7.4 関数の最大値と最小値

関数の f の最大値とは f の値域のなかで最も大きい実数のことであり，関数 f の最小値とは f の値域のなかで最も小さい実数のことである．

　関数の f の最大値とは f の値域のなかで最も大きい実数のことであり，関数 f の最小値とは f の値域のなかで最も小さい実数のことである．正確に述べると次のようになる．

定義　関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ に対して } \ f(p) \geq f(x) \quad ;$$

このとき f の値 $f(p)$ を f の最大値という．また，f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ に対して } \ f(p) \leq f(x) \quad ;$$

このとき f の値 $f(p)$ を f の最小値という．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める:

$$f(1) = 4\ ,\quad f(3) = 7\ ,\quad f(6) = 2\ ,\quad f(8) = 5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である:

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

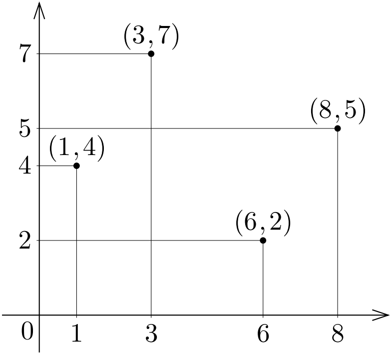
$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める:

$$f(1) = 4\ ,\quad f(3) = 7\ ,\quad f(6) = 2\ ,\quad f(8) = 5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である:

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる.



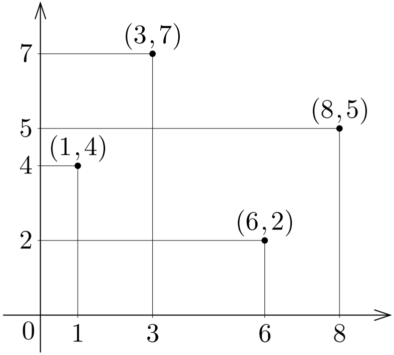
$\boxed{例}$ 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める:

$$f(1) = 4\ ,\quad f(3) = 7\ ,\quad f(6) = 2\ ,\quad f(8) = 5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である:

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる. この関数の値域は集合 $\{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$ である.



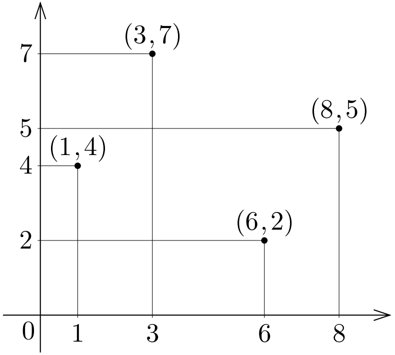
$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める:

$$f(1) = 4\ ,\quad f(3) = 7\ ,\quad f(6) = 2\ ,\quad f(8) = 5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である:

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる. この関数の値域は集合 $\{2,4,5,7\}$ である.



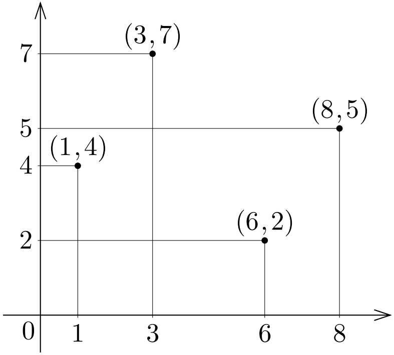
例 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1) = 4\ ,\quad f(3) = 7\ ,\quad f(6) = 2\ ,\quad f(8) = 5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合 $\{2,4,5,7\}$ である．f の最大値は値域の要素で最大の実数　　であり，f の最小値は値域の要素で最小の実数　　である．



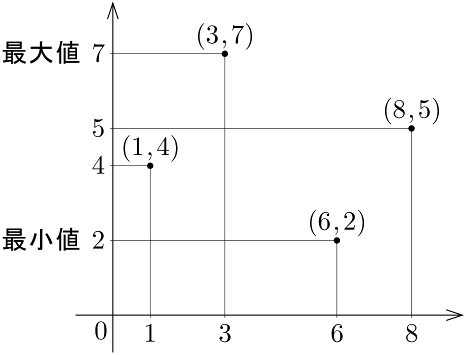
$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1)=4\ ,\quad f(3)=7\ ,\quad f(6)=2\ ,\quad f(8)=5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合 $\{2,4,5,7\}$ である．f の最大値は値域の要素で最大の実数 7 であり，f の最小値は値域の要素で最小の実数 2 である．



