7.3 関数の単調増加・単調減少

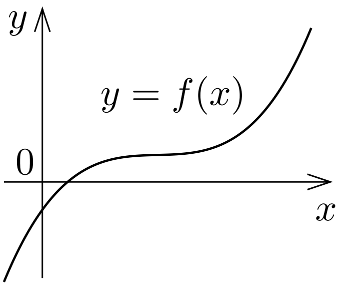
関数 f について，変数 x の値を大きくすると常に $f(x)$ の値も大きくなるとき，f は単調増加であるという．

関数 f について，変数 x の値を大きくすると常に $f(x)$ の値も大きくなるとき，f は単調増加であるという．また，変数 x の値を大きくすると常に $f(x)$ の値が小さくなるとき，f は単調減少であるという．

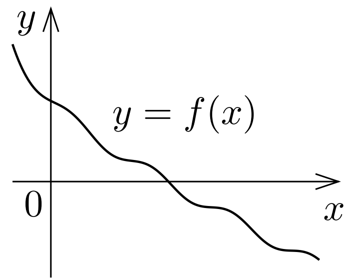
関数 f について，変数 x の値を大きくすると常に $f(x)$ の値も大きくなるとき，f は単調増加であるという．また，変数 x の値を大きくすると常に $f(x)$ の値が小さくなるとき，f は単調減少であるという．正確な定義は次のようになる．

定義　関数 f が単調増加であるとは，
f の定義域の任意の要素 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) < f(v)$ となることである．関数 f が単調減少であるとは，
f の定義域の任意の要素 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) > f(v)$ となることである．

関数 f の独立変数を x とおき従属変数を y とおく．xy 座標平面における関数 $y = f(x)$ のグラフを考える．関数 f が単調増加であるとき，x の値を大きくすると $y = f(x)$ の値も大きくなるので，$y = f(x)$ のグラフは右上がりになる．関数 f が単調減少であるとき，x の値を大きくすると $y = f(x)$ の値は小さくなるので，$y = f(x)$ のグラフは右下がりになる．



単調増加である関数 f のグラフの例



単調減少である関数 f のグラフの例

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が実数全体である関数 $3x-2$ を f とおく： $f(x)=3x-2$ ． 関数 f は単調増加であることを示す.

例 定義域が実数全体である関数 $3x-2$ を f とおく: $f(x)=3x-2$. 関数 f は単調増加であることを示す.

任意の実数 u, v について, $u<v$ ならば, $3u<3v$ なので $3u-2<3v-2$ つまり $f(u)<f(v)$. 従って関数 f は単調増加である. 終

問7.3 定義域が実数全体である関数 f を $f(x) = -2x + 5$ と定める．関数 f は単調減少であることを示せ．

任意の実数 u, v について， $u < v$ ならば， $-2u \quad -2v$ なので $-2u + 5 \quad -2v + 5$ つまり $f(u) \quad f(v)$ ．従って関数 f は単調減少である．

$\boxed{問 7.3}$ 定義域が実数全体である関数 f を $f(x) = -2x + 5$ と定める．関数 f は単調減少であることを示せ．

任意の実数 u, v について， $u < v$ ならば， $-2u > -2v$ なので $-2u + 5 > -2v + 5$ つまり $f(u) > f(v)$ ．従って関数 f は単調減少である．$\boxed{終}$

関数の定義域の一部分における単調増加・単調減少を考えることもある.

