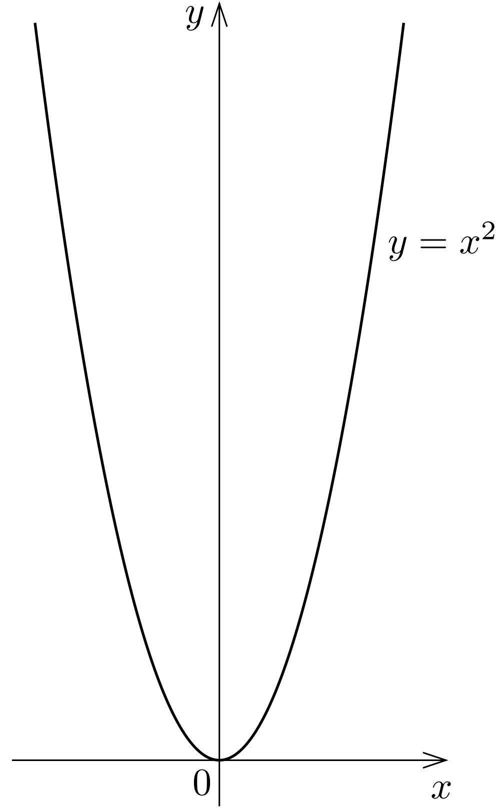
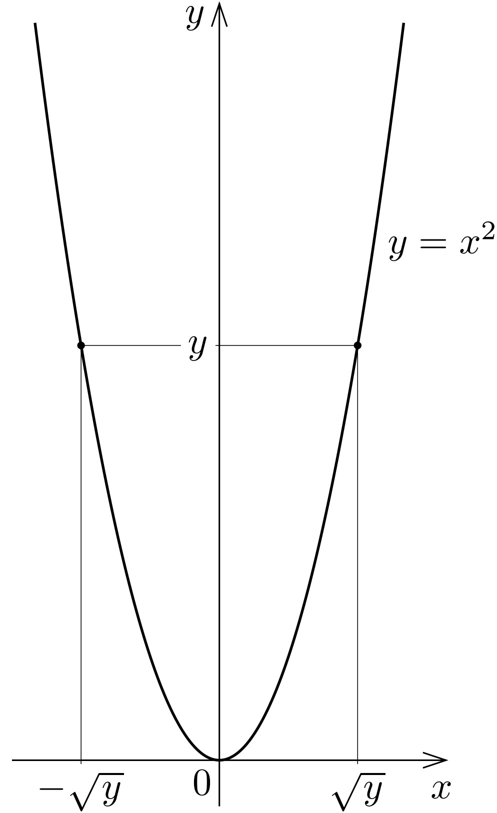
8.1　平方の逆関数

関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つであるとき，f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応が f の逆関数である.

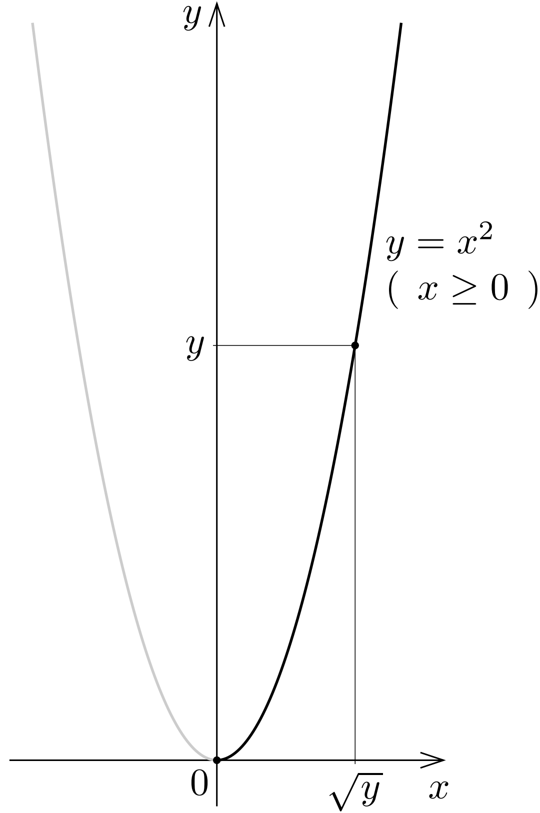
関数 x^2 の逆関数を考える．実数 x, y について $y = x^2$ とする． $x^2 \geq 0$ なので $y \geq 0$ ．



