## 7.6 逆関数

関数 $f$ の定義域の要素を表す変数 $x$ 及び $f$ の値域の要素を表す変数 $y$ について $y = f(x)$ とする.

関数 $f$ の定義域の要素を表す変数 $x$ 及び $f$ の値域の要素を表す変数 $y$ について $y = f(x)$ とする．$f$ によって，$x$ の値に対して $y$ の値が唯一つ定まる．

関数 $f$ の定義域の要素を表す変数 $x$ 及び $f$ の値域の要素を表す変数 $y$ について $y = f(x)$ とする．$f$ によって，$x$ の値に対して $y$ の値が唯一つ定まる．逆に，$y$ の値に対して $x$ の値が唯一つ定まるとき，$y$ の値に対して $x$ の値を定める関数ができる．

関数 $f$ の定義域の要素を表す変数 $x$ 及び $f$ の値域の要素を表す変数 $y$ について $y = f(x)$ とする．$f$ によって，$x$ の値に対して $y$ の値が唯一つ定まる．逆に，$y$ の値に対して $x$ の値が唯一つ定まるとき，$y$ の値に対して $x$ の値を定める関数ができる．この関数を $f$ の逆関数という．

関数 $f$ の定義域の要素を表す変数 $x$ 及び $f$ の値域の要素を表す変数 $y$ について $y = f(x)$ とする．$f$ によって，$x$ の値に対して $y$ の値が唯一つ定まる．逆に，$y$ の値に対して $x$ の値が唯一つ定まるとき，$y$ の値に対して $x$ の値を定める関数ができる．この関数を $f$ の逆関数という．

**定義**　関数 $f$ の値域の各要素 $y$ に対して $y = f(x)$ となる $f$ の定義域の要素 $x$ が唯一つあるとき，関数 $f$ の値域の各要素 $y$ に対して $y = f(x)$ となる $f$ の定義域の要素 $x$ を定める対応を $f$ の逆関数といい，$f^{-1}$ と書き表す．関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ の定義域は $f$ の値域である．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 $f$ を次のように定める：

$$f(3)=8\ ,\quad f(5)=2\ ,\quad f(9)=6\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 $f$ を次のように定める：

$$f(3)=8\ ,\quad f(5)=2\ ,\quad f(9)=6\ .$$

$f$ の値域は集合 $\{2,6,8\}$ である.

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 $f$ を次のように定める：

$$f(3) = 8 \ , \quad f(5) = 2 \ , \quad f(9) = 6 \ .$$

$f$ の値域は集合 $\{2,6,8\}$ である. $f(x) = 2$ となる数 $x$ は $5$ だけである.

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 $f$ を次のように定める：

$$f(3) = 8\ ,\quad f(5) = 2\ ,\quad f(9) = 6\ .$$

$f$ の値域は集合 $\{2,6,8\}$ である． $f(x) = 2$ となる数 $x$ は $5$ だけである．
$f(x) = 6$ となる数 $x$ は $9$ だけである．

$\boxed{例}$ 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 $f$ を次のように定める：

$$f(3) = 8\ ,\quad f(5) = 2\ ,\quad f(9) = 6\ .$$

$f$ の値域は集合 $\{2,6,8\}$ である． $f(x)=2$ となる数 $x$ は $5$ だけである． $f(x)=6$ となる数 $x$ は $9$ だけである． $f(x)=8$ となる数 $x$ は $3$ だけである．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 $f$ を次のように定める：

$$f(3) = 8\ ,\quad f(5) = 2\ ,\quad f(9) = 6\ .$$

$f$ の値域は集合 $\{2,6,8\}$ である． $f(x) = 2$ となる数 $x$ は $5$ だけである． $f(x) = 6$ となる数 $x$ は $9$ だけである． $f(x) = 8$ となる数 $x$ は $3$ だけである．このように，$f$ の値域 $\{2,6,8\}$ の各要素 $y$ に対して $f(x) = y$ となる $f$ の定義域の要素 $x$ が唯一つ定まる．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 $f$ を次のように定める：

$$f(3) = 8 \ , \quad f(5) = 2 \ , \quad f(9) = 6 \ .$$

$f$ の値域は集合 $\{2,6,8\}$ である． $f(x)=2$ となる数 $x$ は $5$ だけである． $f(x)=6$ となる数 $x$ は $9$ だけである． $f(x)=8$ となる数 $x$ は $3$ だけである． このように，$f$ の値域 $\{2,6,8\}$ の各要素 $y$ に対して $f(x)=y$ となる $f$ の定義域の要素 $x$ が唯一つ定まる．よって $f$ の逆関数 $f^{-1}$ がある．