定義　関数 f の定義域は集合 S を含むとする. f が S において単調増加であるとは,

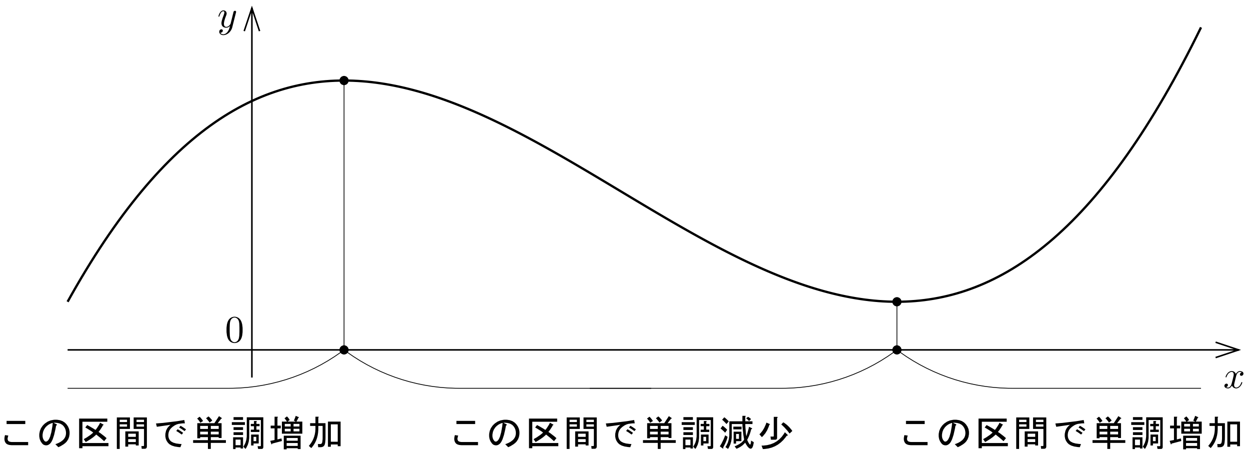
S の任意の要素 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) < f(v)$

となることである. f が S において単調減少であるとは,

S の任意の要素 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) > f(v)$

となることである.

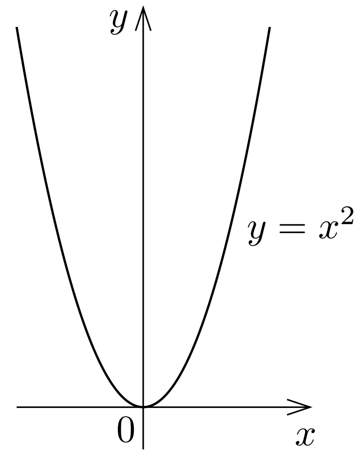
関数のグラフでは例えば次のようになる.



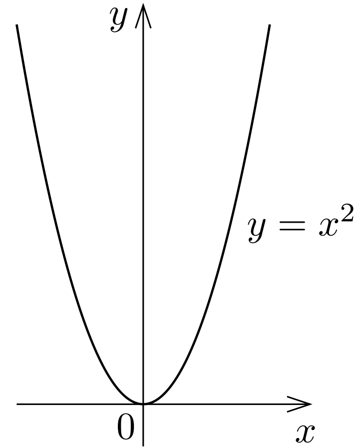
次の定理があった：任意の実数 a と b とについて，$0 \leq a < b$ ならば $a^2 < b^2$ ．

　次の定理があった：任意の実数 a と b とについて，$0 \leq a < b$ ならば $a^2 < b^2$ ．

$\boxed{例}$ 定義域が実数全体である 2 次関数 x^2 を f とおく： $f(x) = x^2$ ． この関数 f は，区間 $(-\infty, 0]$ において単調減少であり，区間 $[0, \infty)$ において単調増加である．このことを示す．



　次の定理があった：任意の実数 a と b とについて，$0 \leq a < b$ ならば $a^2 < b^2$ ．



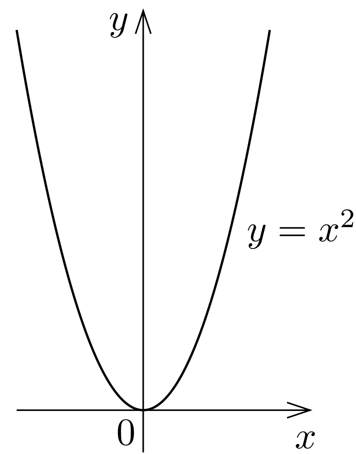
$\boxed{例}$ 定義域が実数全体である 2 次関数 x^2 を f とおく： $f(x) = x^2$ ． この関数 f は，区間 $(-\infty,0]$ において単調減少であり，区間 $[0,\infty)$ において単調増加である．このことを示す．

　区間 $[0,\infty)$ の任意の実数 u, v について，

$u < v$ ならば，$0 \leq u < v$ なので，$u^2 < v^2$ つまり $f(u) < f(v)$ ．故に関数 f は $[0,\infty)$ において単調増加である．

次の定理があった：任意の実数 a と b とについて，$0 \leq a < b$ ならば $a^2 < b^2$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が実数全体である 2 次関数 x^2 を f とおく： $f(x) = x^2$ ． この関数 f は，区間 $(-\infty, 0]$ において単調減少であり，区間 $[0, \infty)$ において単調増加である．このことを示す．