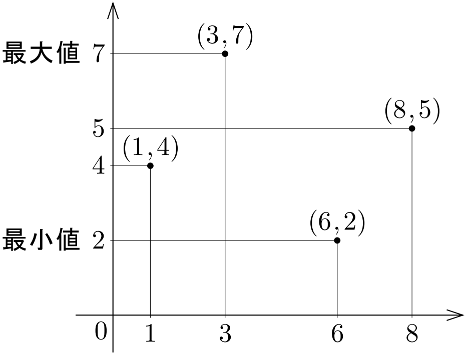
例 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1)=4\ ,\quad f(3)=7\ ,\quad f(6)=2\ ,\quad f(8)=5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合 $\{2,4,5,7\}$ である．f の最大値は値域の要素で最大の実数 7 であり，f の最小値は値域の要素で最小の実数 2 である．f は，　においで最大値 7 をとり，　において最小値 2 をとる．



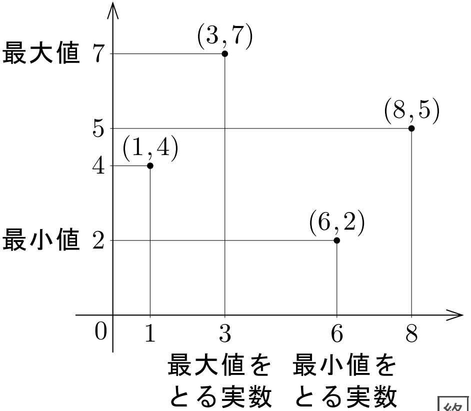
例 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める:

$$f(1)=4\ ,\quad f(3)=7\ ,\quad f(6)=2\ ,\quad f(8)=5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である:

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合 $\{2,4,5,7\}$ である．f の最大値は値域の要素で最大の実数 7 であり，f の最小値は値域の要素で最小の実数 2 である．f は，3 において最大値 7 をとり，6 において最小値 2 をとる．



終

$\boxed{問 7.4.1}$ 定義域が集合 $\{2,5,7,9\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(2) = 4\ ,\quad f(5) = 8\ ,\quad f(7) = 3\ ,\quad f(9) = 6\ .$$

関数 f の最大値・最小値を求めよ．どの実数において最大値・最小値をとるかも記せ．

関数 f の値域は集合 $\{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$ である．関数 f は，　　において最大値　　をとり，　　において最小値　　をとる．

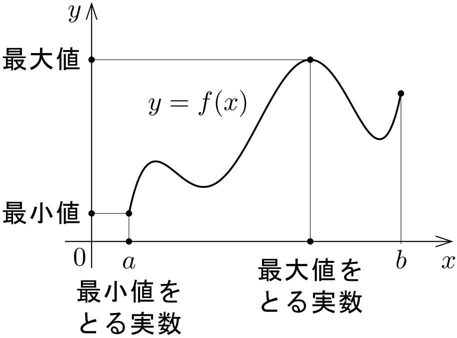
$\boxed{\text{問}7.4.1}$ 定義域が集合 $\{2,5,7,9\}$ である関数 f を次のように定める：

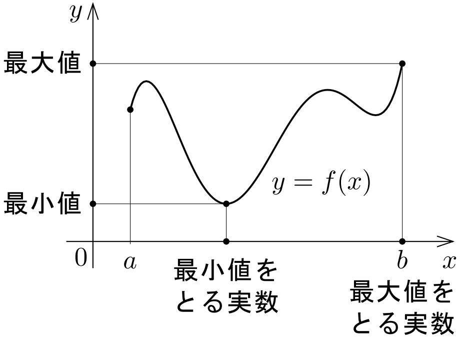
$$f(2) = 4\ , \quad f(5) = 8\ , \quad f(7) = 3\ , \quad f(9) = 6\ .$$

関数 f の最大値・最小値を求めよ．どの実数において最大値・最小値をとるかも記せ．

関数 f の値域は集合 $\{3,4,6,8\}$ である．関数 f は，5 において最大値 8 をとり，7 において最小値 3 をとる．

実数 a と b とについて $a<b$ とする．定義域が区間 $[a,b]$ である関数 f のグラフにおいて，最大値・最小値は例えば次の図のようになる．



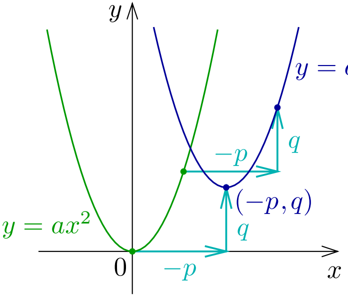


関数の最大値・最小値は無いこともある.