例 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 $f$ を次のように定める：

$$f(3)=8\ ,\quad f(5)=2\ ,\quad f(9)=6\ .$$

$f$ の値域は集合 $\{2,6,8\}$ である． $f(x)=2$ となる数 $x$ は $5$ だけである． $f(x)=6$ となる数 $x$ は $9$ だけである． $f(x)=8$ となる数 $x$ は $3$ だけである． このように，$f$ の値域 $\{2,6,8\}$ の各要素 $y$ に対して $f(x)=y$ となる $f$ の定義域の要素 $x$ が唯一つ定まる． よって $f$ の逆関数 $f^{-1}$ がある． $f^{-1}$ の定義域は $\{2,6,8\}$ であり，

$$f^{-1}(2)=5\ ,\quad f^{-1}(6)=9\ ,\quad f^{-1}(8)=3\ .$$

終

$\boxed{\text{問}7.6.1}$ 定義域が集合 $\{0,4,6\}$ である関数 $f$ を次のように定める：

$$f(0) = 7 \ , \quad f(4) = 1 \ , \quad f(6) = 5 \ .$$

関数 $f$ の逆関数を調べよ．

$f$ の値域は集合 $\{\ \ ,\ \ ,\ \ \}$ である． $f(x) =\ \ $ となる数 $x$ は $\ \ $ だけである． $f(x) =\ \ $ となる数 $x$ は $\ \ $ だけである． $f(x) =\ \ $ となる数 $x$ は $\ \ $ だけである．よって， $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があり， $f^{-1}$ の定義域は $\{\ \ ,\ \ ,\ \ \}$ であり，

$$f^{-1}(\ \ ) = \quad , \quad f^{-1}(\ \ ) = \quad , \quad f^{-1}(\ \ ) = \quad .$$

$\boxed{問7.6.1}$ 定義域が集合 $\{0,4,6\}$ である関数 $f$ を次のように定める：

$$f(0) = 7\ , \quad f(4) = 1\ , \quad f(6) = 5\ .$$

関数 $f$ の逆関数を調べよ.

$f$ の値域は集合 $\{1,5,7\}$ である． $f(x) = 1$ となる数 $x$ は $4$ だけである． $f(x) = 5$ となる数 $x$ は $6$ だけである． $f(x) = 7$ となる数 $x$ は $0$ だけである．よって， $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があり， $f^{-1}$ の定義域は $\{1,5,7\}$ であり，

$$f^{-1}(1) = 4\ , \quad f^{-1}(5) = 6\ , \quad f^{-1}(7) = 0\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[5, \infty)$ である関数 $f$ を $f(x) = x + 4$ と定める. $f$ の逆関数を調べる.

例 定義域が区間 $[5,\infty)$ である関数 $f$ を $f(x)=x+4$ と定める. $f$ の逆関数を調べる.

関数 $f$ の値域は区間 $[9,\infty)$ である.

終

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[5,\infty)$ である関数 $f$ を $f(x)=x+4$ と定める. $f$ の逆関数を調べる.

関数 $f$ の値域は区間 $[9,\infty)$ である. この区間 $[9,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[5,\infty)$ の実数 $x$ を求める.

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[5,\infty)$ である関数 $f$ を $f(x)=x+4$ と定める．$f$ の逆関数を調べる．

関数 $f$ の値域は区間 $[9,\infty)$ である．この区間 $[9,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[5,\infty)$ の実数 $x$ を求める．$y=x+4$ とすると，$x=y-4$ ，$y\geq 9$ なので $x=y-4\geq 5$ ．

$\boxed{終}$

例 定義域が区間 $[5,\infty)$ である関数 $f$ を $f(x)=x+4$ と定める．$f$ の逆関数を調べる．

関数 $f$ の値域は区間 $[9,\infty)$ である．この区間 $[9,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[5,\infty)$ の実数 $x$ を求める．$y=x+4$ とすると，$x=y-4$ ，$y\geq 9$ なので $x=y-4\geq 5$ ．このように，区間 $[9,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[5,\infty)$ の実数 $x$ は $x=y-4$ と唯一に定まる．

