7.4 関数の最大値と最小値

関数の f の最大値とは f の値域のなかで最も大きい実数のことであり，関数 f の最小値とは f の値域のなかで最も小さい実数のことである．

関数の f の最大値とは f の値域のなかで最も大きい実数のことであり，関数 f の最小値とは f の値域のなかで最も小さい実数のことである．正確に述べると次のようになる．

定義　関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) \quad ;$$

このとき f の値 $f(p)$ を f の最大値という．また，f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x) \quad ;$$

このとき f の値 $f(p)$ を f の最小値という．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1) = 4\ , \quad f(3) = 7\ , \quad f(6) = 2\ , \quad f(8) = 5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

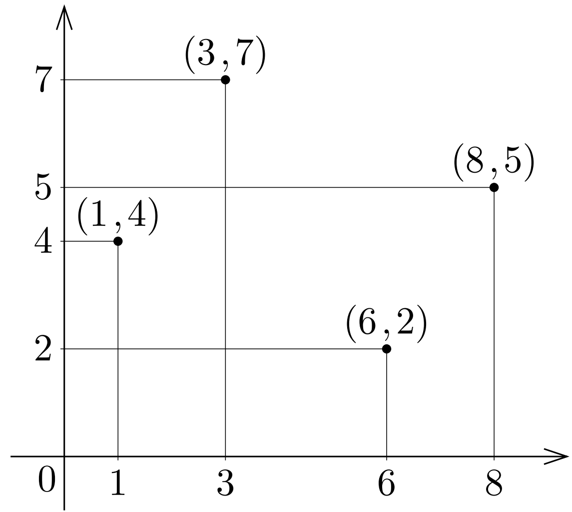
例 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1)=4\ ,\quad f(3)=7\ ,\quad f(6)=2\ ,\quad f(8)=5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる.



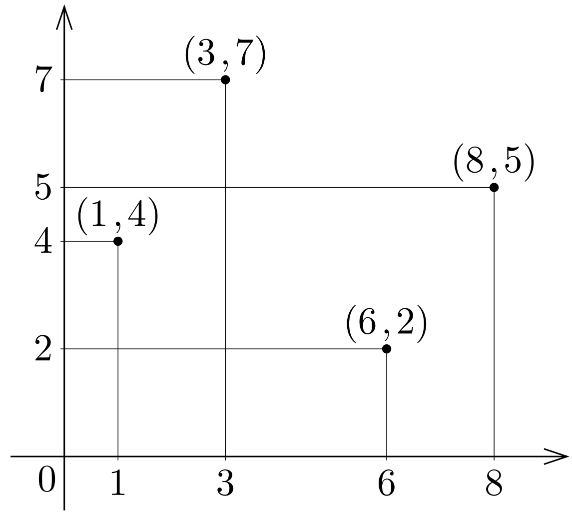
例 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1)=4\ ,\quad f(3)=7\ ,\quad f(6)=2\ ,\quad f(8)=5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる. この関数の値域は集合 $\{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$ である.



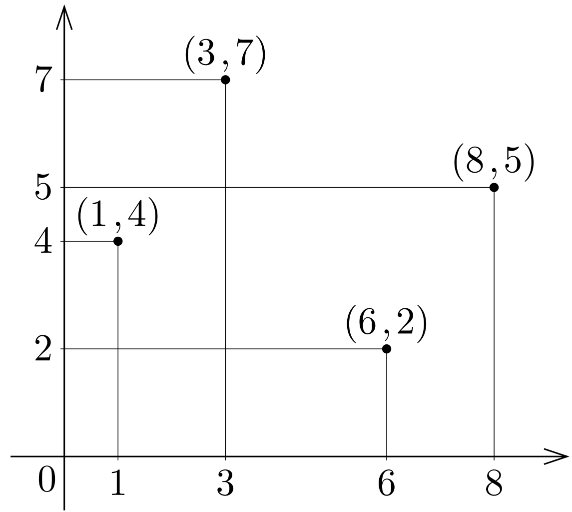
$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1)=4\ ,\quad f(3)=7\ ,\quad f(6)=2\ ,\quad f(8)=5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合 $\{2,4,5,7\}$ である．



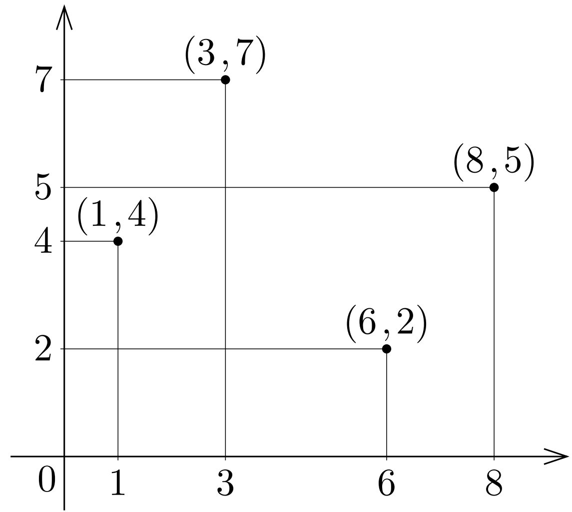
例 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1) = 4\ ,\quad f(3) = 7\ ,\quad f(6) = 2\ ,\quad f(8) = 5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合 $\{2,4,5,7\}$ である．f の最大値は値域の要素で最大の実数　　であり，f の最小値は値域の要素で最小の実数　　である．