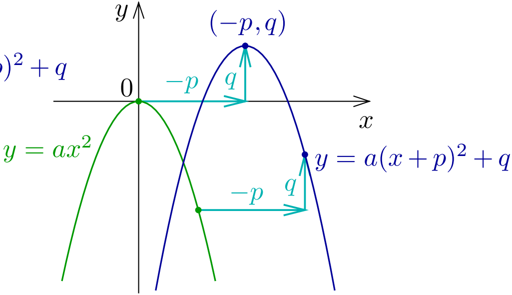
2 次関数について最大値・最小値を考えるには，2 次関数 f の値を表す 2 次式を平方完成する．a, p, q は定数で $a \neq 0$ とする．

2 次関数について最大値・最小値を考えるには，2 次関数 f の値を表す 2 次式を平方完成する．a, p, q は定数で $a \neq 0$ とする．**4.8** 節で述べたように，xy 座標平面において，2 次関数 $y = a(x+p)^2 + q$ のグラフは，関数 $y = ax^2$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた放物線である．

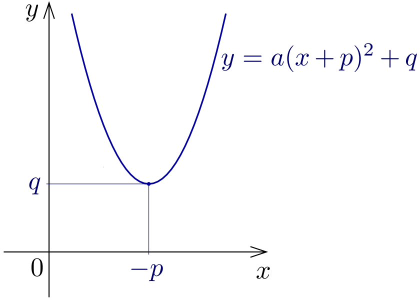
2 次関数について最大値・最小値を考えるには，2 次関数 f の値を表す 2 次式を平方完成する．a, p, q は定数で $a \neq 0$ とする．**4.8** 節で述べたように，xy 座標平面において，2 次関数 $y = a(x+p)^2 + q$ のグラフは，関数 $y = ax^2$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた放物線である．例えば以下の図のようになる．



