7.8　関数のグラフの座標軸及び原点に関する対称移動

xy 座標平面における関数 $y=f(x)$ のグラについて次のことが成り立つ：
実数 u, v について，

$$\text{点 } (u, v) \text{ が関数 } y=f(x) \text{ のグラフに属す} \iff v=f(u) \quad .$$

xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=-f(x)$ のグラフを考える．実数 u, v について，

$$\begin{aligned}
&\text{点 } (u, -v) \text{ が関数 } y=-f(x) \text{ のグラフに属す} \\
\iff\ & -v=-f(u) \iff v=f(u) \\
\iff\ & \text{点 } (u, v) \text{ が関数 } y=f(x) \text{ のグラフに属す} \quad .
\end{aligned}$$

xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=-f(x)$ のグラフを考える．実数 u,v について，

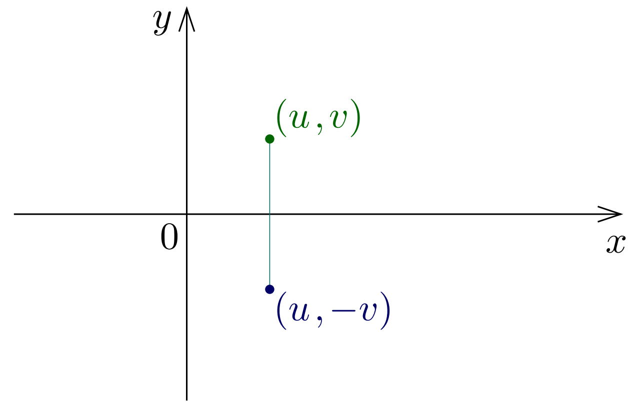
$$
\begin{aligned}
&\text{点 } (u,-v) \text{ が関数 } y=-f(x) \text{ のグラフに属す} \\
\iff\ & -v=-f(u) \iff v=f(u) \\
\iff\ & \text{点 } (u,v) \text{ が関数 } y=f(x) \text{ のグラフに属す} \quad .
\end{aligned}
$$

$y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$
のグラフに属す各点 (u,v) に対
する点 $(u,-v)$ の全体である．

xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=-f(x)$ のグラフを考える．実数 u,v について，

$$\begin{aligned} &\text{点 } (u,-v) \text{ が関数 } y=-f(x) \text{ のグラフに属す} \\ \iff\ & -v=-f(u) \iff v=f(u) \\ \iff\ & \text{点 } (u,v) \text{ が関数 } y=f(x) \text{ のグラフに属す}\quad. \end{aligned}$$

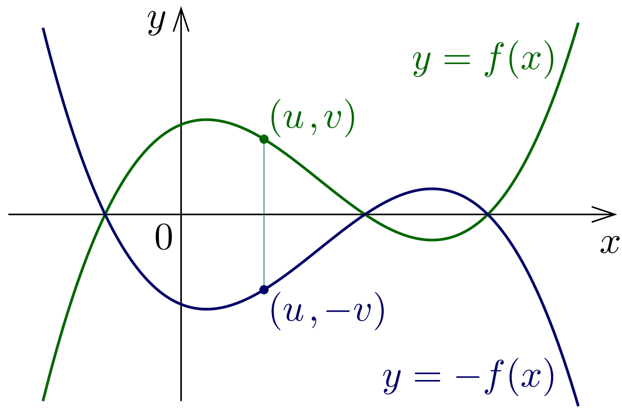
$y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフに属す各点 (u,v) に対する点 $(u,-v)$ の全体である．点 $(u,-v)$ は点 (u,v) と x 軸に関して対称である．



　xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=-f(x)$ のグラフを考える．実数 u, v について，

$$
\begin{aligned}
&\text{点 } (u, -v) \text{ が関数 } y=-f(x) \text{ のグラフに属す} \\
&\iff -v=-f(u) \iff v=f(u) \\
&\iff \text{点 } (u, v) \text{ が関数 } y=f(x) \text{ のグラフに属す}.
\end{aligned}
$$

$y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフに属す各点 (u, v) に対する点 $(u, -v)$ の全体である．点 $(u, -v)$ は点 (u, v) と x 軸に関して対称である．よって $y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である．



xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=f(-x)$ のグラフを考える．実数 u, v について，

$$
\begin{aligned}
& \text{点 } (-u, v) \text{ が関数 } y=f(-x) \text{ のグラフに属す} \\
\iff\ & v=f\bigl(-(-u)\bigr) \iff v=f(u) \\
\iff\ & \text{点 } (u, v) \text{ が関数 } y=f(x) \text{ のグラフに属す} \quad .
\end{aligned}
$$

xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=f(-x)$ のグラフを考える．実数 u, v について，