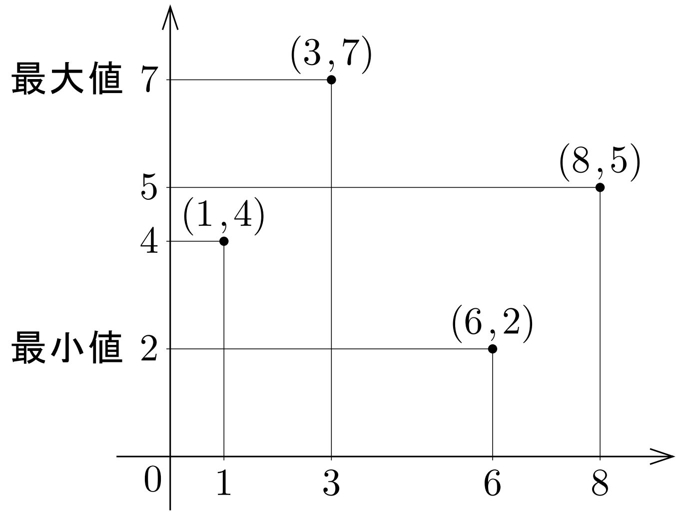
$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1) = 4\ ,\quad f(3) = 7\ ,\quad f(6) = 2\ ,\quad f(8) = 5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合 $\{2,4,5,7\}$ である．f の最大値は値域の要素で最大の実数 7 であり，f の最小値は値域の要素で最小の実数 2 である．



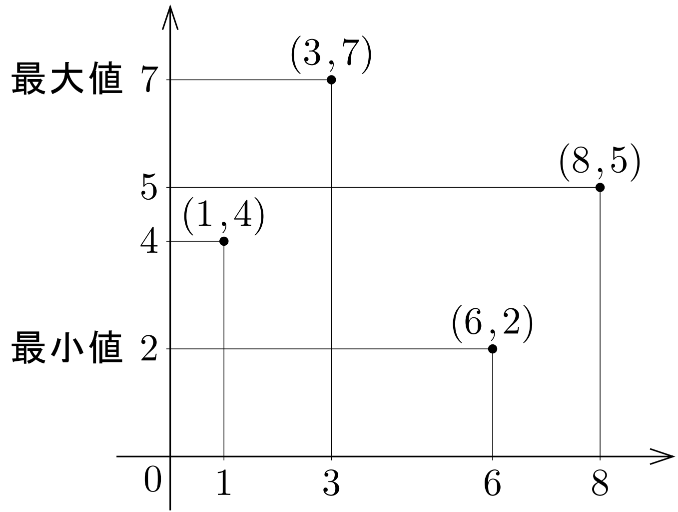
$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1)=4\ ,\quad f(3)=7\ ,\quad f(6)=2\ ,\quad f(8)=5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合 $\{2,4,5,7\}$ である．f の最大値は値域の要素で最大の実数 7 であり，f の最小値は値域の要素で最小の実数 2 である．f は，　　において最大値 7 をとり，　　において最小値 2 をとる．



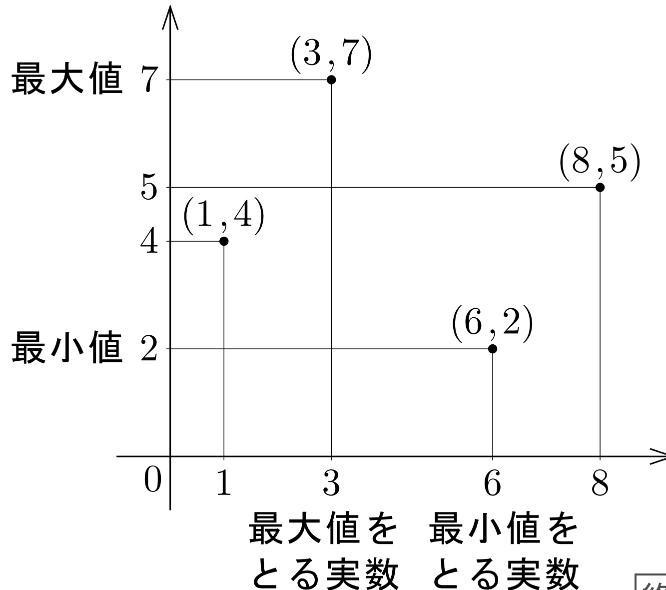
例 定義域が集合 $\{1,3,6,8\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1)=4\ ,\quad f(3)=7\ ,\quad f(6)=2\ ,\quad f(8)=5\ .$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合 $\{2,4,5,7\}$ である．f の最大値は値域の要素で最大の実数 7 であり，f の最小値は値域の要素で最小の実数 2 である．f は，3 において最大値 7 をとり，6 において最小値 2 をとる．



終

$\boxed{\text{問}7.4.1}$ 定義域が集合 $\{2,5,7,9\}$ である関数 f を次のように定める:

$$f(2) = 4 \ , \quad f(5) = 8 \ , \quad f(7) = 3 \ , \quad f(9) = 6 \ .$$

関数 f の最大値・最小値を求めよ. どの実数において最大値・最小値をとるかも記せ.

