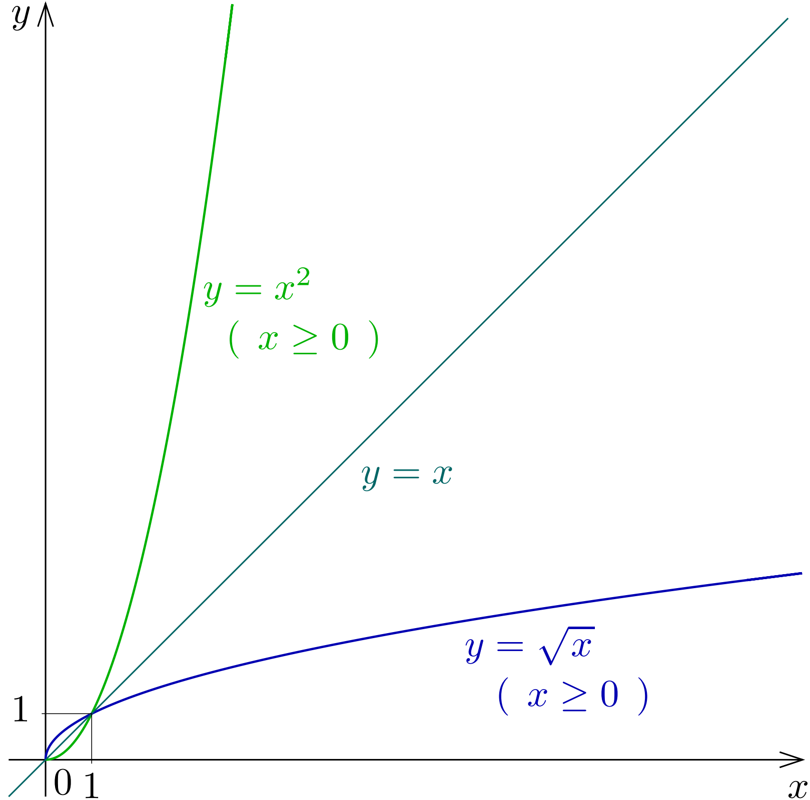
8.2 簡単な無理関数のグラフ

7.7 節において次のことを述べた：xy 座標平面において関数 f の逆関数 f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である.

xy 座標平面において，
定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 $y = \sqrt{x}$ のグラフを描く．

xy 座標平面において，
定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフを描く．関数 $\sqrt{x}$ （ $x \geq 0$ ）は関数 x^2 （ $x \geq 0$ ）の逆関数である．

xy 座標平面において，定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフを描く．関数 $\sqrt{x}$（ $x \geq 0$ ）は関数 x^2（ $x \geq 0$ ）の逆関数である．従って $y=\sqrt{x}$（ $x \geq 0$ ）のグラフは $y=x^2$（ $x \geq 0$ ）のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．



1 次関数と関数 $\sqrt{x}$ との合成関数のグラフを考える.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，定義域が区間 $[2, \infty)$ である関数 $y = \sqrt{3x-6}$ のグラフを描く.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，定義域が区間 $[2, \infty)$ である関数 $y = \sqrt{3x - 6}$ のグラフを描く．関数 $y = \sqrt{3x - 6}$ について，$\sqrt{3x - 6} \geq 0$ なので $y \geq 0$ ．

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $y=\sqrt{3x-6}$ のグラフを描く．関数 $y=\sqrt{3x-6}$ について，$\sqrt{3x-6}\geq 0$ なので $y\geq 0$ ．また，$y=\sqrt{3x-6}$ を 2 乗すると $y^2=\sqrt{3x-6}^{\,2}=3x-6$ なので，$3x=y^2+6$ ，よって $x=\dfrac{1}{3}y^2+2$ ．x の値から y の値を計算するより y の値から x の値を計算する方が簡単である．