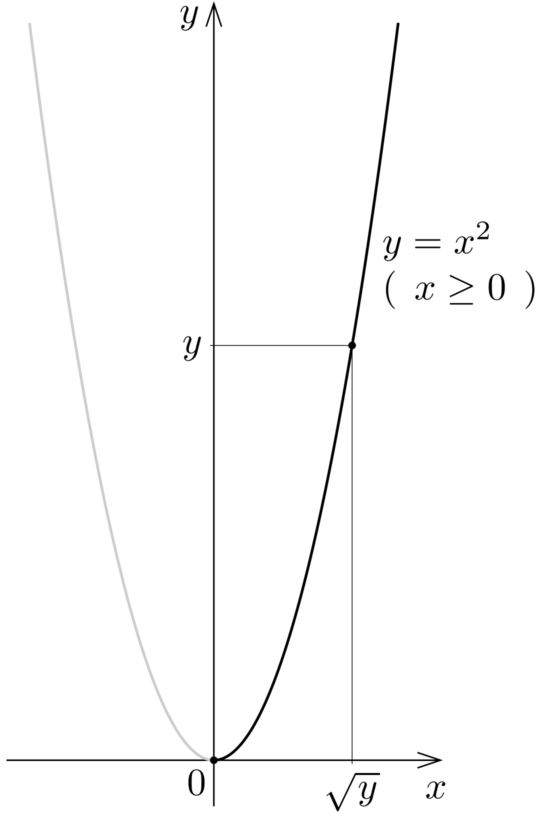
関数 x^2 の逆関数を考える．実数 x, y について $y = x^2$ とする． $x^2 \geq 0$ なので $y \geq 0$ ． $x = \pm\sqrt{y}$ なので，y に対する x が必ずしも唯一つに定まらない．よって関数 x^2 の逆関数があるとは限らない．



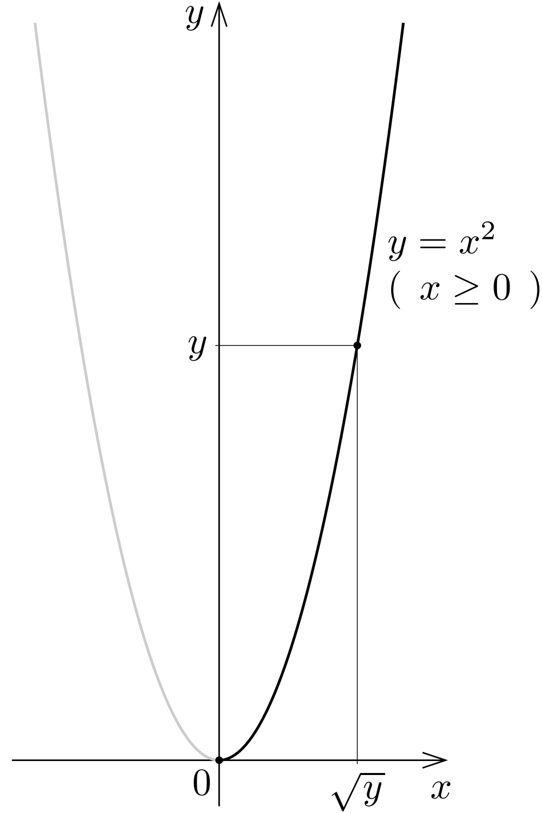
関数 x^2 の逆関数を考える．実数 x, y について $y = x^2$ とする． $x^2 \geq 0$ なので $y \geq 0$ ． $x = \pm\sqrt{y}$ なので， y に対する x が必ずしも唯一つに定まらない．よって関数 x^2 の逆関数があるとは限らない．しかし， $x \geq 0$ とすると， $y \geq 0$ である各実数 y に対して $y = x^2$ である実数 x は $x = \sqrt{y}$ と唯一つに定まる．