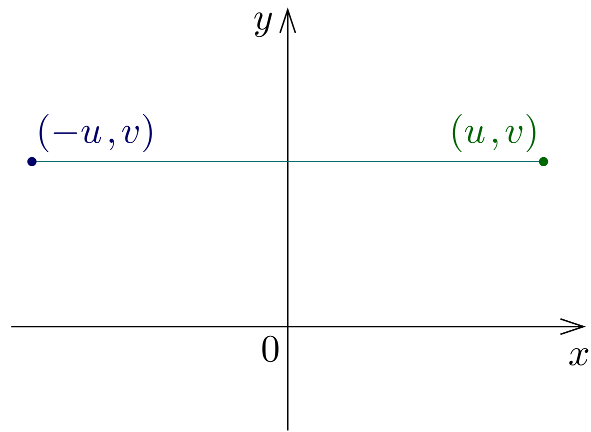
$$
\begin{aligned}
&\text{点 } (-u, v) \text{ が関数 } y=f(-x) \text{ のグラフに属す} \\
\iff\ & v=f\bigl(-(-u)\bigr) \iff v=f(u) \\
\iff\ & \text{点 } (u, v) \text{ が関数 } y=f(x) \text{ のグラフに属す} \quad .
\end{aligned}
$$

$y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$
のグラフに属す各点 (u, v) に対
する点 $(-u, v)$ の全体である．

xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=f(-x)$ のグラフを考える．実数 u,v について，

$$\begin{aligned}&\text{点 } (-u,v) \text{ が関数 } y=f(-x) \text{ のグラフに属す}\\ \iff\ & v=f\bigl(-(-u)\bigr) \iff v=f(u)\\ \iff\ & \text{点 } (u,v) \text{ が関数 } y=f(x) \text{ のグラフに属す}\quad .\end{aligned}$$

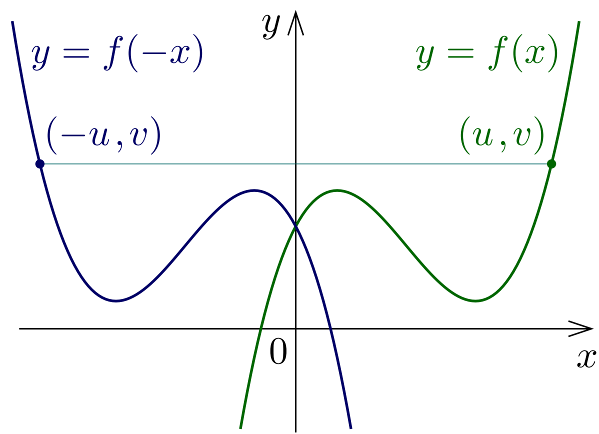
$y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフに属す各点 (u,v) に対する点 $(-u,v)$ の全体である．点 $(-u,v)$ は点 (u,v) と y 軸に関して対称である．



　xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=f(-x)$ のグラフを考える．実数 u, v について，

$$\begin{aligned}
&\text{点 } (-u, v) \text{ が関数 } y=f(-x) \text{ のグラフに属す} \\
\iff\ & v=f\bigl(-(-u)\bigr) \iff v=f(u) \\
\iff\ & \text{点 } (u, v) \text{ が関数 } y=f(x) \text{ のグラフに属す} \quad .
\end{aligned}$$

$y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフに属す各点 (u, v) に対する点 $(-u, v)$ の全体である．点 $(-u, v)$ は点 (u, v) と y 軸に関して対称である．よって $y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である．



xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=-f(-x)$ のグラフを考える．実数 u,v について，

$$\begin{aligned} & \text{点 } (-u,-v) \text{ が関数 } y=-f(-x) \text{ のグラフに属す} \\ \iff\ & -v=-f\bigl(-(-u)\bigr) \iff v=f(u) \\ \iff\ & \text{点 } (u,v) \text{ が関数 } y=f(x) \text{ のグラフに属す} \quad . \end{aligned}$$

xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=-f(-x)$ のグラフを考える．実数 u, v について，

$$\begin{aligned} & \text{点 } (-u, -v) \text{ が関数 } y=-f(-x) \text{ のグラフに属す} \\ \iff & -v=-f\bigl(-(-u)\bigr) \iff v=f(u) \\ \iff & \text{点 } (u, v) \text{ が関数 } y=f(x) \text{ のグラフに属す} \quad . \end{aligned}$$