終

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[5,\infty)$ である関数 $f$ を $f(x)=x+4$ と定める．$f$ の逆関数を調べる．

関数 $f$ の値域は区間 $[9,\infty)$ である．この区間 $[9,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[5,\infty)$ の実数 $x$ を求める．$y=x+4$ とすると，$x=y-4$ ，$y\geq 9$ なので $x=y-4\geq 5$ ．このように，区間 $[9,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[5,\infty)$ の実数 $x$ は $x=y-4$ と唯一に定まる．故に，$f$ の逆関数 $f^{-1}$ があり，$f^{-1}$ の定義域である区間 $[9,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $f^{-1}(y)=y-4$ ．

$\boxed{\text{終}}$

例 定義域が区間 $[5,\infty)$ である関数 $f$ を $f(x)=x+4$ と定める．$f$ の逆関数を調べる．

関数 $f$ の値域は区間 $[9,\infty)$ である．この区間 $[9,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[5,\infty)$ の実数 $x$ を求める．$y=x+4$ とすると，$x=y-4$ ，$y\geq 9$ なので $x=y-4\geq 5$ ．このように，区間 $[9,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[5,\infty)$ の実数 $x$ は $x=y-4$ と唯一に定まる．故に，$f$ の逆関数 $f^{-1}$ があり，$f^{-1}$ の定義域である区間 $[9,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $f^{-1}(y)=y-4$ ．通常 $f^{-1}$ についても独立変数を $x$ にする．$f$ の逆関数 $f^{-1}$ の定義域である区間 $[9,\infty)$ の各実数 $x$ に対して $f^{-1}(x)=x-4$ ．

終

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $g$ を $g(x)=3x$ と定める. $g$ の逆関数を調べる.

例 定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $g$ を $g(x)=3x$ と定める. $g$ の逆関数を調べる.

関数 $g$ の値域は区間 $[6,\infty)$ である.

終

例 定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $g$ を $g(x)=3x$ と定める．$g$ の逆関数を調べる．

関数 $g$ の値域は区間 $[6,\infty)$ である．この区間 $[6,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=g(x)$ となる区間 $[2,\infty)$ の実数 $x$ を求める．

終

例 定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $g$ を $g(x)=3x$ と定める．$g$ の逆関数を調べる．

関数 $g$ の値域は区間 $[6,\infty)$ である．この区間 $[6,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=g(x)$ となる区間 $[2,\infty)$ の実数 $x$ を求める．$y=3x$ とすると，$x=\dfrac{y}{3}$ ，$y\geq 6$ なので $x=\dfrac{y}{3}\geq 2$ ．

終

例 定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $g$ を $g(x)=3x$ と定める．$g$ の逆関数を調べる．

関数 $g$ の値域は区間 $[6,\infty)$ である．この区間 $[6,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=g(x)$ となる区間 $[2,\infty)$ の実数 $x$ を求める．$y=3x$ とすると，$x=\dfrac{y}{3}$，$y \geq 6$ なので $x=\dfrac{y}{3} \geq 2$．このように，区間 $[6,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=g(x)$ となる区間 $[2,\infty)$ の実数 $x$ は $x=\dfrac{y}{3}$ と唯一つに定まる．

終

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $g$ を $g(x)=3x$ と定める．$g$ の逆関数を調べる．

関数 $g$ の値域は区間 $[6,\infty)$ である．この区間 $[6,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=g(x)$ となる区間 $[2,\infty)$ の実数 $x$ を求める．$y=3x$ とすると，$x=\dfrac{y}{3}$ ，$y \geq 6$ なので $x=\dfrac{y}{3} \geq 2$ ．このように，区間 $[6,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=g(x)$ となる区間 $[2,\infty)$ の実数 $x$ は $x=\dfrac{y}{3}$ と唯一つに定まる．故に，$g$ の逆関数 $g^{-1}$ があり，$g^{-1}$ の定義域である区間 $[6,\infty)$ の各実数 $y$ について $g^{-1}(y)=\dfrac{y}{3}$ ．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $g$ を $g(x)=3x$ と定める．$g$ の逆関数を調べる．