関数 x^2 の逆関数を考える．実数 x, y について $y = x^2$ とする． $x^2 \geq 0$ なので $y \geq 0$ ． $x = \pm\sqrt{y}$ なので，y に対する x が必ずしも唯一つに定まらない．よって関数 x^2 の逆関数があるとは限らない．しかし， $x \geq 0$ とすると， $y \geq 0$ である各実数 y に対して $y = x^2$ である実数 x は $x = \sqrt{y}$ と唯一つに定まる．故に，関数 x^2 の定義域を区間 $[0, \infty)$ に制限すると，関数 $\sqrt{y}$ というより関数 $\sqrt{x}$ が逆関数になる．



関数 x^2 の逆関数を考える．実数 x, y について $y = x^2$ とする． $x^2 \geq 0$ なので $y \geq 0$ ． $x = \pm\sqrt{y}$ なので，y に対する x が必ずしも唯一つに定まらない．よって関数 x^2 の逆関数があるとは限らない．しかし，$x \geq 0$ とすると，$y \geq 0$ である各実数 y に対して $y = x^2$ である実数 x は $x = \sqrt{y}$ と唯一つに定まる．故に，関数 x^2 の定義域を区間 $[0, \infty)$ に制限すると，関数 $\sqrt{y}$ というより関数 $\sqrt{x}$ が逆関数になる．つまり，定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 x^2 の逆関数は，定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 $\sqrt{x}$ である．

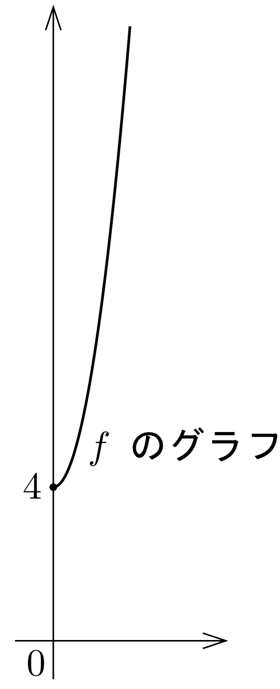


2 次関数の逆関数を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 f を $f(x)=3x^2+4$ と定める．この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる．

$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 f を $f(x)=3x^2+4$ と定める．この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる．

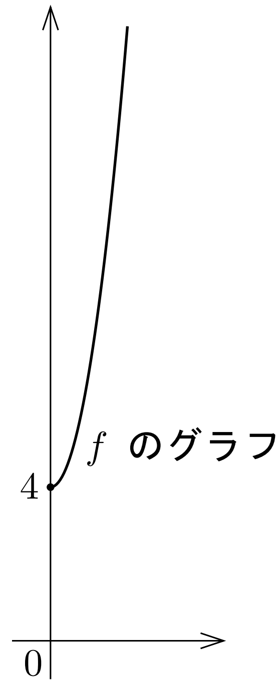
関数 f の値域は区間 $[4,\infty)$ ．区間 $[4,\infty)$ の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 y を求める．



$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 f を $f(x)=3x^2+4$ と定める．この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる．

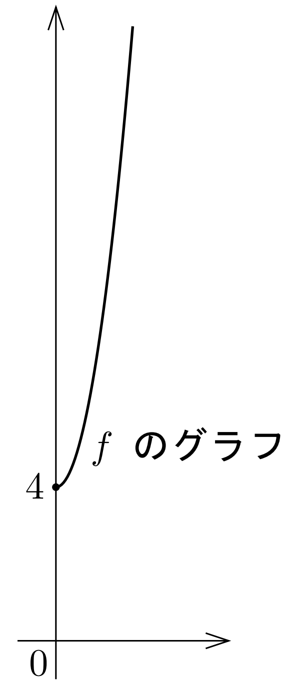
関数 f の値域は区間 $[4,\infty)$ ．区間 $[4,\infty)$ の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 y を求める． $f(y)=x$ つまり $3y^2+4=x$ より， $3y^2=x-4$ ，