関数 f の値域は集合 $\{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$ である. 関数 f は, 　　において最大値 　　をとり, 　　において最小値 　　をとる.

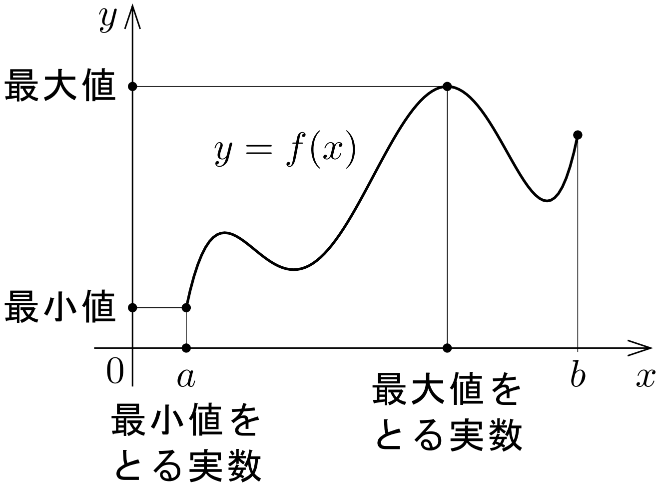
$\boxed{問 7.4.1}$ 定義域が集合 $\{2,5,7,9\}$ である関数 f を次のように定める：

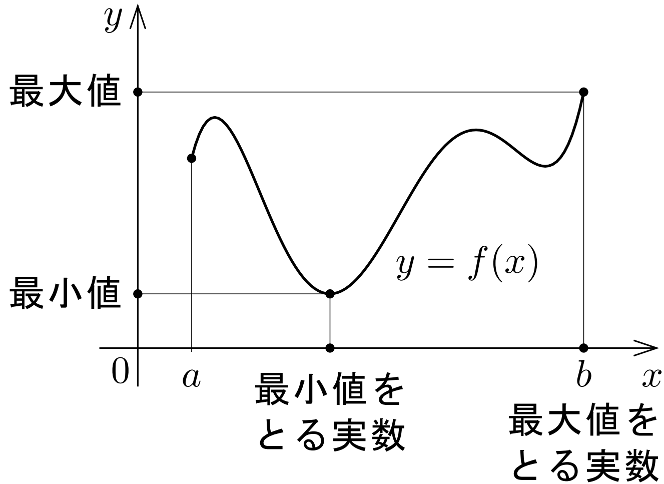
$$f(2) = 4 \ , \quad f(5) = 8 \ , \quad f(7) = 3 \ , \quad f(9) = 6 \ .$$

関数 f の最大値・最小値を求めよ．どの実数において最大値・最小値をとるかも記せ．

関数 f の値域は集合 $\{3,4,6,8\}$ である．関数 f は，5 において最大値 8 をとり，7 において最小値 3 をとる．

実数 a と b とについて $a<b$ とする．定義域が区間 $[a,b]$ である関数 f のグラフにおいて，最大値・最小値は例えば次の図のようになる．



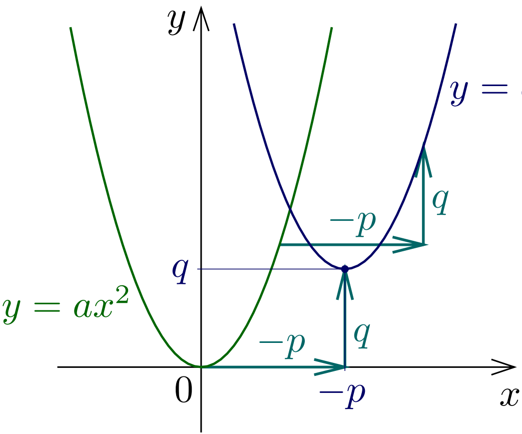


関数の最大値・最小値は無いこともある.

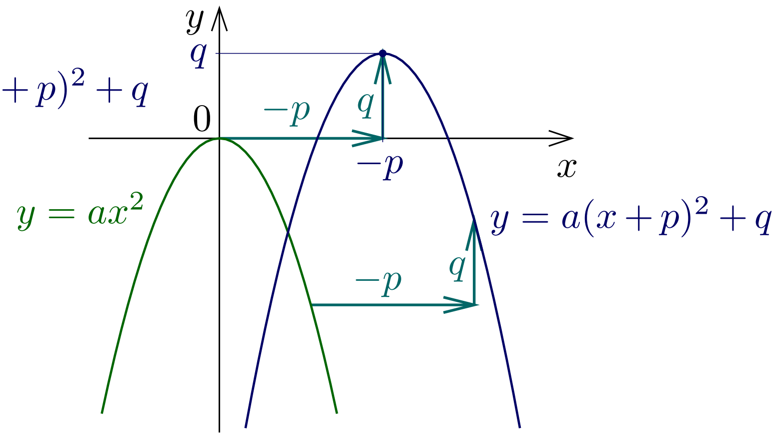
2 次関数について最大値・最小値を考えるには，2 次関数 f の値を表す 2 次式を平方完成する．a, p, q は定数で $a \neq 0$ とする．

