7.5 関数の合成

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{1,2,3\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1)=5\ ,\quad f(2)=9\ ,\quad f(3)=7\ .$$

定義域が集合 $\{5,6,7,8,9\}$ である関数 g を次のように定める：

$$g(5)=3\ ,\quad g(6)=1\ ,\quad g(7)=4\ ,\quad g(8)=2\ ,\quad g(9)=0\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{1,2,3\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1) = 5\ ,\quad f(2) = 9\ ,\quad f(3) = 7\ .$$

定義域が集合 $\{5,6,7,8,9\}$ である関数 g を次のように定める：

$$g(5) = 3\ ,\quad g(6) = 1\ ,\quad g(7) = 4\ ,\quad g(8) = 2\ ,\quad g(9) = 0\ .$$

このとき，次のように，f の定義域 $\{1,2,3\}$ の各要素 x に対して $g\bigl(f(x)\bigr)$ の値が唯一つ定まる：

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{1,2,3\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1) = 5\ ,\quad f(2) = 9\ ,\quad f(3) = 7\ .$$

定義域が集合 $\{5,6,7,8,9\}$ である関数 g を次のように定める：

$$g(5) = 3\ ,\quad g(6) = 1\ ,\quad g(7) = 4\ ,\quad g(8) = 2\ ,\quad g(9) = 0\ .$$

このとき，次のように，f の定義域 $\{1,2,3\}$ の各要素 x に対して $g\big(f(x)\big)$ の値が唯一つ定まる：

$$f(1) = 5 \text{ かつ } g(5) = 3 \text{ なので } g\big(f(1)\big) = g(\quad) = \qquad ,$$

$\boxed{例}$ 定義域が集合 $\{1,2,3\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1)=5\ ,\quad f(2)=9\ ,\quad f(3)=7\ .$$

定義域が集合 $\{5,6,7,8,9\}$ である関数 g を次のように定める：

$$g(5)=3\ ,\quad g(6)=1\ ,\quad g(7)=4\ ,\quad g(8)=2\ ,\quad g(9)=0\ .$$

このとき，次のように，f の定義域 $\{1,2,3\}$ の各要素 x に対して $g\bigl(f(x)\bigr)$ の値が唯一つ定まる：

$$f(1)=5 \text{ かつ } g(5)=3 \text{ なので } g\bigl(f(1)\bigr)=g(5)=\quad ,$$

例 定義域が集合 $\{1,2,3\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1)=5\ ,\quad f(2)=9\ ,\quad f(3)=7\ .$$

定義域が集合 $\{5,6,7,8,9\}$ である関数 g を次のように定める：

$$g(5)=3\ ,\quad g(6)=1\ ,\quad g(7)=4\ ,\quad g(8)=2\ ,\quad g(9)=0\ .$$

このとき，次のように，f の定義域 $\{1,2,3\}$ の各要素 x に対して $g\big(f(x)\big)$ の値が唯一つ定まる：

$$f(1)=5 \text{ かつ } g(5)=3 \text{ なので } g\big(f(1)\big)=g(5)=3\ ,$$

例 定義域が集合 $\{1,2,3\}$ である関数 f を次のように定める:

$$f(1)=5\ ,\quad f(2)=9\ ,\quad f(3)=7\ .$$

定義域が集合 $\{5,6,7,8,9\}$ である関数 g を次のように定める:

$$g(5)=3\ ,\quad g(6)=1\ ,\quad g(7)=4\ ,\quad g(8)=2\ ,\quad g(9)=0\ .$$

このとき，次のように，f の定義域 $\{1,2,3\}$ の各要素 x に対して $g\big(f(x)\big)$ の値が唯一つ定まる:

$$f(1)=5 \text{ かつ } g(5)=3 \text{ なので } g\big(f(1)\big)=g(5)=3\ ,$$

$$f(2)=9 \text{ かつ } g(9)=0 \text{ なので } g\big(f(2)\big)=g(\quad)=\quad\ ,$$

例 定義域が集合 $\{1,2,3\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1)=5\ ,\quad f(2)=9\ ,\quad f(3)=7\ .$$