$y^2=\dfrac{x-4}{3}$ ， $y=\pm\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ ；



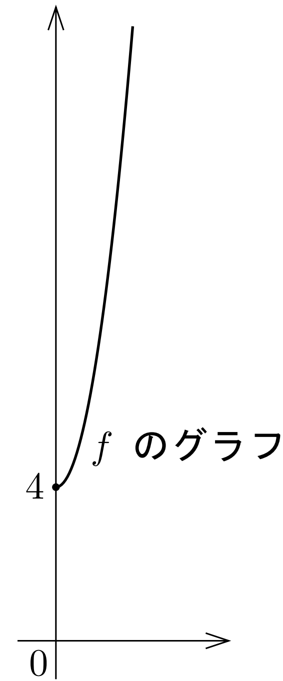
$\boxed{例}$ 定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 f を $f(x)=3x^2+4$ と定める．この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる．

関数 f の値域は区間 $[4,\infty)$ ．区間 $[4,\infty)$ の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 y を求める． $f(y)=x$ つまり $3y^2+4=x$ より， $3y^2=x-4$ ， $y^2=\dfrac{x-4}{3}$ ， $y=\pm\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ ；y は区間 $[0,\infty)$ に属すので $y\geq 0$ ，よって $y=\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ ．



$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 f を $f(x)=3x^2+4$ と定める．この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる．

関数 f の値域は区間 $[4,\infty)$ ．区間 $[4,\infty)$ の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 y を求める． $f(y)=x$ つまり $3y^2+4=x$ より， $3y^2=x-4$ ， $y^2=\dfrac{x-4}{3}$ ， $y=\pm\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ ；y は区間 $[0,\infty)$ に属すので $y\geq 0$ ，よって $y=\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ ．このように，区間 $[4,\infty)$ の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 y が唯一つ定まり， $y=\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ ．



例 定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 f を $f(x)=3x^2+4$ と定める．この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる．

関数 f の値域は区間 $[4,\infty)$ ．区間 $[4,\infty)$ の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 y を求める． $f(y)=x$ つまり $3y^2+4=x$ より， $3y^2=x-4$ ， $y^2=\dfrac{x-4}{3}$ ， $y=\pm\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ ；y は区間 $[0,\infty)$ に属すので $y\geq 0$ ，よって $y=\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ ．このように，区間 $[4,\infty)$ の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 y が唯一つ定まり， $y=\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ ．故に，関数 f の逆関数 f^{-1} があり， f^{-1} の定義域は区間 $[4,\infty)$ であり， $f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ ．

終

$\boxed{\text{問}8.1.1}$ 定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 f を $f(x)=5x^2-7$ と定める．この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べよ．

関数 f の値域は区間 ．区間 の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 の実数 y を求める． $f(y)=x$ つまり $5y^2-7=x$ より， $=$ ， $y^2=$ ， y は区間 に属すので y 0 ，よって $y=$ ．故に，関数 f の逆関数 f^{-1} があり， f^{-1} の定義域は区間 であり， $f^{-1}(x)=$ ．

$\boxed{問8.1.1}$ 定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 f を $f(x)=5x^2-7$ と定める．この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べよ．

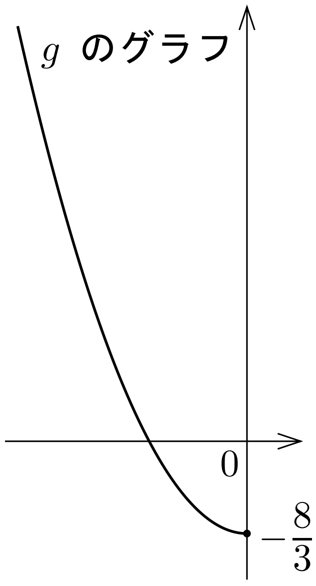
関数 f の値域は区間 $[-7,\infty)$ ．区間 $[-7,\infty)$ の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 y を求める． $f(y)=x$ つまり $5y^2-7=x$ より， $5y^2=x+7$ ， $y^2=\dfrac{x+7}{5}$ ， y は区間 $[0,\infty)$ に属すので $y\geq 0$ ，よって $y=\sqrt{\dfrac{x+7}{5}}$ ．故に，関数 f の逆関数 f^{-1} があり， f^{-1} の定義域は区間 $[-7,\infty)$ であり， $f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{x+7}{5}}$ ．