　関数 $g$ の値域は区間 $[6,\infty)$ である．この区間 $[6,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=g(x)$ となる区間 $[2,\infty)$ の実数 $x$ を求める．$y=3x$ とすると，$x=\dfrac{y}{3}$，$y\geq 6$ なので $x=\dfrac{y}{3}\geq 2$．このように，区間 $[6,\infty)$ の各実数 $y$ に対して $y=g(x)$ となる区間 $[2,\infty)$ の実数 $x$ は $x=\dfrac{y}{3}$ と唯一つに定まる．故に，$g$ の逆関数 $g^{-1}$ があり，$g^{-1}$ の定義域である区間 $[6,\infty)$ の各実数 $y$ について $g^{-1}(y)=\dfrac{y}{3}$．通常 $g^{-1}$ についても独立変数を $x$ にする．$g$ の逆関数 $g^{-1}$ の定義域である区間 $[6,\infty)$ の各実数 $x$ について $g^{-1}(x)=\dfrac{x}{3}$．$\boxed{\text{終}}$

大雑把にいうと，関数 $x+4$ の逆関数は関数 $x-4$ で，関数 $3x$ の逆関数は関数 $\frac{x}{3}$ である．このように，関数 $f$ の逆関数とは，$f$ の計算と逆の計算をする関数である．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 $f$ を $f(x)=3x+1$ と定める. $f$ の逆関数を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 $f$ を $f(x)=3x+1$ と定める. $f$ の逆関数を調べる.

$f$ の値域は区間 $[1,7]$ である.

$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 $f$ を $f(x)=3x+1$ と定める. $f$ の逆関数を調べる.

$f$ の値域は区間 $[1,7]$ である. この区間 $[1,7]$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 $x$ を求める.

$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 $f$ を $f(x)=3x+1$ と定める. $f$ の逆関数を調べる.

$f$ の値域は区間 $[1,7]$ である. この区間 $[1,7]$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 $x$ を求める. $y=3x+1$ とすると,

$$3x=y-1\ , \quad x=\frac{y-1}{3}\ .$$

$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 $f$ を $f(x)=3x+1$ と定める．$f$ の逆関数を調べる．

$f$ の値域は区間 $[1,7]$ である．この区間 $[1,7]$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 $x$ を求める．$y=3x+1$ とすると，$3x=y-1$ ，$x=\dfrac{y-1}{3}$ ．$1\leq y\leq 7$ なので，$1\leq 3x+1\leq 7$ ，$0\leq 3x\leq 6$ ，$0\leq x\leq 2$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 $f$ を $f(x)=3x+1$ と定める．$f$ の逆関数を調べる．

$f$ の値域は区間 $[1,7]$ である．この区間 $[1,7]$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 $x$ を求める． $y=3x+1$ とすると，$3x=y-1$ ，$x=\dfrac{y-1}{3}$ ． $1\leq y\leq 7$ なので， $1\leq 3x+1\leq 7$ ， $0\leq 3x\leq 6$ ， $0\leq x\leq 2$ ．区間 $[1,7]$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 $x$ が $x=\dfrac{y-1}{3}$ と唯一つに定まる．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 $f$ を $f(x)=3x+1$ と定める．$f$ の逆関数を調べる．

$f$ の値域は区間 $[1,7]$ である．この区間 $[1,7]$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 $x$ を求める． $y=3x+1$ とすると，$3x=y-1$ ， $x=\dfrac{y-1}{3}$ ． $1\leq y\leq 7$ なので， $1\leq 3x+1\leq 7$ ， $0\leq 3x\leq 6$ ，$0\leq x\leq 2$ ．区間 $[1,7]$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 $x$ が $x=\dfrac{y-1}{3}$ と唯一つに定まる．故に，$f$ の逆関数 $f^{-1}$ があり， $f^{-1}$ の定義域である区間 $[1,7]$ の各実数 $x$ に対して $f^{-1}(y)=\dfrac{y-1}{3}$ ．

$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 $f$ を $f(x)=3x+1$ と定める. $f$ の逆関数を調べる.