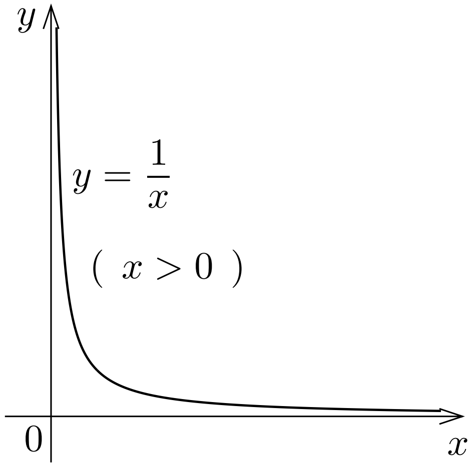
区間 $[0, \infty)$ の任意の実数 u, v について，$u < v$ ならば，$0 \leq u < v$ なので，$u^2 < v^2$ つまり $f(u) < f(v)$ ．故に関数 f は $[0, \infty)$ において単調増加である．

区間 $(-\infty, 0]$ の任意の実数 u, v をとる．$v \leq 0$ なので $-v \geq 0$ ．$u < v$ ならば，$-u > -v$ なので $-u > -v \geq 0$ ，$(-u)^2 > (-v)^2$ ，よって $u^2 > v^2$ つまり $f(u) > f(v)$ ．故に関数 f は $(-\infty, 0]$ において単調減少である． $\boxed{\text{終}}$

次の定理があった：任意の実数 a と b とについて，$0 < a < b$ ならば $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ ．

次の定理があった：任意の実数 a と b とについて，$0 < a < b$ ならば $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

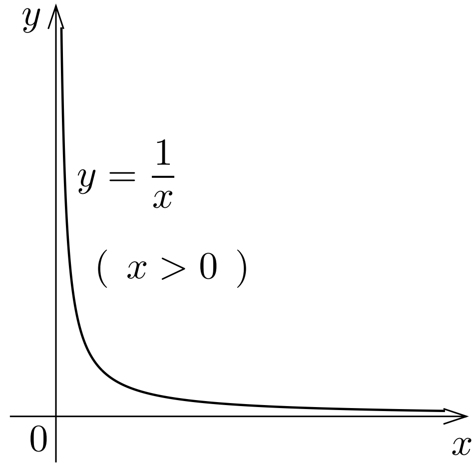
$\boxed{例}$ 定義域が区間 $(0, \infty)$ である関数 $\dfrac{1}{x}$ を f とおく： $f(x) = \dfrac{1}{x}$ （ $x > 0$ ）．この関数 f は単調減少である．このことを示す．



次の定理があった：任意の実数 a と b とについて，$0 < a < b$ ならば $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ ．

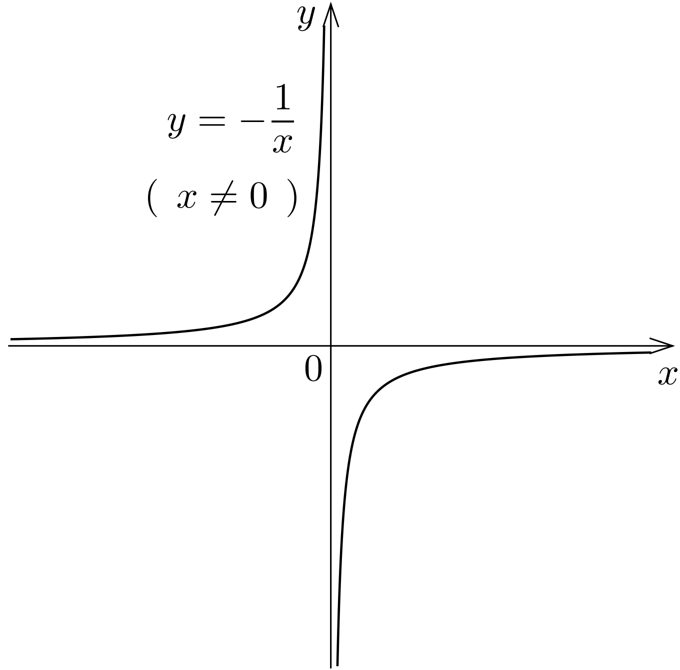
$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $(0, \infty)$ である関数 $\dfrac{1}{x}$ を f とおく： $f(x) = \dfrac{1}{x}$ （ $x > 0$ ）． この関数 f は単調減少である．このことを示す．