　2 次関数について最大値・最小値を考えるには，2 次関数 f の値を表す 2 次式を平方完成する．a, p, q は定数で $a \neq 0$ とする．xy 座標平面において，2 次関数 $y = a(x+p)^2 + q$ のグラフは，関数 $y = ax^2$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた放物線である．

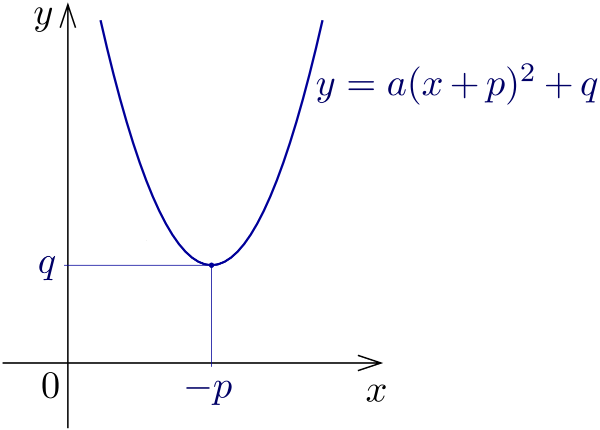
2 次関数について最大値・最小値を考えるには，2 次関数 f の値を表す 2 次式を平方完成する．a, p, q は定数で $a \neq 0$ とする．xy 座標平面において，2 次関数 $y = a(x+p)^2 + q$ のグラフは，関数 $y = ax^2$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた放物線である．例えば以下の図のようになる．



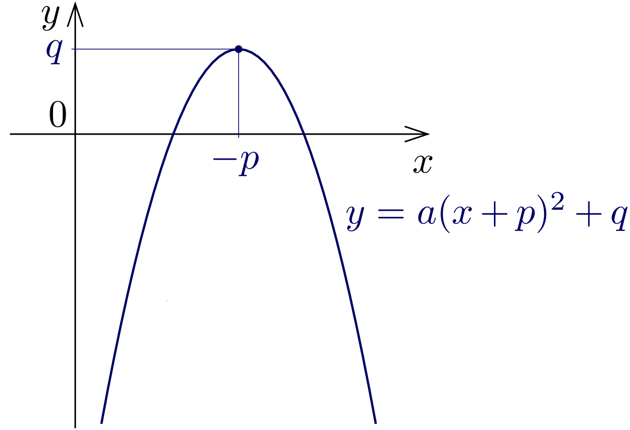
$a > 0$ のとき



$a < 0$ のとき



$a>0$ のとき



$a<0$ のとき

定義域が実数全体である 2 次関数 $f(x)=a(x+p)^2+q$ は次のようになる：

(1) $a>0$ のとき，区間 $(-\infty,-p]$ において単調減少で区間 $[-p,\infty)$ において単調増加なので，実数 $-p$ において最小値 q をとり，最大値はない；

(2) $a<0$ のとき，区間 $(-\infty,-p]$ において単調増加で区間 $[-p,\infty)$ において単調減少なので，実数 $-p$ において最大値 q をとり，最小値はない．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[1,\infty)$ である 2 次関数 f を $f(x)=2x^2-8x+5$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）.

$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[1,\infty)$ である 2 次関数 f を $f(x)=2x^2-8x+5$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

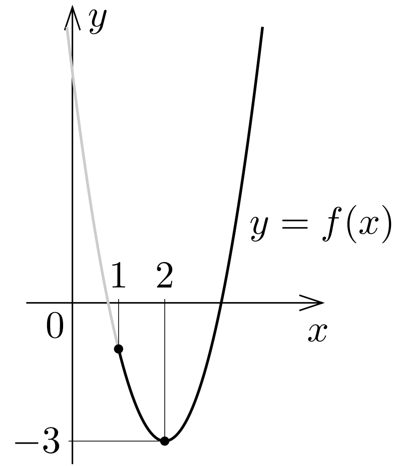
$f(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2-8x+5 = 2(x^2-4x)+5 \\
&= 2(x^2-4x+4)-8+5 \\
&= 2(x-2)^2-3 \ .
\end{aligned}
$$

例 定義域が区間 $[1,\infty)$ である 2 次関数 f を $f(x)=2x^2-8x+5$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

$f(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

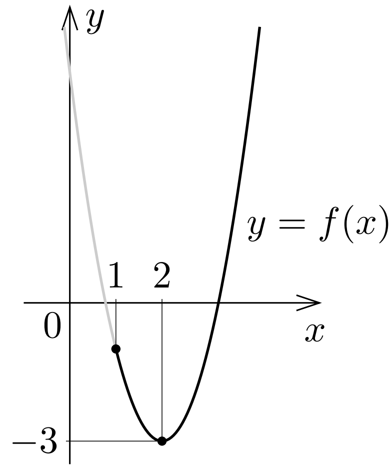
$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2-8x+5 = 2(x^2-4x)+5 \\
&= 2(x^2-4x+4)-8+5 \\
&= 2(x-2)^2-3 \ .
\end{aligned}
$$



$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[1,\infty)$ である 2 次関数 f を $f(x)=2x^2-8x+5$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）.