$f$ の値域は区間 $[1,7]$ である. この区間 $[1,7]$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 $x$ を求める. $y=3x+1$ とすると, $3x=y-1$ , $x=\dfrac{y-1}{3}$ . $1 \leq y \leq 7$ なので, $1 \leq 3x+1 \leq 7$ , $0 \leq 3x \leq 6$ , $0 \leq x \leq 2$ . 区間 $[1,7]$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 $x$ が $x=\dfrac{y-1}{3}$ と唯一つに定まる. 故に, $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があり, $f^{-1}$ の定義域である区間 $[1,7]$ の各実数 $x$ に対して $f^{-1}(y)=\dfrac{y-1}{3}$ . $f^{-1}$ の独立変数を $x$ にすると, $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{3}$ . $\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 $f$ を $f(x)=3x+1$ と定める．$f$ の逆関数を調べる．

$f$ の値域は区間 $[1,7]$ である．この区間 $[1,7]$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 $x$ を求める． $y=3x+1$ とすると，$3x=y-1$ ， $x=\dfrac{y-1}{3}$ ． $1\leq y\leq 7$ なので， $1\leq 3x+1\leq 7$ ， $0\leq 3x\leq 6$ ，$0\leq x\leq 2$ ．区間 $[1,7]$ の各実数 $y$ に対して $y=f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 $x$ が $x=\dfrac{y-1}{3}$ と唯一つに定まる．故に，$f$ の逆関数 $f^{-1}$ があり，$f^{-1}$ の定義域である区間 $[1,7]$ の各実数 $x$ に対して $f^{-1}(y)=\dfrac{y-1}{3}$ ．$f^{-1}$ の独立変数を $x$ にすると， $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{3}$ ． $\boxed{\text{終}}$

最後に $f$ の逆関数 $f^{-1}$ の独立変数を $y$ から $x$ に替える手間を省くために，$f^{-1}$ の定義域つまり $f$ の値域の要素を表す変数を初めから $x$ にしよう．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 $f$ を $f(x)=3x+1$ と定める．$f$ の逆関数を調べる．

$f$ の値域は区間 $[1,7]$ である．この区間 $[1,7]$ の各実数 $x$ に対して $x=f(y)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 $y$ を求める．$x=3y+1$ とすると，$3y=x-1$ ，$y=\dfrac{x-1}{3}$ ．$1\leq x\leq 7$ なので，$1\leq 3y+1\leq 7$ ，$0\leq 3y\leq 6$ ，$0\leq y\leq 2$ ．区間 $[1,7]$ の各実数 $x$ に対して $x=f(y)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 $y$ が $y=\dfrac{x-1}{3}$ と唯一つに定まる．故に，$f$ の逆関数 $f^{-1}$ があり，$f^{-1}$ の定義域である区間 $[1,7]$ の各実数 $x$ に対して $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{3}$ ． $\boxed{\text{終}}$

問7.6.2 定義域が区間 $[2,4]$ である関数 $g$ を $g(x)=13-3x$ と定める．$g$ の逆関数を調べよ．

関数 $g$ の値域は区間 [ , ] である．区間 [ , ] の実数 $x$ に対して，$x=g(y)$ である区間 [ , ] の実数 $y$ を求める．$x=$ なので， $=$ ， $y=$ ． $\leq x \leq$ より， $\leq 13-3y \leq$ ， $\leq -3y \leq$ ， $\leq y \leq$ ．区間 [ , ] の各実数 $x$ に対して $x=g(y)$ となる区間 [ , ] の実数 $y$ が $y=$ と唯一つに定まる．故に，$g$ の逆関数 $g^{-1}$ があり，$g^{-1}$ の定義域である区間 [ , ] の各実数 $x$ に対して $g^{-1}(x)=$ ． 終

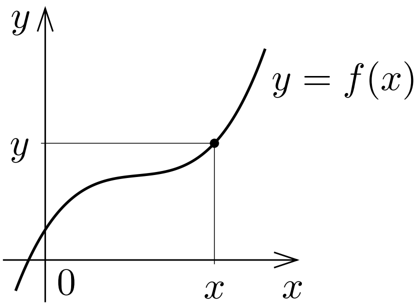
$\boxed{問 7.6.2}$ 定義域が区間 $[2,4]$ である関数 $g$ を $g(x)=13-3x$ と定める．$g$ の逆関数を調べよ．

関数 $g$ の値域は区間 $[1,7]$ である．区間 $[1,7]$ の実数 $x$ に対して，$x=g(y)$ である区間 $[2,4]$ の実数 $y$ を求める．$x=13-3y$ なので，$3y=13-x$ ，$y=\dfrac{13-x}{3}$ ．$1\le x\le 7$ より，$1\le 13-3y\le 7$ ，$-12\le -3y\le -6$ ，$2\le y\le 4$ ．区間 $[1,7]$ の各実数 $x$ に対して $x=g(y)$ となる区間 $[2,4]$ の実数 $y$ が $y=\dfrac{13-x}{3}$ と唯一つに定まる．故に，$g$ の逆関数 $g^{-1}$ があり，$g^{-1}$ の定義域である区間 $[1,7]$ の各実数 $x$ に対して $g^{-1}(x)=\dfrac{13-x}{3}$ ．

