

6. 拡充 4 分数式が現れる不等式の解法

例 実数 x に関する不等式 $\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{4x-2}$ を解く.

$$\begin{aligned}\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{4x-2} &\iff \frac{2}{x+1} - \frac{3}{2(2x-1)} \geq 0 \iff \frac{5x-7}{2(x+1)(2x-1)} \geq 0 \\ &\iff \frac{5x-7}{(x+1)(2x-1)} \geq 0 .\end{aligned}$$

不等式 $\frac{5x-7}{(x+1)(2x-1)} \geq 0$ を解く. x の分数式 $\frac{5x-7}{(x+1)(2x-1)}$ の値の符号を調べる. $x = -1$ のときと $x = \frac{1}{2}$ のときは, $(x+1)(2x-1) = 0$ なので,

分数式 $\frac{5x-7}{(x+1)(2x-1)}$ の値はないことに注意する.

x の値	...	-1	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{7}{5}$	...
$x+1$ の値の符号	-	0	+	+	+	+	+
$2x-1$ の値の符号	-	-	-	0	+	+	+
$5x-7$ の値の符号	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{5x-7}{(x+1)(2x-1)}$ の値の符号	-	値なし	+	値なし	-	0	+

従って、不等式 $\frac{5x-7}{(x+1)(2x-1)} \geq 0$ を解くと、 $-1 < x < \frac{1}{2}$ または $x \geq \frac{7}{5}$.

つまり、与えられた不等式を解くと、 $-1 < x < \frac{1}{2}$ または $x \geq \frac{7}{5}$. [終]

問6.拡充4.1 実数 x に関する不等式 $\frac{4}{3x+1} \leq \frac{2}{x-2}$ を解け.

$$\frac{2}{x-2} - \frac{4}{3x+1} = \frac{2(3x+1) - 4(x-2)}{(3x+1)(x-2)} = \frac{2x+10}{(3x+1)(x-2)} = 2 \frac{x+5}{(3x+1)(x-2)} .$$

不等式 $\frac{x+5}{(3x+1)(x-2)} \geq 0$ を解く.

x の値	...	-5	...	$-\frac{1}{3}$	...	2	...
$x+5$ の符号	-	0	+	+	+	+	+
$3x+1$ の符号	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$ の符号	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{x+5}{(3x+1)(x-2)}$ の符号	-	0	+	値なし	-	値なし	+

故に、与えられた不等式を解くと、 $-5 \leq x < -\frac{1}{3}$ または $x > 2$.

終

問6.拡充4.2 実数 x に関する不等式 $\frac{15}{x-1} \geq 2x-1$ を解け.

$$\frac{15}{x-1} - (2x-1) = \frac{15 - (2x-1)(x-1)}{x-1} = \frac{-2x^2 + 3x + 14}{x-1} = -\frac{(x+2)(2x-7)}{x-1}.$$

不等式 $\frac{(x+2)(2x-7)}{x-1} \leq 0$ を解く.

x の値	...	-2	...	1	...	$\frac{7}{2}$	...
$x+2$ の符号	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$ の符号	-	-	-	0	+	+	+
$2x-7$ の符号	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{(x+2)(2x-7)}{x-1}$ の符号	-	0	+	値なし	-	0	+

故に、与えられた不等式を解くと、 $x \leq -2$ または $1 < x \leq \frac{7}{2}$.

終