定義域が集合 $\{5,6,7,8,9\}$ である関数 g を次のように定める：

$$g(5)=3\ ,\quad g(6)=1\ ,\quad g(7)=4\ ,\quad g(8)=2\ ,\quad g(9)=0\ .$$

このとき，次のように，f の定義域 $\{1,2,3\}$ の各要素 x に対して $g\big(f(x)\big)$ の値が唯一つ定まる：

$$f(1)=5 \text{ かつ } g(5)=3 \text{ なので } g\big(f(1)\big)=g(5)=3\ ,$$

$$f(2)=9 \text{ かつ } g(9)=0 \text{ なので } g\big(f(2)\big)=g(9)=\quad\ ,$$

例 定義域が集合 $\{1,2,3\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1) = 5\ ,\quad f(2) = 9\ ,\quad f(3) = 7\ .$$

定義域が集合 $\{5,6,7,8,9\}$ である関数 g を次のように定める：

$$g(5) = 3\ ,\quad g(6) = 1\ ,\quad g(7) = 4\ ,\quad g(8) = 2\ ,\quad g(9) = 0\ .$$

このとき，次のように，f の定義域 $\{1,2,3\}$ の各要素 x に対して $g\big(f(x)\big)$ の値が唯一つ定まる：

$$f(1) = 5 \text{ かつ } g(5) = 3 \text{ なので } g\big(f(1)\big) = g(5) = 3\ ,$$
$$f(2) = 9 \text{ かつ } g(9) = 0 \text{ なので } g\big(f(2)\big) = g(9) = 0\ ,$$

例 定義域が集合 $\{1,2,3\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1)=5\ ,\quad f(2)=9\ ,\quad f(3)=7\ .$$

定義域が集合 $\{5,6,7,8,9\}$ である関数 g を次のように定める：

$$g(5)=3\ ,\quad g(6)=1\ ,\quad g(7)=4\ ,\quad g(8)=2\ ,\quad g(9)=0\ .$$

このとき，次のように，f の定義域 $\{1,2,3\}$ の各要素 x に対して $g\big(f(x)\big)$ の値が唯一つ定まる：

$$f(1)=5 \text{ かつ } g(5)=3 \text{ なので } g\big(f(1)\big)=g(5)=3\ ,$$
$$f(2)=9 \text{ かつ } g(9)=0 \text{ なので } g\big(f(2)\big)=g(9)=0\ ,$$
$$f(3)=7 \text{ かつ } g(7)=4 \text{ なので } g\big(f(3)\big)=g(\quad)=\quad .$$

$\boxed{例}$ 定義域が集合 $\{1,2,3\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1)=5\ ,\quad f(2)=9\ ,\quad f(3)=7\ .$$

定義域が集合 $\{5,6,7,8,9\}$ である関数 g を次のように定める：

$$g(5)=3\ ,\quad g(6)=1\ ,\quad g(7)=4\ ,\quad g(8)=2\ ,\quad g(9)=0\ .$$

このとき，次のように，f の定義域 $\{1,2,3\}$ の各要素 x に対して $g\big(f(x)\big)$ の値が唯一つ定まる：

$$f(1)=5 \text{ かつ } g(5)=3 \text{ なので } g\big(f(1)\big)=g(5)=3\ ,$$
$$f(2)=9 \text{ かつ } g(9)=0 \text{ なので } g\big(f(2)\big)=g(9)=0\ ,$$
$$f(3)=7 \text{ かつ } g(7)=4 \text{ なので } g\big(f(3)\big)=g(7)=\quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{1,2,3\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1)=5\ ,\quad f(2)=9\ ,\quad f(3)=7\ .$$

定義域が集合 $\{5,6,7,8,9\}$ である関数 g を次のように定める：

$$g(5)=3\ ,\quad g(6)=1\ ,\quad g(7)=4\ ,\quad g(8)=2\ ,\quad g(9)=0\ .$$

このとき，次のように，f の定義域 $\{1,2,3\}$ の各要素 x に対して $g\big(f(x)\big)$ の値が唯一つ定まる：

$$f(1)=5 \text{ かつ } g(5)=3 \text{ なので } g\big(f(1)\big)=g(5)=3\ ,$$
$$f(2)=9 \text{ かつ } g(9)=0 \text{ なので } g\big(f(2)\big)=g(9)=0\ ,$$
$$f(3)=7 \text{ かつ } g(7)=4 \text{ なので } g\big(f(3)\big)=g(7)=4\ .$$