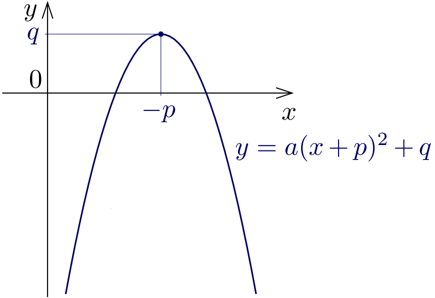
$a > 0$ のとき



$a < 0$ のとき

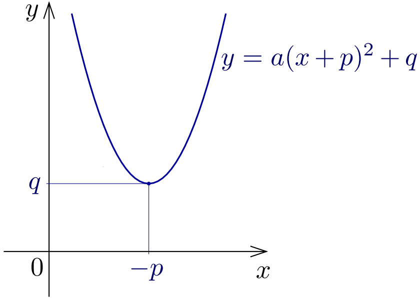


$a > 0$ のとき

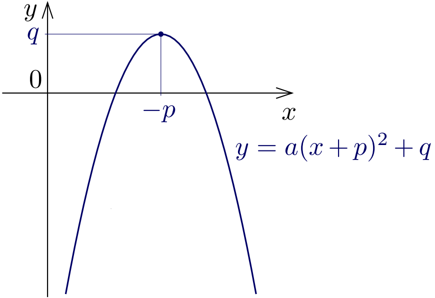


$a < 0$ のとき

定義域が実数全体である 2 次関数 $f(x) = a(x+p)^2 + q$ は次のようになる：



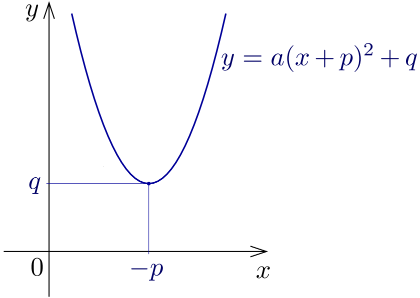
$a>0$ のとき



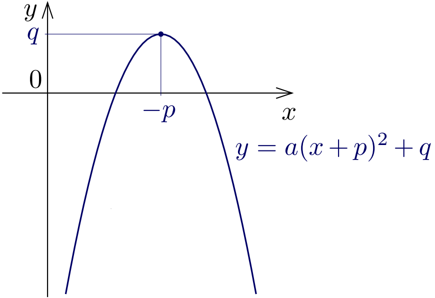
$a<0$ のとき

定義域が実数全体である 2 次関数 $f(x)=a(x+p)^2+q$ は次のようになる：

(1) $a>0$ のとき，区間 $(-\infty,-p]$ において単調減少で区間 $[-p,\infty)$ において単調増加なので，実数 $-p$ において最小値 q をとり，最大値はない；



$a > 0$ のとき



$a < 0$ のとき

定義域が実数全体である 2 次関数 $f(x) = a(x+p)^2 + q$ は次のようになる：

(1) $a > 0$ のとき，区間 $(-\infty, -p]$ において単調減少で区間 $[-p, \infty)$ において単調増加なので，実数 $-p$ において最小値 q をとり，最大値はない；

(2) $a < 0$ のとき，区間 $(-\infty, -p]$ において単調増加で区間 $[-p, \infty)$ において単調減少なので，実数 $-p$ において最大値 q をとり，最小値はない．

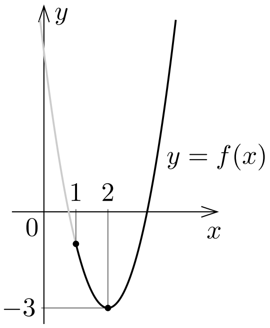
$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[1,\infty)$ である 2 次関数 f を $f(x)=2x^2-8x+5$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）.

$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[1, \infty)$ である 2 次関数 f を $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）. $f(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x + 5 = 2(x^2 - 4x) + 5 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4) - 8 + 5 \\ &= 2(x-2)^2 - 3 \ . \end{aligned}$$

$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[1,\infty)$ である 2 次関数 f を $f(x)=2x^2-8x+5$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）. $f(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

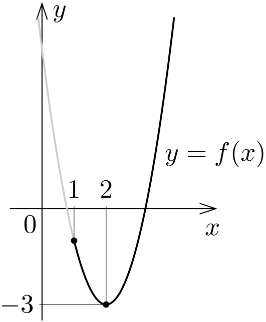
$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2-8x+5 = 2(x^2-4x)+5 \\
&= 2(x^2-4x+4)-8+5 \\
&= 2(x-2)^2-3 \ .
\end{aligned}
$$



$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[1,\infty)$ である 2 次関数 f を $f(x)=2x^2-8x+5$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）． $f(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2-8x+5 = 2(x^2-4x)+5 \\ &= 2(x^2-4x+4)-8+5 \\ &= 2(x-2)^2-3 \ . \end{aligned}$$

f は，区間 $[1,2]$ で単調減少であり，区間 $[2,\infty)$ で単調増加である．従って関数 f は 2 において最小値 $f(2)=-3$ をとる． f の最大値はない．

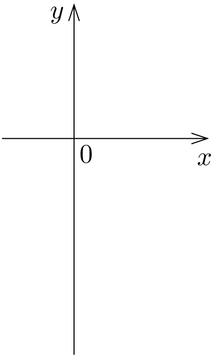


$\boxed{終}$

問7.4.2 定義域が区間 $[-1,\infty)$ である 2 次関数 f を $f(x)=3x^2-6x-5$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$f(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2-6x-5 \\
&= \quad (\qquad\qquad\qquad) - \quad - \\
&= \qquad\qquad\qquad\quad .
\end{aligned}
$$



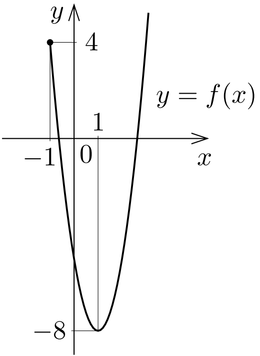
f は，区間　　　　　で単調減少であり，区間　　　　　で単調増加である．従って関数 f は　　　においてで最　値 $f(\ )=$　　　をとる．f の最　値は