$y=-f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$

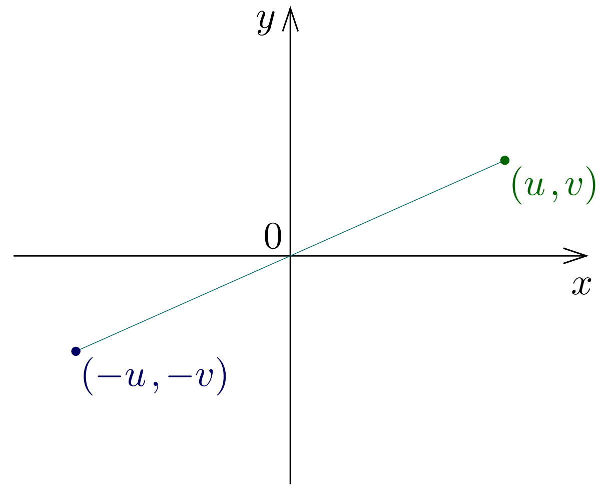
のグラフに属す各点 (u, v) に対す

る点 $(-u, -v)$ の全体である．

xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=-f(-x)$ のグラフを考える．実数 $u\,,v$ について，

$$\begin{aligned}
&\text{点 } (-u\,,-v) \text{ が関数 } y=-f(-x) \text{ のグラフに属す} \\
\iff\ & -v=-f\bigl(-(-u)\bigr) \iff v=f(u) \\
\iff\ & \text{点 } (u\,,v) \text{ が関数 } y=f(x) \text{ のグラフに属す}\quad .
\end{aligned}$$

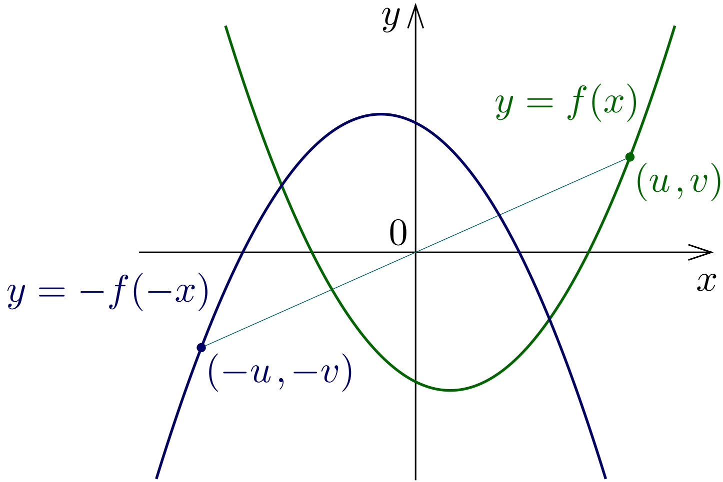
$y=-f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフに属す各点 $(u\,,v)$ に対する点 $(-u\,,-v)$ の全体である．点 $(-u\,,-v)$ は点 $(u\,,v)$ と原点に関して対称である．



xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=-f(-x)$ のグラフを考える．実数 $u\,,v$ について，

$$
\begin{aligned}
&\text{点 } (-u\,,-v) \text{ が関数 } y=-f(-x) \text{ のグラフに属す}\\
\iff& -v=-f\bigl(-(-u)\bigr) \iff v=f(u)\\
\iff& \text{点 } (u\,,v) \text{ が関数 } y=f(x) \text{ のグラフに属す} \quad .
\end{aligned}
$$

$y=-f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフに属す各点 $(u\,,v)$ に対する点 $(-u\,,-v)$ の全体である．点 $(-u\,,-v)$ は点 $(u\,,v)$ と原点に関して対称である．よって $y=-f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと原点に関して対称である．



定理　関数 f について以下のことが成り立つ.

(1)　xy 座標平面において, $y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である.

(2)　xy 座標平面において, $y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である.

(3)　xy 座標平面において, $y=-f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと原点に関して対称である.

関数 f が偶関数であるとは,

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について} \quad f(-x) = f(x)$$

となることである.

関数 f が偶関数であるとは，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について} \quad f(-x)=f(x)$$

となることである．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が実数全体である関数 x^2 を f とおく： $f(x)=x^2$ ． 任意の実数 x について

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \ .$$

従って，関数 f つまり関数 x^2 は偶関数である．この他，関数 x^4，関数 x^6，関数 x^8 なども偶関数である． $\boxed{\text{終}}$

関数 f が奇関数であるとは,

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について } \quad f(-x) = -f(x)$$

となることである.

関数 f が奇関数であるとは,

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について} \quad f(-x) = -f(x)$$

となることである.