例 定義域が集合 $\{1,2,3\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(1) = 5\ ,\quad f(2) = 9\ ,\quad f(3) = 7\ .$$

定義域が集合 $\{5,6,7,8,9\}$ である関数 g を次のように定める：

$$g(5) = 3\ ,\quad g(6) = 1\ ,\quad g(7) = 4\ ,\quad g(8) = 2\ ,\quad g(9) = 0\ .$$

このとき，次のように，f の定義域 $\{1,2,3\}$ の各要素 x に対して $g\big(f(x)\big)$ の値が唯一つ定まる：

$$f(1)=5 \text{ かつ } g(5)=3 \text{ なので } g\big(f(1)\big)=g(5)=3\ ,$$
$$f(2)=9 \text{ かつ } g(9)=0 \text{ なので } g\big(f(2)\big)=g(9)=0\ ,$$
$$f(3)=7 \text{ かつ } g(7)=4 \text{ なので } g\big(f(3)\big)=g(7)=4\ .$$

f の定義域 $\{1,2,3\}$ の各要素 x に対して $g\big(f(x)\big)$ の値を定める関数を f と g との合成関数という．この f と g との合成関数の定義域は f の定義域 $\{1,2,3\}$ である． 終

一般的に，関数 f の定義域の各要素 x における f の値 $f(x)$ が関数 g の定義域に属すとき，$f(x)$ における g の値 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があるので，f の定義域の各要素 x に対して $g\bigl(f(x)\bigr)$ を定める対応は関数になる；

一般的に，関数 f の定義域の各要素 x における f の値 $f(x)$ が関数 g の定義域に属すとき，$f(x)$ における g の値 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があるので，f の定義域の各要素 x に対して $g\bigl(f(x)\bigr)$ を定める対応は関数になる；この関数を f と g との合成関数という.

一般的に，関数 f の定義域の各要素 x における f の値 $f(x)$ が関数 g の定義域に属すとき，$f(x)$ における g の値 $g\big(f(x)\big)$ があるので，f の定義域の各要素 x に対して $g\big(f(x)\big)$ を定める対応は関数になる；この関数を f と g との合成関数という．

定義　関数 f の値域が関数 g の定義域に含まれるとき，f の定義域の各要素 x に $g\big(f(x)\big)$ を定める関数を f と g との合成関数という．

一般的に，関数 f の定義域の各要素 x における f の値 $f(x)$ が関数 g の定義域に属すとき，$f(x)$ における g の値 $g\big(f(x)\big)$ があるので，f の定義域の各要素 x に対して $g\big(f(x)\big)$ を定める対応は関数になる；この関数を f と g との合成関数という．

定義　関数 f の値域が関数 g の定義域に含まれるとき，f の定義域の各要素 x に $g\big(f(x)\big)$ を定める関数を f と g との合成関数という．

変数 x の値が g の定義域に属すときに限り $g(x)$ の値がある．なので，$f(x)$ の値が g の定義域に属すときに限り $g\big(f(x)\big)$ の値がある．

　一般的に，関数 f の定義域の各要素 x における f の値 $f(x)$ が関数 g の定義域に属すとき，$f(x)$ における g の値 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があるので，f の定義域の各要素 x に対して $g\bigl(f(x)\bigr)$ を定める対応は関数になる；この関数を f と g との合成関数という.

定義　関数 f の値域が関数 g の定義域に含まれるとき，f の定義域の各要素 x に $g\bigl(f(x)\bigr)$ を定める関数を f と g との合成関数という.

　変数 x の値が g の定義域に属すときに限り $g(x)$ の値がある．なので，$f(x)$ の値が g の定義域に属すときに限り $g\bigl(f(x)\bigr)$ の値がある．つまり，$g\bigl(f(x)\bigr)$ の値があるためには f の値 $f(x)$ が g の定義域に属さなければならない.

　一般的に，関数 f の定義域の各要素 x における f の値 $f(x)$ が関数 g の定義域に属すとき，$f(x)$ における g の値 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があるので，f の定義域の各要素 x に対して $g\bigl(f(x)\bigr)$ を定める対応は関数になる；この関数を f と g との合成関数という.

定義　関数 f の値域が関数 g の定義域に含まれるとき，f の定義域の各要素 x に $g\bigl(f(x)\bigr)$ を定める関数を f と g との合成関数という.

