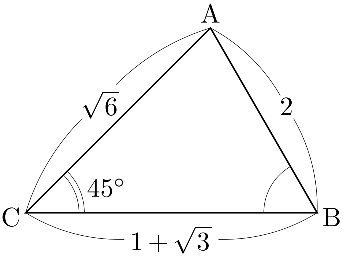
$$\frac{\sin\angle\mathrm{ABC}}{\sqrt{6}} = \frac{\sin 45^\circ}{2} \ ,$$

$$\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

よって $\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ または $\angle\mathrm{ABC} = 120^\circ$ ．



$\overline{\mathrm{AB}} = 2$ ．正弦定理により，



$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} \ ,$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \frac{2}{\sin 45^\circ} \ ,$$

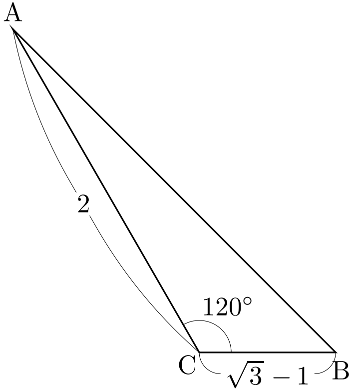
$$\frac{\sin\angle\mathrm{ABC}}{\sqrt{6}} = \frac{\sin 45^\circ}{2} \ ,$$

$$\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

よって　$\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$　または　$\angle\mathrm{ABC} = 120^\circ$ ．

　このように，三角形の内角の角度は，余弦定理を用いると唯一つに定められる場合でも正弦定理を用いると唯一つに定められないことがある．　終

$\boxed{\text{問}6.8.5}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A, B, C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AC}} = 2$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{3} - 1$ かつ $\angle \mathrm{ACB} = 120^\circ$ とする．角 $\angle \mathrm{ABC}$ の大きさを求めよ．



$\cos 120^\circ = \cos(\quad{}^\circ + 90^\circ) =$

余弦定理により

$$\overline{\quad}^2 = \overline{\quad}^2 + \overline{\quad}^2 - 2\overline{\quad}\ \overline{\quad}\cos\angle$$

$$= \ {}^2 + \qquad {}^2 - 2\cdot\ \cdot \qquad \cos$$

よって $\overline{\quad} = \qquad$.

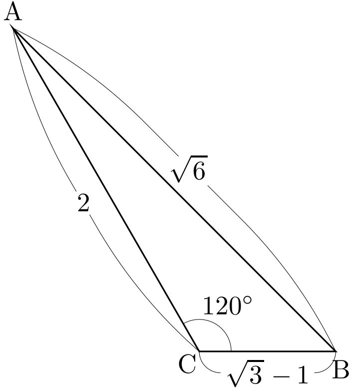
$\boxed{問6.8.5}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A,B,C}$ を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AC}}=2$ かつ $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}-1$ かつ $\angle\mathrm{ACB}=120°$ とする. 角 $\angle\mathrm{ABC}$ の大きさを求めよ.

$$\cos 120° = \cos(30°+90°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}\ .$$

余弦定理により

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{AB}}^2 &= \overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\overline{\mathrm{AC}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{ACB} \\
&= 2^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2-2\cdot 2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\cos 120° \\
&= 4+3-2\sqrt{3}+1-4\left(\sqrt{3}-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 8-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2 \\
&= 6\ ,
\end{aligned}$$

よって $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6}$.



$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6}$ ． 余弦定理により

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{ABC}\ ,$$

$$2^2=\sqrt{6}^{\,2}+\left(\sqrt{3}-1\right)^2-2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\angle\mathrm{ABC}\ ,$$

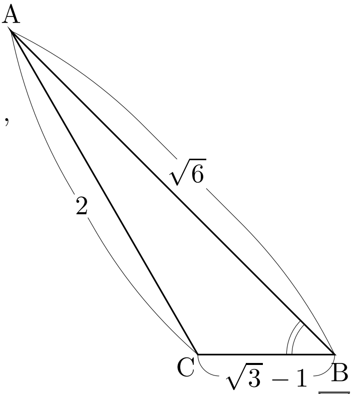
$$4=6+3-2\sqrt{3}+1-2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\angle\mathrm{ABC}\ ,$$

$$2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\angle\mathrm{ABC}=2(3-\sqrt{3})\ ,$$

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$

$0^\circ\leq\angle\mathrm{ABC}\leq 180^\circ$ なので $\angle\mathrm{ABC}=45^\circ$ ．