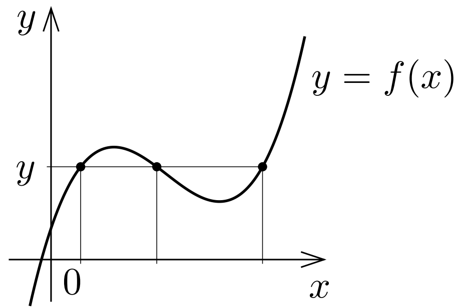
$\boxed{終}$

関数 $f$ の逆関数は，$f$ の値域の各要素 $y$ に対して $y = f(x)$ となる $f$ の定義域の要素 $x$ を定める．関数は唯一つの対象を定める対応なので，$f$ の値域の各要素 $y$ に対して $y = f(x)$ となる $f$ の定義域の要素 $x$ が複数あるときは，$f$ の逆関数はない．

関数 $f$ の逆関数は，$f$ の値域の各要素 $y$ に対して $y=f(x)$ となる $f$ の定義域の要素 $x$ を定める．関数は唯一つの対象を定める対応なので，$f$ の値域の各要素 $y$ に対して $y=f(x)$ となる $f$ の定義域の要素 $x$ が複数あるときは，$f$ の逆関数はない．$xy$ 座標平面における関数 $y=f(x)$ のグラフを考えると例えば次のようになる．




$y$ に対して $y=f(x)$ となる $x$ が唯一つあるので，関数 $f$ の逆関数がある．




$y$ に対して $y=f(x)$ となる $x$ が 2 個以上あるので，関数 $f$ の逆関数はない．

例 定義域が実数全体である関数 $f$ を $f(x)=x^2$ と定める．例えば 7 に対して，$f(x)=7$ とすると，$x^2=7$ なので，$x=\sqrt{7}$ または $x=-\sqrt{7}$ ；このように $x$ の値が唯一つでない．よって関数 $f$ の逆関数はない． 終

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする.

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする．対象 $u$ と $v$ とについて，$f(u) = v$ ならば，$f$ の逆関数 $f^{-1}$ は $v$ に対して $u$ を定めるので $f^{-1}(v) = u$ ．

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする．対象 $u$ と $v$ とについて，$f(u) = v$ ならば，$f$ の逆関数 $f^{-1}$ は $v$ に対して $u$ を定めるので $f^{-1}(v) = u$ ．対象 $u$ と $v$ とについて，$f^{-1}(v) = u$ となるのは $f(u) = v$ のときなので，$f^{-1}(v) = u$ ならば $f(u) = v$ ．

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする．対象 $u$ と $v$ とについて，$f(u)=v$ ならば，$f$ の逆関数 $f^{-1}$ は $v$ に対して $u$ を定めるので $f^{-1}(v)=u$ ．対象 $u$ と $v$ とについて，$f^{-1}(v)=u$ となるのは $f(u)=v$ のときなので，$f^{-1}(v)=u$ ならば $f(u)=v$ ．故に．任意の対象 $u$ と $v$ とについて，

$$f(u)=v \text{ ならば } f^{-1}(v)=u \ ,$$

かつ，

$$f^{-1}(v)=u \text{ ならば } f(u)=v \ .$$

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする．対象 $u$ と $v$ とについて，$f(u)=v$ ならば，$f$ の逆関数 $f^{-1}$ は $v$ に対して $u$ を定めるので $f^{-1}(v)=u$ ．対象 $u$ と $v$ とについて，$f^{-1}(v)=u$ となるのは $f(u)=v$ のときなので，$f^{-1}(v)=u$ ならば $f(u)=v$ ．故に．任意の対象 $u$ と $v$ とについて，

$$f(u)=v \quad \text{ならば} \quad f^{-1}(v)=u \ ,$$

かつ，

$$f^{-1}(v)=u \quad \text{ならば} \quad f(u)=v \ .$$

**定理**　関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとき，任意の対象 $u$ と $v$ とについて，

$$f(u)=v \iff f^{-1}(v)=u \ .$$

定理　関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとき，任意の対象 $u$ と $v$ とについて，

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が集合 $\{2,3,4\}$ である関数 $f$ を次のように定める：

$$f(2) = 5 \ , \quad f(3) = 7 \ , \quad f(4) = 9 \ .$$

この関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ の定義域は $f$ の値域 $\{5,7,9\}$ である.