$f(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

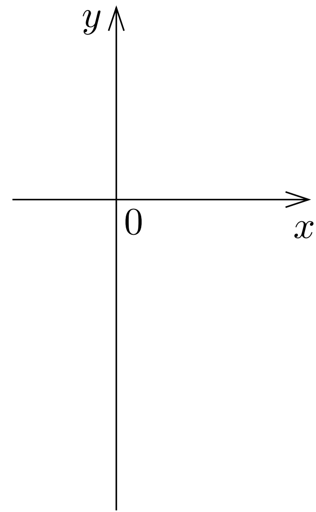
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2-8x+5 = 2(x^2-4x)+5 \\ &= 2(x^2-4x+4)-8+5 \\ &= 2(x-2)^2-3 \ . \end{aligned}$$



f は, 区間 $[1,2]$ で単調減少であり, 区間 $[2,\infty)$ で単調増加である. 従って関数 f は 2 において最小値 $f(2)=-3$ をとる. f の最大値はない.

$\boxed{終}$

問7.4.2 定義域が区間 $[-1,\infty)$ である 2 次関数 f を $f(x)=3x^2-6x-5$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

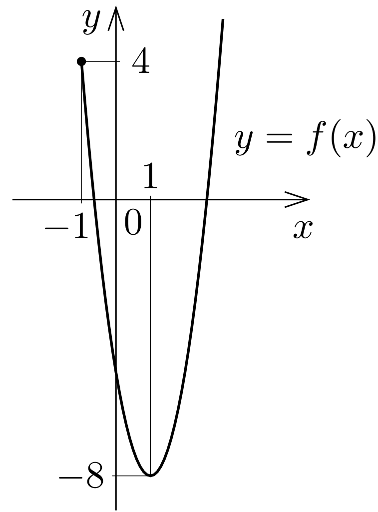


$f(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2-6x-5 \\
&= (\qquad\qquad) - \quad - \\
&= \qquad\qquad\qquad .
\end{aligned}
$$

f は，区間　　　　　で単調減少であり，区間　　　　　で単調増加である．従って関数 f は　　　において最　値 $f(\ )=$　　　をとる．f の最　値は

$\boxed{\text{問}7.4.2}$ 定義域が区間 $[-1,\infty)$ である 2 次関数 f を $f(x)=3x^2-6x-5$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

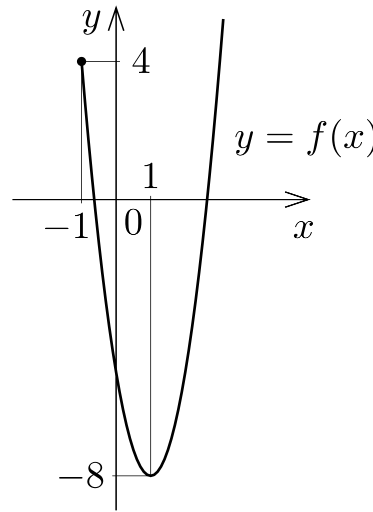


$f(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2-6x-5 \\
&= 3(x^2-2x+1)-3-5 \\
&= 3(x-1)^2-8 \ .
\end{aligned}
$$

f は，区間　　　　　　で単調減少であり，区間　　　　　で単調増加である．従って関数 f は　　　　において最　値 $f(\ \ )=$　　　　をとる．f の最　値は

$\boxed{\text{問}7.4.2}$ 定義域が区間 $[-1,\infty)$ である 2 次関数 f を $f(x)=3x^2-6x-5$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．



$f(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2-6x-5 \\ &= 3(x^2-2x+1)-3-5 \\ &= 3(x-1)^2-8 \ . \end{aligned}$$

f は，区間 $[-1,1]$ で単調減少であり，区間 $[1,\infty)$ で単調増加である．従って関数 f は 1 において最小値 $f(1)=-8$ をとる．f の最大値はない．

$\boxed{\text{終}}$

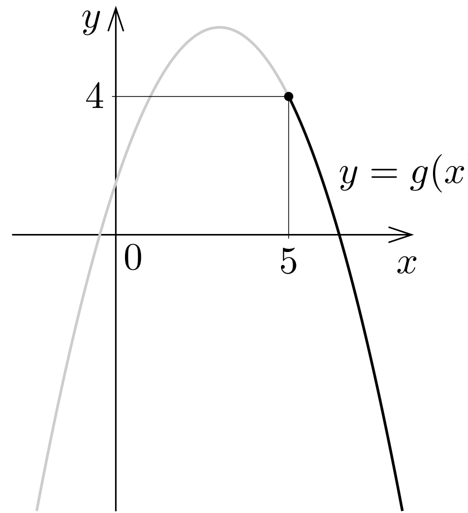
$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[5,\infty)$ である 2 次関数 g を $g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+\dfrac{3}{2}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[5,\infty)$ である 2 次関数 g を $g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+\dfrac{3}{2}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

$g(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$
\begin{aligned}
g(x) &= -\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x^2-6x)+\frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2-6x+9)+\frac{9}{2}+\frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{2}(x-3)^2+6 \ .
\end{aligned}
$$