$\boxed{\text{問}7.4.2}$ 定義域が区間 $[-1,\infty)$ である 2 次関数 f を $f(x)=3x^2-6x-5$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$f(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2-6x-5 \\ &= 3(x^2-2x+1)-3-5 \\ &= 3(x-1)^2-8 \ . \end{aligned}$$

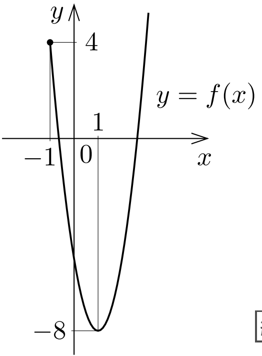
f は，区間 　　　　で単調減少であり，区間 　　　　で単調増加である．従って関数 f は 　　において最　値 $f(\ \ )=$ 　　　をとる．f の最　値は



$\boxed{問 7.4.2}$ 定義域が区間 $[-1,\infty)$ である 2 次関数 f を $f(x)=3x^2-6x-5$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$f(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2-6x-5 \\ &= 3(x^2-2x+1)-3-5 \\ &= 3(x-1)^2-8 \ . \end{aligned}$$



f は，区間 $[-1,1]$ で単調減少であり，区間 $[1,\infty)$ で単調増加である．従って関数 f は 1 において最小値 $f(1)=-8$ をとる．f の最大値はない．

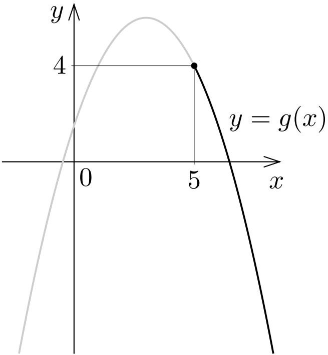
$\boxed{終}$

例 定義域が区間 $[5,\infty)$ である 2 次関数 g を $g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+\dfrac{3}{2}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[5,\infty)$ である 2 次関数 g を $g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+\dfrac{3}{2}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）． $g(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x^2-6x)+\frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-6x+9)+\frac{9}{2}+\frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(x-3)^2+6\ . \end{aligned}$$

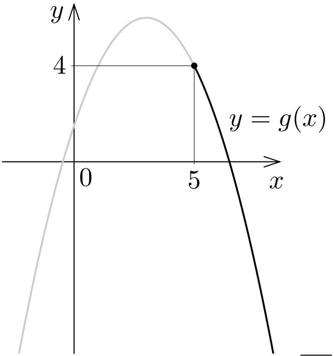
$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[5,\infty)$ である 2 次関数 g を $g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+\dfrac{3}{2}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）． $g(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると



$$
\begin{aligned}
g(x) &= -\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x^2-6x)+\frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2-6x+9)+\frac{9}{2}+\frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{2}(x-3)^2+6 \ .
\end{aligned}
$$

例 定義域が区間 $[5,\infty)$ である 2 次関数 g を $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．$g(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$
\begin{aligned}
g(x)&=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x^2-6x)+\frac{3}{2}\\
&=-\frac{1}{2}(x^2-6x+9)+\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\\
&=-\frac{1}{2}(x-3)^2+6\ .
\end{aligned}
$$



これより，g は区間 $[5,\infty)$ で単調減少である．よって，関数 g は 5 において最大値 $g(5)=4$ をとる．g の最小値はない．

終

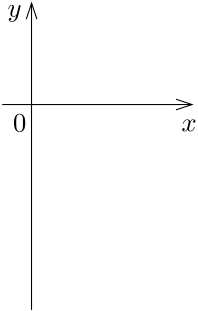
$\boxed{\text{問}7.4.3}$ 定義域が区間 $[1, \infty)$ である 2 次関数 g を $g(x) = -\dfrac{x^2+4x-11}{3}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$g(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$g(x) = -\frac{x^2+4x-11}{3}$$

$$= \quad (\qquad\qquad) + \quad +$$

$$= \qquad\qquad\qquad .$$

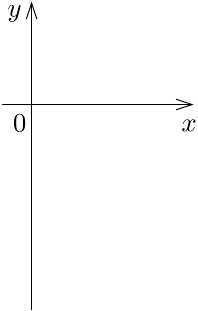


g は区間　　　　　で単調　　　である．従って関数 g は　　において最　値 $g(\quad) =$ 　　をとる．g の最　値は

$\boxed{問 7.4.3}$ 定義域が区間 $[1, \infty)$ である 2 次関数 g を $g(x) = -\dfrac{x^2+4x-11}{3}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$g(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