　変数 x の値が g の定義域に属すときに限り $g(x)$ の値がある．なので，$f(x)$ の値が g の定義域に属すときに限り $g\bigl(f(x)\bigr)$ の値がある．つまり，$g\bigl(f(x)\bigr)$ の値があるためには f の値 $f(x)$ が g の定義域に属さなければならない．故に，合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ を考えるには，f の値の全体つまり f の値域が g の定義域に含まれなければならない.

関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(x)$ の定義域に含まれるとき, $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ は, f の定義域の各要素 x における値 $g\big(f(x)\big)$ を定める. よって合成関数 $g\big(f(x)\big)$ の定義域は $f(x)$ の定義域である.

　関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(x)$ の定義域に含まれるとき，$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ は，f の定義域の各要素 x における値 $g\big(f(x)\big)$ を定める．よって合成関数 $g\big(f(x)\big)$ の定義域は $f(x)$ の定義域である．

定理　関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(x)$ の定義域に含まれるとき，$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ の定義域は $f(x)$ の定義域である．

$\boxed{問 7.5.1}$ 定義域が集合 $\{1,3,7\}$ である関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(1) = 2\ ,\quad f(3) = 6\ ,\quad f(7) = 8\ .$$

定義域が集合 $\{2,4,6,8\}$ である関数 $g(x)$ を次のように定める：

$$g(2) = 5\ ,\quad g(4) = 1\ ,\quad g(6) = 0\ ,\quad g(8) = 9\ .$$

$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ を求める.

$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ の定義域は集合 $\{\qquad\}$ であり,

$$g\big(f(\ \ )\big) = g(\ \ ) = \quad ,\qquad g\big(f(\ \ )\big) = g(\ \ ) = \quad ,\qquad g\big(f(\ \ )\big) = g(\ \ ) = \quad .$$

問7.5.1 定義域が集合 $\{1,3,7\}$ である関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(1) = 2\ , \quad f(3) = 6\ , \quad f(7) = 8\ .$$

定義域が集合 $\{2,4,6,8\}$ である関数 $g(x)$ を次のように定める：

$$g(2) = 5\ , \quad g(4) = 1\ , \quad g(6) = 0\ , \quad g(8) = 9\ .$$

$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ を求める.

$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ の定義域は集合 $\{1,3,7\}$ であり,

$$g\big(f(1)\big) = g(2) = 5\ , \qquad g\big(f(3)\big) = g(6) = 0\ , \qquad g\big(f(7)\big) = g(8) = 9\ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[3, \infty)$ である関数 $f(x)$ を $f(x) = 2x - 1$ と定め，定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 $g(x)$ を $g(x) = x^2 + 4$ と定める．

例 定義域が区間 $[3,\infty)$ である関数 $f(x)$ を $f(x)=2x-1$ と定め，定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 $g(x)$ を $g(x)=x^2+4$ と定める．$f(x)$ の値域は，区間 $[5,\infty)$ なので，$g(x)$ の定義域の区間 $[0,\infty)$ に含まれる；よって $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ がある．この合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ を求める．

例 定義域が区間 $[3,\infty)$ である関数 $f(x)$ を $f(x)=2x-1$ と定め，定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 $g(x)$ を $g(x)=x^2+4$ と定める．$f(x)$ の値域は，区間 $[5,\infty)$ なので，$g(x)$ の定義域の区間 $[0,\infty)$ に含まれる；よって $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ がある．この合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ を求める．また，$g(x)$ の値域は，区間 $[4,\infty)$ なので，$f(x)$ の定義域の区間 $[3,\infty)$ に含まれる；よって $g(x)$ と $f(x)$ との合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ がある．この合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ を求める．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[3,\infty)$ である関数 $f(x)$ を $f(x)=2x-1$ と定め，定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 $g(x)$ を $g(x)=x^2+4$ と定める．$f(x)$ の値域は，区間 $[5,\infty)$ なので，$g(x)$ の定義域の区間 $[0,\infty)$ に含まれる；よって $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ がある．この合成関数 $g\big(f(x)\big)$ を求める．また，$g(x)$ の値域は，区間 $[4,\infty)$ なので，$f(x)$ の定義域の区間 $[3,\infty)$ に含まれる；よって $g(x)$ と $f(x)$ との合成関数 $f\big(g(x)\big)$ がある．この合成関数 $f\big(g(x)\big)$ を求める．