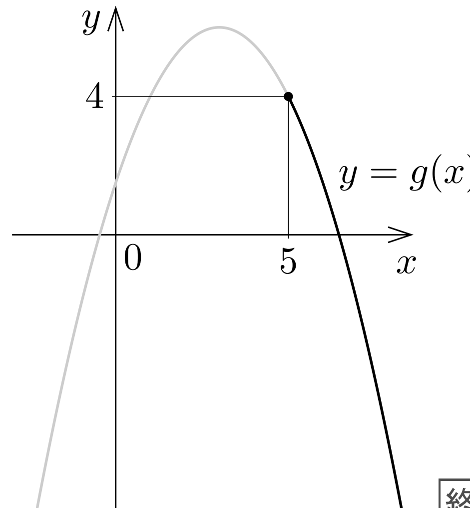
$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[5,\infty)$ である 2 次関数 g を $g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+\dfrac{3}{2}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．



$g(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$
\begin{aligned}
g(x)&=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x^2-6x)+\frac{3}{2}\\
&=-\frac{1}{2}(x^2-6x+9)+\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\\
&=-\frac{1}{2}(x-3)^2+6 \ .
\end{aligned}
$$

例 定義域が区間 $[5,\infty)$ である 2 次関数 g を $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．



$g(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$
\begin{aligned}
g(x) &= -\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x^2-6x)+\frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2-6x+9)+\frac{9}{2}+\frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{2}(x-3)^2+6 \ .
\end{aligned}
$$

これより，g は区間 $[5,\infty)$ で単調減少である．従って，関数 g は 5 において最大値 $g(5)=4$ をとる．g の最小値はない．

終

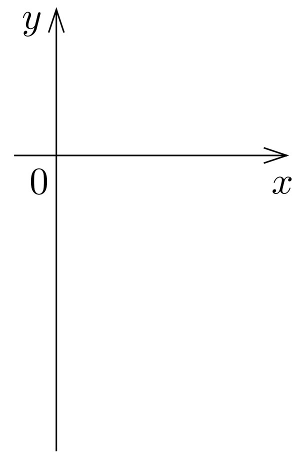
$\boxed{\text{問}7.4.3}$ 定義域が区間 $[1,\infty)$ である 2 次関数 g を $g(x)=-\dfrac{x^2+4x-11}{3}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$g(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$g(x)=-\frac{x^2+4x-11}{3}$$

$$=\quad(\qquad\qquad)+\quad+$$

$$=\qquad\qquad\qquad.$$

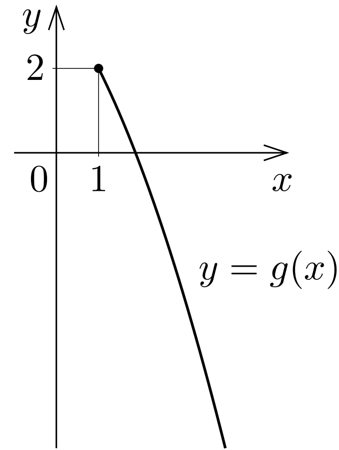


g は区間　　　　　で単調　　　である．従って関数 g は　　において最　値 $g(\quad)=$　　をとる．g の最　値は

$\boxed{\text{問}7.4.3}$ 定義域が区間 $[1,\infty)$ である 2 次関数 g を $g(x)=-\dfrac{x^2+4x-11}{3}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

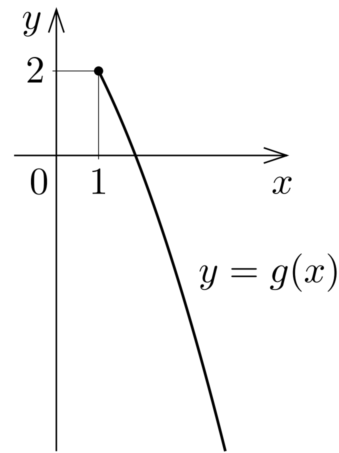
$g(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{x^2+4x-11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x^2+4x+4)+\frac{4}{3}+\frac{11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x+2)^2+5 \ . \end{aligned}$$



g は区間　　　　　で単調　　である．従って関数 g は　において最　値 $g(\ \ )=$　　をとる．g の最　値は

$\boxed{\text{問}\,7.4.3}$ 定義域が区間 $[1,\infty)$ である 2 次関数 g を $g(x)=-\dfrac{x^2+4x-11}{3}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．



$g(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$
\begin{aligned}
g(x) &= -\frac{x^2+4x-11}{3} \\
&= -\frac{1}{3}(x^2+4x+4)+\frac{4}{3}+\frac{11}{3} \\
&= -\frac{1}{3}(x+2)^2+5\ .
\end{aligned}
$$

g は区間 $[1,\infty)$ で単調減少である．従って関数 g は 1 において最大値 $g(1)=2$ をとる．g の最小値はない．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[2,8]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - 3x + 10$ と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[2,8]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - 3x + 10$ と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

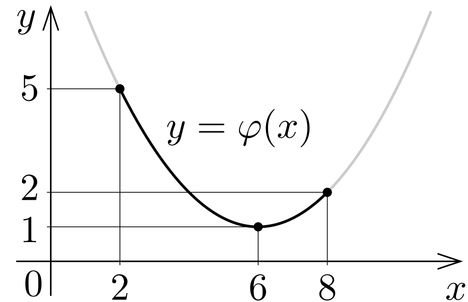
$\varphi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{4}x^2 - 3x + 10 = \frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 10 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) - 9 + 10 \\ &= \frac{1}{4}(x-6)^2 + 1 \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[2,8]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 10$ と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