$\boxed{終}$

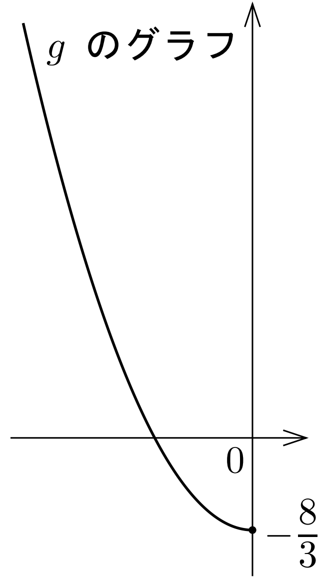
$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x) = \dfrac{x^2-8}{3}$ と定める．この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる．

例 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x) = \dfrac{x^2 - 8}{3}$ と定める．この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる．

関数 g の値域は区間 $\left[-\dfrac{8}{3}, \infty\right)$ ．区間 $\left[-\dfrac{8}{3}, \infty\right)$ の各実数 x に対して $g(y) = x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y を求める．



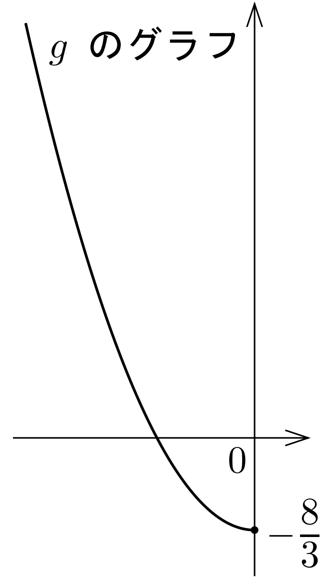
$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x) = \dfrac{x^2 - 8}{3}$ と定める．この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる．



関数 g の値域は区間 $\left[-\dfrac{8}{3}, \infty\right)$ ．区間 $\left[-\dfrac{8}{3}, \infty\right)$ の各実数 x に対して $g(y) = x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y を求める． $g(y) = x$ つまり $\dfrac{y^2 - 8}{3} = x$ なので，

$y^2 - 8 = 3x$ ， $y^2 = 3x + 8$ ， $y = \pm\sqrt{3x + 8}$ ；

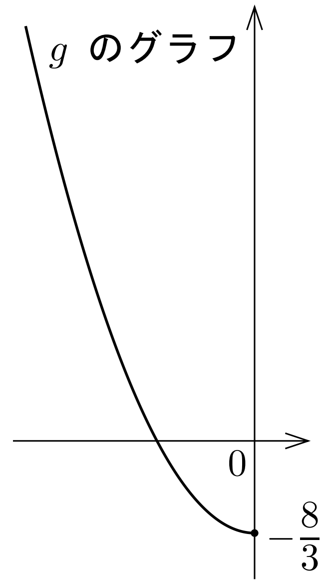
例 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x)=\dfrac{x^2-8}{3}$ と定める．この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる．



関数 g の値域は区間 $\left[-\dfrac{8}{3}, \infty\right)$．区間 $\left[-\dfrac{8}{3}, \infty\right)$ の各実数 x に対して $g(y)=x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y を求める． $g(y)=x$ つまり $\dfrac{y^2-8}{3}=x$ なので，

$y^2-8=3x$ ， $y^2=3x+8$ ， $y=\pm\sqrt{3x+8}$ ； y は区間 $(-\infty, 0]$ に属すので $y \leq 0$ ，よって $y=-\sqrt{3x+8}$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $(-\infty,0]$ である関数 g を $g(x)=\dfrac{x^2-8}{3}$ と定める．この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる．