例 定義域が実数全体である関数 x^3 を g とおく: $g(x) = x^3$. 任意の実数 x について,

$$g(-x) = (-x)^3 = -x \cdot (-x)^2 = -x \cdot x^2 = -x^3 = -g(x) \ .$$

従って, 関数 g つまり関数 x^3 は奇関数である. この他, 関数 x^5, 関数 x^7, 関数 x^9 なども奇関数である. 終

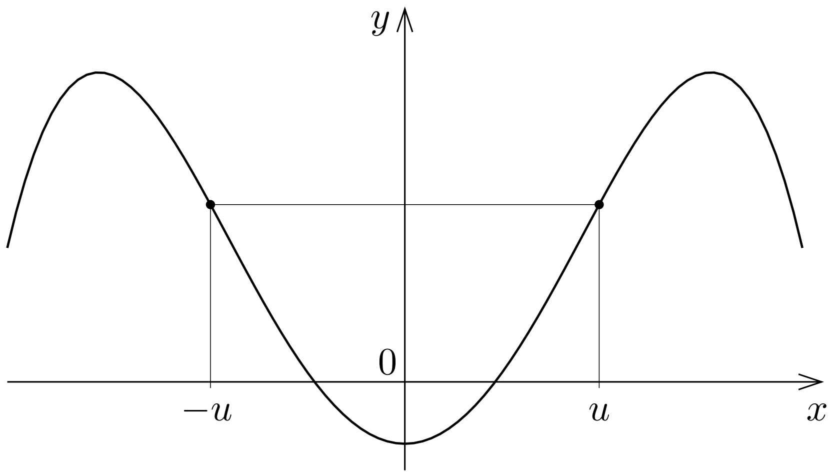
関数 f が偶関数であるとする：f の定義域の任意の点 x について

$$f(-x) = f(x) \quad .$$

関数 f が偶関数であるとする：f の定義域の任意の点 x について $f(-x) = f(x)$ ． xy 座標平面において， $y = f(x)$ のグラフを y 軸に関して対称移動させると $y = f(-x)$ のグラフつまり $y = f(x)$ のグラフである．

関数 f が偶関数であるとする：f の定義域の任意の点 x について $f(-x)=f(x)$ ． xy 座標平面において， $y=f(x)$ のグラフを y 軸に関して対称移動させると $y=f(-x)$ のグラフつまり $y=f(x)$ のグラフである．故に $y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．

関数 f が偶関数であるとする：f の定義域の任意の点 x について $f(-x)=f(x)$ ． xy 座標平面において， $y=f(x)$ のグラフを y 軸に関して対称移動させると $y=f(-x)$ のグラフつまり $y=f(x)$ のグラフである．故に $y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．偶関数のグラフは例えば次のようになる．

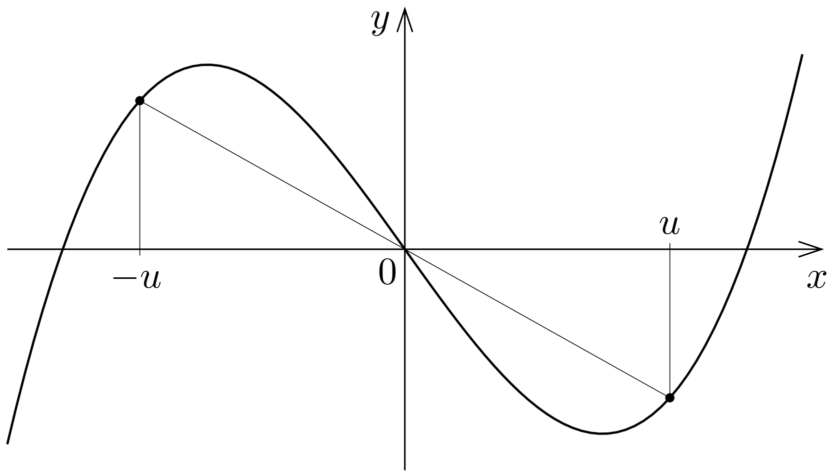


関数 f が奇関数であるとする：f の定義域の任意の点 x について $f(-x) = -f(x)$ よって $-f(-x) = f(x)$.

関数 f が奇関数であるとする：f の定義域の任意の点 x について $f(-x) = -f(x)$ よって $-f(-x) = f(x)$ ． xy 座標平面において， $y = f(x)$ のグラフを原点に関して対称移動させると $y = -f(-x)$ のグラフつまり $y = f(x)$ のグラフである．

関数 f が奇関数であるとする：f の定義域の任意の点 x について $f(-x)=-f(x)$ よって $-f(-x)=f(x)$．xy 座標平面において，$y=f(x)$ のグラフを原点に関して対称移動させると $y=-f(-x)$ のグラフつまり $y=f(x)$ のグラフである．故に $y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称である．

関数 f が奇関数であるとする：f の定義域の任意の点 x について $f(-x)=-f(x)$ よって $-f(-x)=f(x)$ ．xy 座標平面において，$y=f(x)$ のグラフを原点に関して対称移動させると $y=-f(-x)$ のグラフつまり $y=f(x)$ のグラフである．故に $y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称である．奇関数のグラフは例えば次のようになる．



定理　xy 座標平面において，偶関数のグラフは y 軸に関して対称であり，奇関数のグラフは原点に関して対称である．