定理　関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとき，任意の対象 $u$ と $v$ とについて，

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u \ .$$

例 定義域が集合 $\{2,3,4\}$ である関数 $f$ を次のように定める：

$$f(2) = 5\ ,\quad f(3) = 7\ ,\quad f(4) = 9\ .$$

この関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ の定義域は $f$ の値域 $\{5,7,9\}$ である.

$$f(2)=5 \text{ なので } f^{-1}(5)=2\ .$$

$$f(3)=7 \text{ なので } f^{-1}(7)=3\ .$$

$$f(4)=9 \text{ なので } f^{-1}(9)=4\ .$$

終

定理　関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとき，任意の対象 $u$ と $v$ とについて，

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u \ .$$

$\boxed{問 7.6.3}$ 定義域が集合 $\{2,3,4,5\}$ である関数 $f$ を次のように定める：

$$f(2) = 7 \ , \quad f(3) = 9 \ , \quad f(4) = 6 \ , \quad f(5) = 8 \ .$$

$f^{-1}(6)$，$f^{-1}(7)$，$f^{-1}(8)$，$f^{-1}(9)$ を求めよ．

$$f(\quad) = 6 \text{ なので } f^{-1}(6) = \qquad .$$

$$f(\quad) = 7 \text{ なので } f^{-1}(7) = \qquad .$$

$$f(\quad) = 8 \text{ なので } f^{-1}(8) = \qquad .$$

$$f(\quad) = 9 \text{ なので } f^{-1}(9) = \qquad .$$

定理　関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとき，任意の対象 $u$ と $v$ とについて，

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u \ .$$

$\boxed{\text{問}7.6.3}$ 定義域が集合 $\{2,3,4,5\}$ である関数 $f$ を次のように定める：

$$f(2) = 7 \ , \quad f(3) = 9 \ , \quad f(4) = 6 \ , \quad f(5) = 8 \ .$$

$f^{-1}(6)$，$f^{-1}(7)$，$f^{-1}(8)$，$f^{-1}(9)$ を求めよ.

$f(4)=6$ なので $f^{-1}(6)=4$ .

$f(2)=7$ なので $f^{-1}(7)=2$ .

$f(5)=8$ なので $f^{-1}(8)=5$ .

$f(3)=9$ なので $f^{-1}(9)=3$ . $\boxed{\text{終}}$

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする.

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする．対象 $y$ について，

$$\begin{aligned} & y \text{ が } f^{-1} \text{ の値域に属す} \\ \iff & y = f^{-1}(x) \text{ となる } f^{-1} \text{ の定義域の要素 } x \text{ がある} \quad . \end{aligned}$$

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする．対象 $y$ について，

$$\begin{aligned} & y \text{ が } f^{-1} \text{ の値域に属す} \\ \iff & y = f^{-1}(x) \text{ となる } f^{-1} \text{ の定義域の要素 } x \text{ がある} \quad . \end{aligned}$$

等式 $y = f^{-1}(x)$ は等式 $x = f(y)$ と同値である．また，$f^{-1}$ の定義域は $f$ の値域である．

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする．対象 $y$ について，

$$\begin{aligned} & y \text{ が } f^{-1} \text{ の値域に属す} \\ \iff\ & y = f^{-1}(x) \text{ となる } f^{-1} \text{ の定義域の要素 } x \text{ がある} \quad . \end{aligned}$$

等式 $y = f^{-1}(x)$ は等式 $x = f(y)$ と同値である．また，$f^{-1}$ の定義域は $f$ の値域である．

$$\begin{aligned} & y = f^{-1}(x) \text{ となる } f^{-1} \text{ の定義域の要素 } x \text{ がある} \\ \iff\ & x = f(y) \text{ となる } f \text{ の値域の要素 } x \text{ がある} \\ \iff\ & y \text{ が } f \text{ の定義域に属す} \quad . \end{aligned}$$