$\varphi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

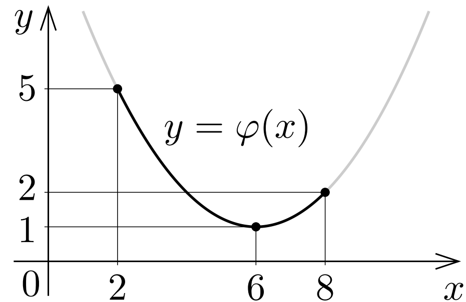
$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{4}x^2 - 3x + 10 = \frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 10 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) - 9 + 10 \\ &= \frac{1}{4}(x-6)^2 + 1 \ .\end{aligned}$$



例 定義域が区間 $[2,8]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x)=\frac{1}{4}x^2-3x+10$ と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

$\varphi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{4}x^2-3x+10=\frac{1}{4}(x^2-12x)+10\\&=\frac{1}{4}(x^2-12x+36)-9+10\\&=\frac{1}{4}(x-6)^2+1\ .\end{aligned}$$

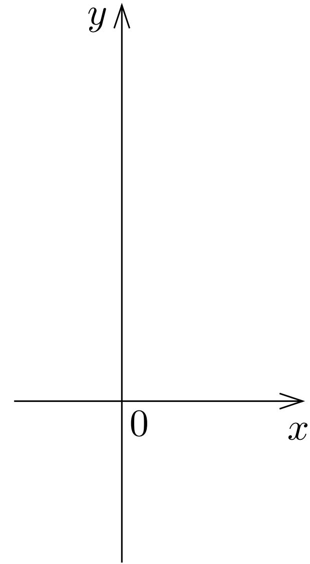


φ は，区間 $[2,6]$ で単調減少であり，区間 $[6,8]$ で単調増加である．従って，関数 φ は 6 において最小値 $\varphi(6)=1$ をとる． $\varphi(2)=5$ ，$\varphi(8)=2$ なので，φ は 2 において最大値 5 をとる． 終

$\boxed{問 7.4.4}$ 定義域が区間 $[-1,2]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x)=3x^2-4x-1$ と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$\varphi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 3x^2-4x-1 \\ &= \Big\{ \qquad\qquad \Big\} - \quad - \\ &= \qquad\qquad . \end{aligned}$$



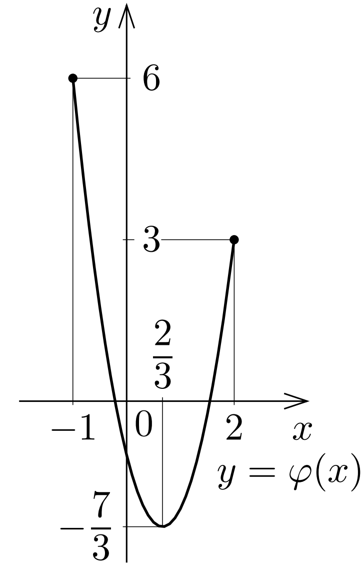
関数 φ は，区間　　　　　で単調減少であり，区間　　　　　で単調増加である．従って φ は　　において最　値 $\varphi\Big(\quad\Big) =$ 　　　をとる．

$\varphi(\quad) =$ 　，$\varphi(\ ) =$ 　なので，φ は　　　において最　値　　をとる．

$\boxed{問 7.4.4}$ 定義域が区間 $[-1, 2]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x) = 3x^2 - 4x - 1$ と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$\varphi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 3x^2 - 4x - 1 \\ &= 3\left\{x^2 - \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} - \frac{4}{3} - 1 \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}\ .\end{aligned}$$



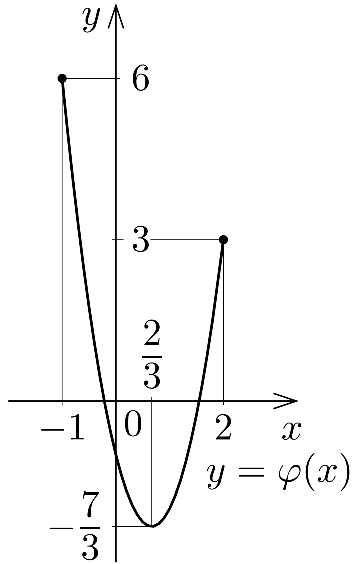
関数 φ は，区間　　　　　で単調減少であり，区間　　　　　で単調増加である．従って φ は　　において最　値 $\varphi\left(\quad\right) =$　　　をとる．

$\varphi(\quad) =$　，$\varphi(\ ) =$　　なので，φ は　　　において最　値　　をとる．

$\boxed{問 7.4.4}$ 定義域が区間 $[-1,2]$ である 2 次関数 φ を $\varphi(x) = 3x^2 - 4x - 1$ と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$\varphi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 3x^2 - 4x - 1\\ &= 3\left\{x^2 - \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} - \frac{4}{3} - 1\\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}\ .\end{aligned}$$



関数 φ は，区間 $\left[-1, \frac{2}{3}\right]$ で単調減少であり，区間 $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$ で単調増加である．従って φ は $\frac{2}{3}$ において最小値 $\varphi\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{7}{3}$ をとる．

$\varphi(-1) = 6$ ，$\varphi(2) = 3$ なので，φ は -1 において最大値 6 をとる． $\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[3,5]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$ と定める. 関数 ψ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）.