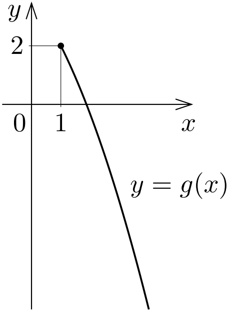
$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{x^2+4x-11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x^2+4x+4)+\frac{4}{3}+\frac{11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x+2)^2+5 \ . \end{aligned}$$



g は区間 　　　で単調 　　である．従って関数 g は 　において最 　値 $g(\ \ ) =$ 　　をとる．g の最 　値は

$\boxed{\text{問}7.4.3}$ 定義域が区間 $[1,\infty)$ である 2 次関数 g を $g(x)=-\dfrac{x^2+4x-11}{3}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$g(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると



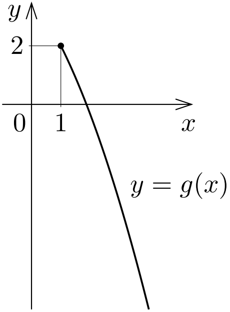
$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{x^2+4x-11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x^2+4x+4)+\frac{4}{3}+\frac{11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x+2)^2+5\ . \end{aligned}$$

g は区間　　　　で単調　　である．従って関数 g は　　において最　値 $g(\ \ )=$　　をとる．g の最　値は

$\boxed{問7.4.3}$ 定義域が区間 $[1, \infty)$ である 2 次関数 g を $g(x) = -\dfrac{x^2+4x-11}{3}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$g(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{x^2+4x-11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x^2+4x+4)+\frac{4}{3}+\frac{11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x+2)^2+5 \ . \end{aligned}$$



g は区間 $[1, \infty)$ で単調減少である．従って関数 g は 1 において最大値 $g(1) = 2$ をとる．g の最小値はない．

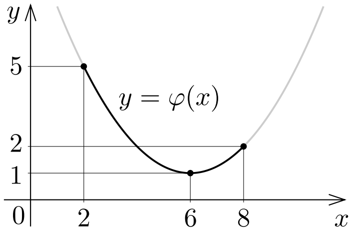
$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[2,8]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 10$ と定める. 関数 φ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）.

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[2,8]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x)=\frac{1}{4}x^2-3x+10$ と定める. 関数 φ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）. $\varphi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{4}x^2-3x+10=\frac{1}{4}(x^2-12x)+10\\&=\frac{1}{4}(x^2-12x+36)-9+10\\&=\frac{1}{4}(x-6)^2+1\ .\end{aligned}$$

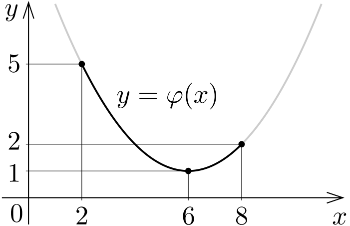
例 定義域が区間 $[2,8]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x)=\frac{1}{4}x^2-3x+10$ と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）． $\varphi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると



$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{4}x^2-3x+10=\frac{1}{4}(x^2-12x)+10\\&=\frac{1}{4}(x^2-12x+36)-9+10\\&=\frac{1}{4}(x-6)^2+1\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[2,8]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x)=\dfrac{1}{4}x^2-3x+10$ と定める. 関数 φ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）. $\varphi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{4}x^2-3x+10=\frac{1}{4}(x^2-12x)+10\\&=\frac{1}{4}(x^2-12x+36)-9+10\\&=\frac{1}{4}(x-6)^2+1\ .\end{aligned}$$