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする．対象 $y$ について，

$$\begin{aligned} & y \text{ が } f^{-1} \text{ の値域に属す} \\ \iff & y = f^{-1}(x) \text{ となる } f^{-1} \text{ の定義域の要素 } x \text{ がある} \quad . \end{aligned}$$

等式 $y = f^{-1}(x)$ は等式 $x = f(y)$ と同値である．また，$f^{-1}$ の定義域は $f$ の値域である．

$$\begin{aligned} & y = f^{-1}(x) \text{ となる } f^{-1} \text{ の定義域の要素 } x \text{ がある} \\ \iff & x = f(y) \text{ となる } f \text{ の値域の要素 } x \text{ がある} \\ \iff & y \text{ が } f \text{ の定義域に属す} \ . \end{aligned}$$

よって

$$y \text{ が } f^{-1} \text{ の値域に属す} \iff y \text{ が } f \text{ の定義域に属す} \quad .$$

故に $f^{-1}$ の値域と $f$ の定義域と同じである．

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする．対象 $y$ について，

$$y \text{ が } f^{-1} \text{ の値域に属す}$$
$$\iff y = f^{-1}(x) \text{ となる } f^{-1} \text{ の定義域の要素 } x \text{ がある} \quad .$$

等式 $y = f^{-1}(x)$ は等式 $x = f(y)$ と同値である．また，$f^{-1}$ の定義域は $f$ の値域である．

$$y = f^{-1}(x) \text{ となる } f^{-1} \text{ の定義域の要素 } x \text{ がある}$$
$$\iff x = f(y) \text{ となる } f \text{ の値域の要素 } x \text{ がある}$$
$$\iff y \text{ が } f \text{ の定義域に属す} \ .$$

よって

$$y \text{ が } f^{-1} \text{ の値域に属す} \iff y \text{ が } f \text{ の定義域に属す} \quad .$$

故に $f^{-1}$ の値域と $f$ の定義域と同じである．

定理　関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ の値域は $f$ の定義域である．

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする.

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする．$f$ の定義域の要素 $x$ について，
$y=f(x)$ とおくと，$x=f^{-1}(y)$ なので，

$$f^{-1}\bigl(f(x)\bigr)=f^{-1}(y)=x\ .$$

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする．$f$ の定義域の要素 $x$ について，
$y = f(x)$ とおくと，$x = f^{-1}(y)$ なので，

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) = x \ .$$

$f$ の値域の要素 $y$ について，$x = f^{-1}(y)$ とおくと，$y = f(x)$ なので，

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = f(x) = y \ .$$

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする．$f$ の定義域の要素 $x$ について，

$y=f(x)$ とおくと，$x=f^{-1}(y)$ なので，

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) = x \ .$$

$f$ の値域の要素 $y$ について，$x=f^{-1}(y)$ とおくと，$y=f(x)$ なので，

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = f(x) = y \ .$$

**定理**　関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとき，

$f$ の定義域の任意の要素 $x$ について　$f^{-1}\big(f(x)\big)=x$ ，

$f$ の値域の任意の要素 $y$ について　$f\big(f^{-1}(y)\big)=y$ ．

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとする．$f$ の定義域の要素 $x$ について，$y=f(x)$ とおくと，$x=f^{-1}(y)$ なので，

$$f^{-1}\big(f(x)\big)=f^{-1}(y)=x\ .$$

$f$ の値域の要素 $y$ について，$x=f^{-1}(y)$ とおくと，$y=f(x)$ なので，

$$f\big(f^{-1}(y)\big)=f(x)=y\ .$$

**定理**　関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとき，

$f$ の定義域の任意の要素 $x$ について　$f^{-1}\big(f(x)\big)=x$ ，

$f$ の値域の任意の要素 $y$ について　$f\big(f^{-1}(y)\big)=y$ ．

関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ があるとき，$f$ の定義域の要素 $x$ に対して $f^{-1}\big(f(x)\big)=x$ なので，$f^{-1}$ は $x$ における $f$ の値 $f(x)$ を $x$ に戻す関数である．

更に以下の定理が成り立つ.

**定理**　関数 $g$ の定義域が関数 $f$ の値域であり, $f$ の定義域の各要素 $x$ について $g\big(f(x)\big) = x$ ならば, $g$ は $f$ の逆関数である.

**定理**　関数 $g$ が関数 $f$ の逆関数であるとき, $f$ は $g$ の逆関数である.