合成関数 $g\big(f(x)\big)$ の定義域は，関数 $f(x)$ の定義域なので，区間 $[3,\infty)$ である．この区間 $[3,\infty)$ の各実数 x について，

$$g\big(f(x)\big)=g(2x-1)=(2x-1)^2+4=4x^2-4x+1+4=4x^2-4x+5\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[3,\infty)$ である関数 $f(x)$ を $f(x)=2x-1$ と定め，定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 $g(x)$ を $g(x)=x^2+4$ と定める．$f(x)$ の値域は，区間 $[5,\infty)$ なので，$g(x)$ の定義域の区間 $[0,\infty)$ に含まれる；よって $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ がある．この合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ を求める．また，$g(x)$ の値域は，区間 $[4,\infty)$ なので，$f(x)$ の定義域の区間 $[3,\infty)$ に含まれる；よって $g(x)$ と $f(x)$ との合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ がある．この合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ を求める．

合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ の定義域は，関数 $f(x)$ の定義域なので，区間 $[3,\infty)$ である．この区間 $[3,\infty)$ の各実数 x について，

$$g\bigl(f(x)\bigr)=g(2x-1)=(2x-1)^2+4=4x^2-4x+1+4=4x^2-4x+5\ .$$

合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ の定義域は，関数 $g(x)$ の定義域なので，区間 $[0,\infty)$ である．この区間 $[0,\infty)$ の各実数 x について，

$$f\bigl(g(x)\bigr)=f(x^2+4)=2(x^2+4)-1=2x^2+8-1=2x^2+7\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 7.5.2}$ 定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $f(x)$ を $f(x)=3x-2$ と定め，定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 $g(x)$ を $g(x)=\dfrac{1}{3}x^2+5$ と定める．関数 $f(x)$ の値域は，区間 $[4,\infty)$ なので，関数 $g(x)$ の定義域の区間 $[0,\infty)$ に含まれる．よって $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ ができる．この合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ を求めよ．関数 $g(x)$ の値域は，区間 $[5,\infty)$ なので，関数 $f(x)$ の定義域の区間 $[4,\infty)$ に含まれる．よって $g(x)$ と $f(x)$ との合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ ができる．この合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ を求めよ．結果は降冪の順に整理せよ．

合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ の定義域は，関数 　　　 の定義域なので，区間 　　　 である．この区間 　　　 の各実数 x について，

$$g\bigl(f(x)\bigr) = \qquad = \qquad = \qquad .$$

合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ の定義域は，関数 　　　 の定義域なので，区間 　　　 である．この区間 　　　 の各実数 x について，

$$f\bigl(g(x)\bigr) = \qquad = \qquad = \qquad .$$

$\boxed{問 7.5.2}$ 定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $f(x)$ を $f(x)=3x-2$ と定め，定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 $g(x)$ を $g(x)=\dfrac{1}{3}x^2+5$ と定める．関数 $f(x)$ の値域は，区間 $[4,\infty)$ なので，関数 $g(x)$ の定義域の区間 $[0,\infty)$ に含まれる．よって $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ ができる．この合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ を求めよ．関数 $g(x)$ の値域は，区間 $[5,\infty)$ なので，関数 $f(x)$ の定義域の区間 $[4,\infty)$ に含まれる．よって $g(x)$ と $f(x)$ との合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ ができる．この合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ を求めよ．結果は降冪の順に整理せよ．

　合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ の定義域は，関数 $f(x)$ の定義域なので，区間 $[2,\infty)$ である．この区間 $[2,\infty)$ の各実数 x について，

$$g\bigl(f(x)\bigr) = g(3x-2) = \frac{1}{3}(3x-2)^2+5 = 3x^2-4x+\frac{19}{3}\ .$$

合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ の定義域は，関数 $g(x)$ の定義域なので，区間 $[0,\infty)$ である．この区間 $[0,\infty)$ の各実数 x について，

$$f\bigl(g(x)\bigr) = f\Bigl(\frac{1}{3}x^2+5\Bigr) = 3\Bigl(\frac{1}{3}x^2+5\Bigr)-2 = x^2+13\ .$$

$\boxed{終}$