定義域 $(0, \infty)$ の任意の実数 u と v とについて， $u < v$ ならば， $0 < u < v$ なので， $\dfrac{1}{u} > \dfrac{1}{v}$ つまり $f(u) > f(v)$ ． 故に関数 f は単調減少である．

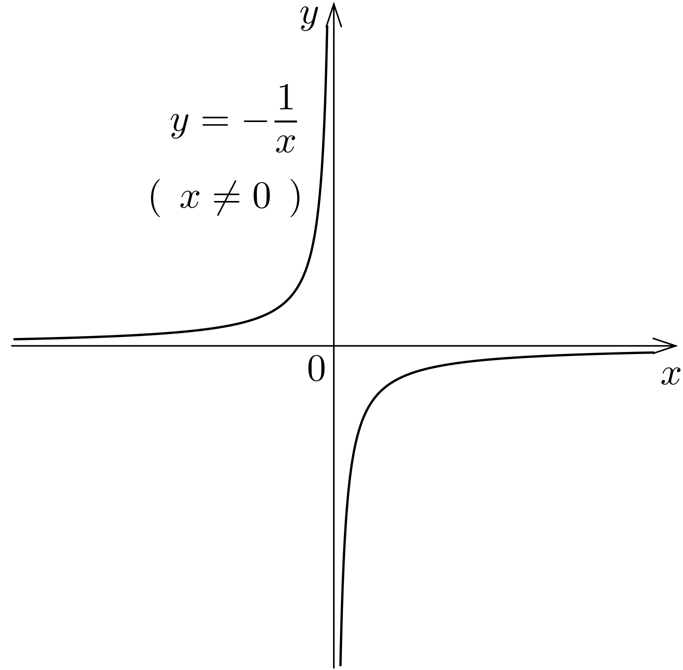


$\boxed{\text{終}}$

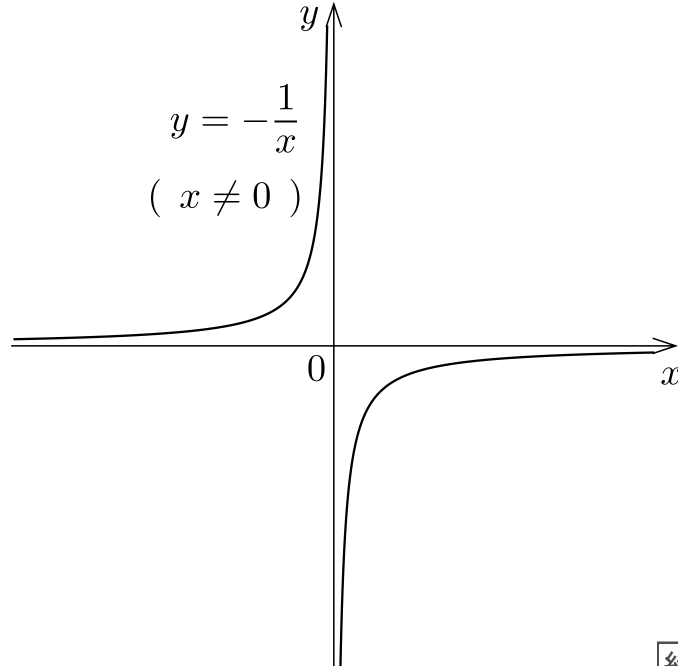
例 定義域が 0 以外の実数の全体である関数 $-\dfrac{1}{x}$ を f とおく： $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ （ $x \neq 0$ ）．



$\boxed{\text{例}}$ 定義域が 0 以外の実数の全体である関数 $-\dfrac{1}{x}$ を f とおく： $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ （ $x \neq 0$ ）.
この関数は，正の実数の全体 $(0, \infty)$ において単調増加であり，負の実数の全体 $(-\infty, 0)$ において単調増加である.



例 定義域が 0 以外の実数の全体である関数 $-\dfrac{1}{x}$ を f とおく： $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ （ $x \neq 0$ ）．この関数は，正の実数の全体 $(0,\infty)$ において単調増加であり，負の実数の全体 $(-\infty,0)$ において単調増加である．しかし，例えば $-3<2$ だが $f(-3)>f(2)$ なので，定義域全体では単調増加でない．



終