

6. 拡充 3 3 次不等式の解法

3 次不等式を解くためには, 3 次式を実数係数の範囲で因数分解することが基本になります.

例 変数 y に関する 3 次不等式 $6y^3 + y^2 - 10y + 3 > 0$ 及び $6y^3 + y^2 - 10y + 3 \geq 0$ を解く. $y = 1$ のとき $6y^3 + y^2 - 10y + 3 = 0$ なので, 因数定理より, 整式 $6y^3 + y^2 - 10y + 3$ は $y - 1$ で割り切れる:

$$6y^3 + y^2 - 10y + 3 = (y - 1)(6y^2 + 7y - 3) .$$

y に関する 2 次方程式 $6y^2 + 7y - 3 = 0$ を解くと $y = \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}$, 従って, y の 2 次式 $6y^2 + 7y - 3$ は実数係数の範囲で因数分解できて

$$6y^2 + 7y - 3 = 6\left(y - \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right) .$$

故に, y の 3 次式 $6y^3 + y^2 - 10y + 3$ を実数係数の範囲で因数分解すると

$$6y^3 + y^2 - 10y + 3 = 6(y - 1)\left(y - \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right) .$$

y の値について場合分けして, $6y^3 + y^2 - 10y + 3 = 6(y-1)\left(y - \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right)$ の値の符号を調べる.

y の値	...	$-\frac{3}{2}$	...	$\frac{1}{3}$	...	1	...
$y + \frac{3}{2}$ の値の符号	-	0	+	+	+	+	+
$y - \frac{1}{3}$ の値の符号	-	-	-	0	+	+	+
$y - 1$ の値の符号	-	-	-	-	-	0	+
$6(y-1)\left(y - \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right)$ の値の符号	-	0	+	0	-	0	+

この表より,

不等式 $6y^3 + y^2 - 10y + 3 > 0$ を解くと $-\frac{3}{2} < y < \frac{1}{3}$ または $y > 1$,

不等式 $6y^3 + y^2 - 10y + 3 \geq 0$ を解くと $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{1}{3}$ または $y \geq 1$. 終

問6.拡充3.1 変数 x に関する不等式 $x^3 + 3 \geq \frac{x}{2}(5x + 1)$ を解け.

不等式 $x^3 + 3 \geq \frac{x}{2}(5x + 1)$ を整理すると $2x^3 - 5x^2 - x + 6 \geq 0$, 左辺を因数分解すると

$$(x + 1)(x - 2)(2x - 3) \geq 0 .$$

x の値	...	-1	...	$\frac{3}{2}$	...	2	...
$x + 1$ の値の符号	-	0	+	+	+	+	+
$2x - 3$ の値の符号	-	-	-	0	+	+	+
$x - 2$ の値の符号	-	-	-	-	-	0	+
$(x + 1)(x - 2)(2x - 3)$ の値の符号	-	0	+	0	-	0	+

与えられた不等式を解くと, $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ または $x \geq 2$.

問6.拡充3.2 変数 x に関する不等式 $3x^2(x-3) < 2x(x+2)$ を解け.

不等式 $3x^2(x-3) < 2x(x+2)$ を整理すると $3x^3 - 11x^2 - 4x < 0$, 左辺を
因数分解すると

$$x(x-4)(3x+1) < 0 .$$

x の値	...	$-\frac{1}{3}$	...	0	...	4	...
$3x+1$ の値の符号	-	0	+	+	+	+	+
x の値の符号	-	-	-	0	+	+	+
$x-4$ の値の符号	-	-	-	-	-	0	+
$x(x-4)(3x+1)$ の符号	-	0	+	0	-	0	+

与えられた不等式を解くと, $x < -\frac{1}{3}$ または $0 < x < 4$.

例 変数 x に関する 3 次不等式 $x^3 - 3x - 2 > 0$ 及び $x^3 - 3x - 2 \geq 0$ を解く.
 $x = -1$ のとき $x^3 - 3x - 2 = 0$ なので, 因数定理より, 整式 $x^3 - 3x - 2$ は $x + 1$ で割り切れる:

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2).$$

更に $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ なので,

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x - 2)(x + 1) = (x + 1)^2(x - 2).$$

x の値について場合分けして, $x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$ の値の符号を調べる. この表より,

x の値	...	-1	...	2	...
$(x + 1)^2$ の値の符号	+	0	+	+	+
$x - 2$ の値の符号	-	-	-	0	+
$(x + 1)^2(x - 2)$ の値の符号	-	0	-	0	+

x に関する不等式 $x^3 - 3x - 2 > 0$ を解くと $2 < x$,

x に関する不等式 $x^3 - 3x - 2 \geq 0$ を解くと $x = -1$ または $2 \leq x$. 終

問6.拡充3.2 変数 x に関する不等式 $x(x^2 - 7) > (x + 4)(x - 3)$ を解け.

不等式 $x(x^2 - 7) > (x + 4)(x - 3)$ を整理すると

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 > 0 .$$

左辺を因数分解すると

$$(x - 2)^2(x + 3) > 0 .$$

この不等式を解くと, $x > -3$

かつ $x \neq 2$.

x の値	...	-3	...	2	...
$x + 3$ の符号	-	0	+	+	+
$(x - 2)^2$ の符号	+	+	+	0	+
$(x - 2)^2(x + 3)$ の符号	-	0	+	0	+

例 変数 u に関する 3 次不等式 $u^3 + 2u > 3(u - 2)$ を解く.

与えられた不等式 $u^3 + 2u > 3(u - 2)$ を整理すると

$$u^3 - u + 6 > 0 .$$

$u = -2$ のとき $u^3 - u + 6 = 0$ なので, 因数定理より, 整式 $u^3 - u + 6$ は $u + 2$ で割り切れる: $u^3 - u + 6 = (u + 2)(u^2 - 2u + 3)$. よって

$$(u + 2)(u^2 - 2u + 3) > 0 .$$

u に関する 2 次方程式 $u^2 - 2u + 3 = 0$ の判別式の値は $2^2 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$ なので, u の 2 次式 $u^2 - 2u + 3$ を平方完成する: 任意の実数 u について

$$u^2 - 2u + 3 = (u - 1)^2 + 2 > 0 .$$

つまり, u の値に関わらず $u^2 - 2u + 3$ の値は常に正である. 従って, 不等式

$$(u + 2)(u^2 - 2u + 3) > 0$$

の両辺を $u^2 - 2u + 3$ で割ることができて, $u + 2 > 0$, つまり $u > -2$. 故に, 与えられた不等式を解くと $u > -2$. 終

問6.拡充3.2 変数 x に関する不等式 $\frac{x^2}{3}(x-2) \leq \frac{x-1}{2}$ を解きなさい.

不等式 $\frac{x^2}{3}(x-2) \leq \frac{x-1}{2}$ を整理すると $2x^3 - 4x^2 - 3x + 3 \leq 0$, この不等式の左辺は

$$\begin{aligned} 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3 &= (x+1)(2x^2 - 6x + 3) \\ &= 2(x+1) \left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{2} \right) , \end{aligned}$$

よって $(x+1) \left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{2} \right) \leq 0$. この不等式を解くと,

$$x \leq -1 \quad \text{または} \quad \frac{3-\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{3}}{2} .$$