終

$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる3点 $\mathrm{A, B, C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 4$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 7$ とする．角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の余弦 $\cos\angle\mathrm{BAC}$ を求め，角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の正弦 $\sin\angle\mathrm{BAC}$ を求め，三角形 ABC の面積を求める．

$\boxed{例}$ 平面上の相異なる3点 $\mathrm{A,B,C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}}=4$ かつ $\overline{\mathrm{AC}}=5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}}=7$ とする．角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の余弦 $\cos\angle\mathrm{BAC}$ を求め，角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の正弦 $\sin\angle\mathrm{BAC}$ を求め，三角形 ABC の面積を求める．余弦定理により，

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC}\ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 4$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 7$ とする．角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の余弦 $\cos\angle\mathrm{BAC}$ を求め，角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の正弦 $\sin\angle\mathrm{BAC}$ を求め，三角形 ABC の面積を求める．余弦定理により，

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC}\ ,$$

$$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos\angle\mathrm{BAC}\ ,$$

$$40\cos\angle\mathrm{BAC} = 8\ ,$$

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{5}\ ,$$

$\boxed{例}$ 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AB}} = 4$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 7$ とする. 角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の余弦 $\cos\angle\mathrm{BAC}$ を求め, 角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の正弦 $\sin\angle\mathrm{BAC}$ を求め, 三角形 ABC の面積を求める. 余弦定理により,

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC}\ ,$$

$$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cos\angle\mathrm{BAC}\ ,$$

$$40\cos\angle\mathrm{BAC} = 8\ ,$$

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{5}\ ,$$

$$(\sin\angle\mathrm{BAC})^2 = 1 - (\cos\angle\mathrm{BAC})^2 = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}\ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 4$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 7$ とする．角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の余弦 $\cos\angle\mathrm{BAC}$ を求め，角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の正弦 $\sin\angle\mathrm{BAC}$ を求め，三角形 ABC の面積を求める．余弦定理により，

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\,\overline{\mathrm{AB}}\;\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC}\ ,$$

$$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cos\angle\mathrm{BAC}\ ,$$

$$40\cos\angle\mathrm{BAC} = 8\ ,$$

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{5}\ ,$$

$$(\sin\angle\mathrm{BAC})^2 = 1 - (\cos\angle\mathrm{BAC})^2 = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}\ ,$$

$0^\circ \leq \angle\mathrm{BAC} \leq 180^\circ$ より $\sin\angle\mathrm{BAC} \geq 0$ なので，

$$\sin\angle\mathrm{BAC} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5}\ .$$

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\ \overline{\mathrm{AC}}\sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{24}}{5} = \sqrt{96}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問6.8.6}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AB}} = 4$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 7$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 9$ とする.

(1) 角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の余弦 $\cos\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ.

(2) 角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の正弦 $\sin\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ.

(3) 三角形 ABC の面積を求めよ.

$\boxed{問6.8.6}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A, B, C}$ を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{\mathrm{AB}} = 4$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 7$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 9$ とする.

(1) 角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の余弦 $\cos\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ.

(2) 角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の正弦 $\sin\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ.

(3) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(1) 余弦定理により

$$9^2 = 4^2 + 7^2 - 2\cdot 4\cdot 7\cos\angle\mathrm{BAC}\ ,$$

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{-16}{2\cdot 4\cdot 7} = -\frac{2}{7}\ .$$

$\boxed{問6.8.6}$ 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A, B, C}$ を頂点とする三角形 ABC について，$\overline{\mathrm{AB}} = 4$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 7$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 9$ とする．

(1) 角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の余弦 $\cos\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ．

(2) 角 BAC の大きさ $\angle\mathrm{BAC}$ の正弦 $\sin\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ．

(3) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(1) 余弦定理により

$$9^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cos\angle\mathrm{BAC} \ ,$$

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{-16}{2 \cdot 4 \cdot 7} = -\frac{2}{7} \ .$$

(2)

$$\left(\sin\angle\mathrm{BAC}\right)^2 = 1 - (\cos\angle\mathrm{BAC})^2 = 1 - \left(-\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{45}{49} \ ,$$

$0^\circ \leq \angle\mathrm{BAC} \leq 180^\circ$ より $\sin\angle\mathrm{BAC} \geq 0$ なので，$\sin\angle\mathrm{BAC} = \sqrt{\dfrac{45}{49}} = \dfrac{\sqrt{45}}{7}$ ．

(3) 三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 7\cdot\frac{\sqrt{45}}{7} = 2\cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$