関数 g の値域は区間 $\left[-\dfrac{8}{3},\infty\right)$ ．区間 $\left[-\dfrac{8}{3},\infty\right)$ の各実数 x に対して $g(y)=x$ となる区間 $(-\infty,0]$ の実数 y を求める． $g(y)=x$ つまり $\dfrac{y^2-8}{3}=x$ なので，

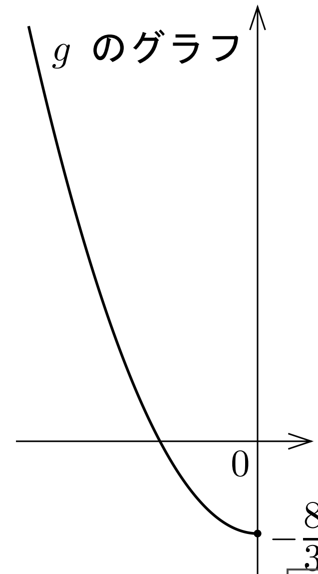
$y^2-8=3x$ ， $y^2=3x+8$ ， $y=\pm\sqrt{3x+8}$ ； y は区間 $(-\infty,0]$ に属すので $y\leq 0$ ，よって $y=-\sqrt{3x+8}$ ．

このように，区間 $\left[-\dfrac{8}{3},\infty\right)$ の各実数 x に対して $g(y)=x$ となる区間 $(-\infty,0]$ の実数 y が唯一つ定まり，

$y=-\sqrt{3x+8}$ ．

例 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x) = \dfrac{x^2 - 8}{3}$ と定める．この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる．

関数 g の値域は区間 $\left[-\dfrac{8}{3}, \infty\right)$ ．区間 $\left[-\dfrac{8}{3}, \infty\right)$ の各実数 x に対して $g(y) = x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y を求める． $g(y) = x$ つまり $\dfrac{y^2 - 8}{3} = x$ なので，
$y^2 - 8 = 3x$ ， $y^2 = 3x + 8$ ， $y = \pm\sqrt{3x + 8}$ ； y は区間 $(-\infty, 0]$ に属すので $y \leq 0$ ，よって $y = -\sqrt{3x + 8}$ ．
このように，区間 $\left[-\dfrac{8}{3}, \infty\right)$ の各実数 x に対して $g(y) = x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y が唯一つ定まり，$y = -\sqrt{3x + 8}$ ．故に，関数 g の逆関数 g^{-1} があり，g^{-1} の定義域は区間 $\left[-\dfrac{8}{3}, \infty\right)$ であり， $g^{-1}(x) = -\sqrt{3x + 8}$ ．



終

$\boxed{\text{問}8.1.2}$ 定義域が区間 $(-\infty,0]$ である関数 g を $g(x)=\dfrac{x^2+5}{2}$ と定める．この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べよ．

　関数 g の値域は区間　　　　．この区間　　　　の各実数 x に対して $g(y)=x$ となる区間　　　　の実数 y を求める．$g(y)=x$ つまり $\dfrac{y^2+5}{2}=x$ より，　　$=$　　，$y^2=$　　　，x は区間　　　　に属すので y　　0，よって $y=$　　　　．故に，関数 g の逆関数 g^{-1} があり，g^{-1} の定義域は区間　　　　であり，$g^{-1}(x)=$　　　　．

$\boxed{問 8.1.2}$ 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x) = \dfrac{x^2+5}{2}$ と定める．この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べよ．

関数 g の値域は区間 $\left[\dfrac{5}{2}, \infty\right)$ ．この区間 $\left[\dfrac{5}{2}, \infty\right)$ の各実数 x に対して $g(y) = x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y を求める． $g(y) = x$ つまり $\dfrac{y^2+5}{2} = x$ より， $y^2 + 5 = 2x$ ， $y^2 = 2x - 5$ ， x は区間 $(-\infty, 0]$ に属すので $y \leq 0$ ，よって $y = -\sqrt{2y-5}$ ．故に，関数 g の逆関数 g^{-1} があり， g^{-1} の定義域は区間 $\left[\dfrac{5}{2}, \infty\right)$ であり， $g^{-1}(x) = -\sqrt{2x-5}$ ． $\boxed{終}$