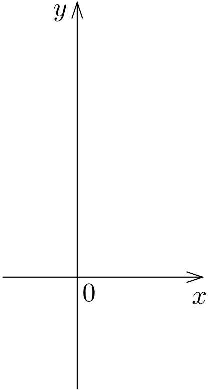


φ は, 区間 $[2,6]$ で単調減少であり, 区間 $[6,8]$ で単調増加である. よって, 関数 φ は 6 において最小値 $\varphi(6)=1$ をとる. $\varphi(2)=5$, $\varphi(8)=2$ なので, φ は 2 において最大値 5 をとる. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問7.4.4}$ 定義域が区間 $[-1,2]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x)=3x^2-4x-1$ と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$\varphi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 3x^2-4x-1 \\ &= \Big\{ \qquad\qquad\qquad \Big\} - \quad - \\ &= \qquad\qquad\qquad .\end{aligned}$$



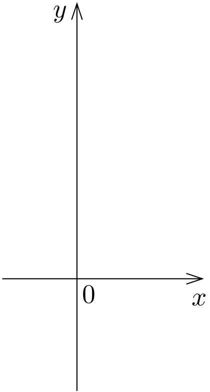
関数 φ は，区間　　　　　で単調減少であり，区間　　　　で単調増加である．従って φ は　　において最　値 $\varphi\Big(\quad\Big) =$ 　　　をとる．

$\varphi(\quad) =$ 　，$\varphi(\ ) =$ 　なので，φ は　　　において最　値　　をとる．

$\boxed{\text{問}7.4.4}$ 定義域が区間 $[-1,2]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x)=3x^2-4x-1$ と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$\varphi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

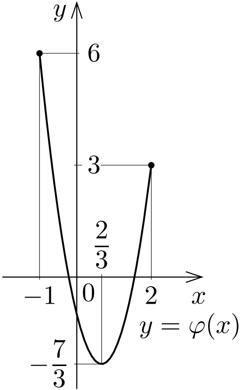
$$\begin{aligned}\varphi(x)&=3x^2-4x-1\\&=3\left\{x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}-\frac{4}{3}-1\\&=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3}\ .\end{aligned}$$



関数 φ は，区間　　　　で単調減少であり，区間　　　　で単調増加である．従って φ は　　において最　値 $\varphi\left(\quad\right)=$　　　をとる．

$\varphi(\quad)=$　，$\varphi(\ )=$　　なので，φ は　　　において最　値　　をとる．

$\boxed{\text{問}7.4.4}$ 定義域が区間 $[-1,2]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x)=3x^2-4x-1$ と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．



$\varphi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=3x^2-4x-1\\&=3\left\{x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}-\frac{4}{3}-1\\&=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3}\ .\end{aligned}$$

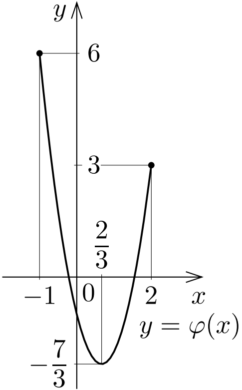
関数 φ は，区間　　　　で単調減少であり，区間　　　　で単調増加である．従って φ は　　において最　値 $\varphi\Big(\quad\Big)=$　　　をとる．

$\varphi(\quad)=\quad$，$\varphi(\ )=\quad$ なので，φ は　　　において最　値　　をとる．

$\boxed{\text{問}7.4.4}$ 定義域が区間 $[-1,2]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x)=3x^2-4x-1$ と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$\varphi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 3x^2-4x-1\\ &= 3\left\{x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}-\frac{4}{3}-1\\ &= 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3}\ .\end{aligned}$$



関数 φ は，区間 $\left[-1,\frac{2}{3}\right]$ で単調減少であり，区間 $\left[\frac{2}{3},2\right]$ で単調増加である．従って φ は $\frac{2}{3}$ において最小値 $\varphi\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{7}{3}$ をとる．

$\varphi(-1)=6$ ，$\varphi(2)=3$ なので，φ は -1 において最大値 6 をとる． $\boxed{\text{終}}$

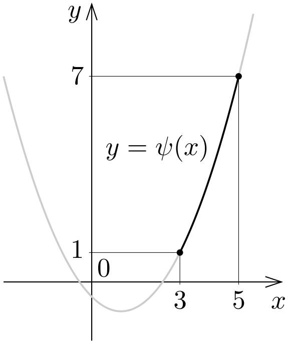
$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[3,5]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$ と定める. 関数 ψ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）.