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[3,5]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$ と定める.
関数 ψ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）.

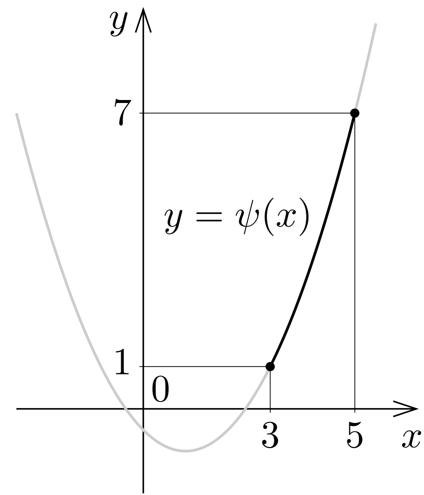
$\psi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 2x) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x - 2x + 1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1 \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[3,5]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{1}{2}$ と定める．関数 ψ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

$\psi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 2x) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(x - 2x + 1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1 \ .
\end{aligned}
$$

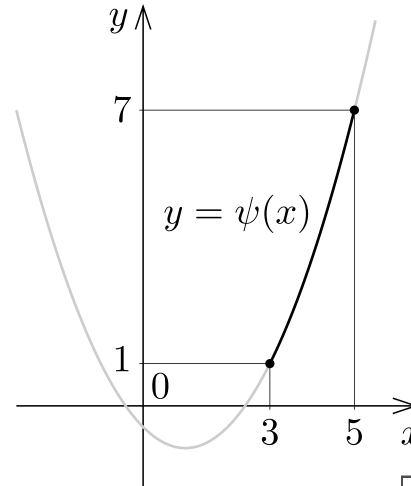


例 定義域が区間 $[3,5]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$ と定める．関数 ψ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

$\psi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

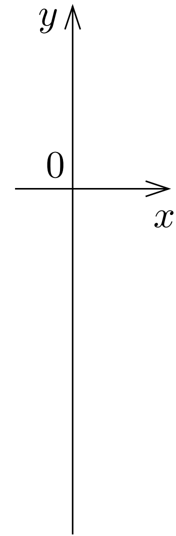
$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-2x)-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}(x-2x+1)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}(x-1)^2-1\ .\end{aligned}$$

ψ は区間 $[3,5]$ で単調増加である．従って関数 ψ は，3 において最小値 $\psi(3)=1$ をとり，5 において最大値 $\psi(5)=7$ をとる．



終

$\boxed{\text{問}7.4.5}$ 定義域が区間 $[-1\,,2]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x) = -2x^2 + 10x - 5$ と定める．関数 ψ の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．



$\psi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

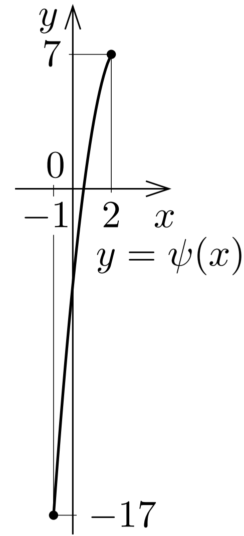
$$\begin{aligned} \psi(x) &= -2x^2 + 10x - 5 \\ &= \qquad \left\{ \qquad\qquad\qquad \right\} + \qquad - \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad . \end{aligned}$$

ψ は区間　　　　　　で単調　　　である．従って関数 ψ は，　　において最大値 $\psi(\ \ ) =$　　　をとり，　　において最小値 $\psi(\quad) =$　　　　をとる．

問7.4.5 定義域が区間 $[-1\,,2]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x)=-2x^2+10x-5$ と定める．関数 ψ の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$\psi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\psi(x)&=-2x^2+10x-5\\&=-2\left\{x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}+\frac{25}{2}-5\\&=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\ .\end{aligned}$$



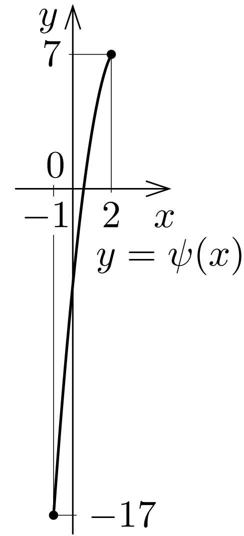
ψ は区間 　　　　　 で単調 　　 である．従って関数 ψ は， 　 において最大値 $\psi(\ )=$ 　 をとり， 　 において最小値 $\psi(\quad)=$ 　　 をとる．

$\boxed{問7.4.5}$ 定義域が区間 $[-1,2]$ である 2 次関数 ψ を $\psi(x) = -2x^2 + 10x - 5$ と定める．関数 ψ の最大値・最小値を調べよ（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ）．

$\psi(x)$ の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -2x^2 + 10x - 5\\ &= -2\left\{x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right\} + \frac{25}{2} - 5\\ &= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}\ .\end{aligned}$$

ψ は区間 $[-1,2]$ で単調増加である．従って関数 ψ は，2 において最大値 $\psi(2) = 7$ をとり，-1 において最小値 $\psi(-1) = -17$ をとる．



$\boxed{終}$