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[3,5]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{1}{2}$ と定める. 関数 ψ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）. $\psi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完
成すると

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 2x) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x - 2x + 1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1 \ \ .\end{aligned}$$

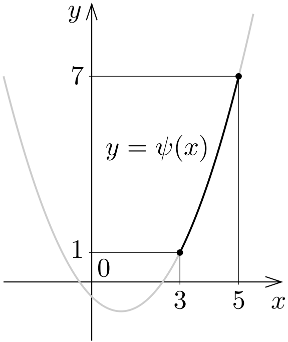
例 定義域が区間 $[3,5]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{1}{2}$ と定める．関数 ψ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）． $\psi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-2x)-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}(x-2x+1)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}(x-1)^2-1\ .\end{aligned}$$



例 定義域が区間 $[3,5]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$ と定める．関数 ψ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．$\psi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-2x)-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}(x-2x+1)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}(x-1)^2-1\ .\end{aligned}$$



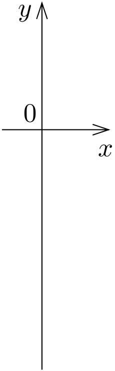
ψ は区間 $[3,5]$ で単調増加である．従って関数 ψ は，3 において最小値 $\psi(3)=1$ をとり，5 において最大値 $\psi(5)=7$ をとる．

終

$\boxed{問 7.4.5}$ 定義域が区間 $[-1,2]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x) = -2x^2 + 10x - 5$ と定める．関数 ψ の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$\psi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

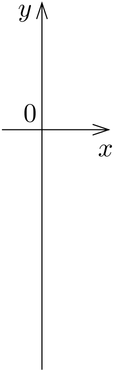
$$\begin{aligned}\psi(x) &= -2x^2 + 10x - 5 \\ &= \quad \Big\{ \qquad\qquad\qquad \Big\} + \quad - \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad .\end{aligned}$$



ψ は区間 　　　　で単調　　である．従って関数 ψ は，　　において最大値 $\psi(\ \ ) =$ 　　をとり，

　　において最小値 $\psi(\quad) =$ 　　　をとる．

$\boxed{\text{問}7.4.5}$ 定義域が区間 $[-1,2]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x) = -2x^2 + 10x - 5$ と定める．関数 ψ の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

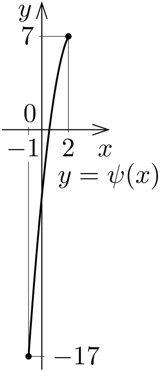


$\psi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -2x^2 + 10x - 5 \\ &= -2\left\{x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right\} + \frac{25}{2} - 5 \\ &= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{2} \ .\end{aligned}$$

ψ は区間　　　　　で単調　　　である．従って関数 ψ は，　　において最大値 $\psi(\quad) =$ 　　をとり，　　において最小値 $\psi(\quad) =$ 　　　をとる．

$\boxed{問7.4.5}$ 定義域が区間 $[-1,2]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x)=-2x^2+10x-5$ と定める．関数 ψ の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

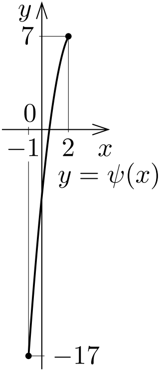


$\psi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\psi(x)&=-2x^2+10x-5\\&=-2\left\{x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}+\frac{25}{2}-5\\&=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\ .\end{aligned}$$

ψ は区間　　　　　で単調　　　である．従って関数 ψ は，　　において最大値 $\psi(\ )=$　　　をとり，　　において最小値 $\psi(\quad)=$　　　　をとる．

$\boxed{問 7.4.5}$ 定義域が区間 $[-1,2]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x) = -2x^2 + 10x - 5$ と定める．関数 ψ の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．



$\psi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -2x^2 + 10x - 5\\ &= -2\left\{x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right\} + \frac{25}{2} - 5\\ &= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}\ .\end{aligned}$$

ψ は区間 $[-1,2]$ で単調増加である．従って関数 ψ は，2 において最大値 $\psi(2) = 7$ をとり，-1 において最小値 $\psi(-1) = -17$ をとる．

$\boxed{終}$