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $y=\sqrt{3x-6}$ のグラフを描く．関数 $y=\sqrt{3x-6}$ について，$\sqrt{3x-6}\geq 0$ なので $y\geq 0$ ．また，$y=\sqrt{3x-6}$ を 2 乗すると $y^2=\sqrt{3x-6}^{\,2}=3x-6$ なので，$3x=y^2+6$ ，よって $x=\frac{1}{3}y^2+2$ ．これより，実数 x,y ($x\geq 2$) について，

$$y=\sqrt{3x-6} \iff x=\frac{1}{3}y^2+2 \text{ かつ } y\geq 0 \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $y=\sqrt{3x-6}$ のグラフを描く．関数 $y=\sqrt{3x-6}$ について，$\sqrt{3x-6}\geq 0$ なので $y\geq 0$ ．また，$y=\sqrt{3x-6}$ を 2 乗すると $y^2=\sqrt{3x-6}^{\,2}=3x-6$ なので，$3x=y^2+6$ ，よって $x=\frac{1}{3}y^2+2$ ．これより，実数 x,y ($x\geq 2$) について，

$$y=\sqrt{3x-6} \iff x=\frac{1}{3}y^2+2 \text{ かつ } y\geq 0 \quad .$$

変数 x は変数 y の 2 次関数なので，そのグラフは放物線である．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $y=\sqrt{3x-6}$ のグラフを描く．関数 $y=\sqrt{3x-6}$ について，$\sqrt{3x-6}\geq 0$ なので $y\geq 0$．また，$y=\sqrt{3x-6}$ を 2 乗すると $y^2=\sqrt{3x-6}^{\,2}=3x-6$ なので，$3x=y^2+6$，よって $x=\frac{1}{3}y^2+2$．これより，実数 x,y（$x\geq 2$）について，

$$y=\sqrt{3x-6} \iff x=\frac{1}{3}y^2+2 \text{ かつ } y\geq 0 \quad .$$

変数 x は変数 y の 2 次関数なので，そのグラフは放物線である．

y の値から x の値を計算する．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $y=\sqrt{3x-6}$ のグラフを描く．関数 $y=\sqrt{3x-6}$ について，$\sqrt{3x-6}\geq 0$ なので $y\geq 0$ ．また，$y=\sqrt{3x-6}$ を 2 乗すると $y^2=\sqrt{3x-6}^{\,2}=3x-6$ なので，$3x=y^2+6$ ，よって $x=\frac{1}{3}y^2+2$ ．これより，実数 x,y ($x\geq 2$) について，

$$y=\sqrt{3x-6} \iff x=\frac{1}{3}y^2+2 \text{ かつ } y\geq 0 \quad .$$

変数 x は変数 y の 2 次関数なので，そのグラフは放物線である． $y=0$ のとき $x=2$ ．$y=3$ のとき $x=5$ ． $y=6$ のとき $x=14$ ．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $y=\sqrt{3x-6}$ のグラフを描く．関数 $y=\sqrt{3x-6}$ について，$\sqrt{3x-6}\geq 0$ なので $y\geq 0$ ．また，$y=\sqrt{3x-6}$ を 2 乗すると $y^2=\sqrt{3x-6}^{\,2}=3x-6$ なので，$3x=y^2+6$ ，よって $x=\frac{1}{3}y^2+2$ ．これより，実数 x,y ($x\geq 2$) について，

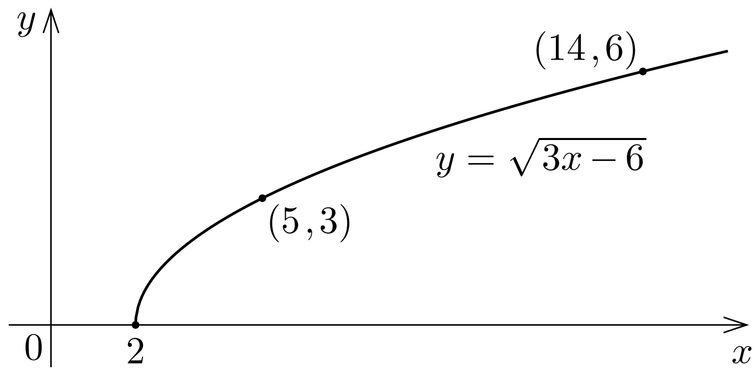
$$y=\sqrt{3x-6} \iff x=\frac{1}{3}y^2+2 \text{ かつ } y\geq 0 \quad .$$

変数 x は変数 y の 2 次関数なので，そのグラフは放物線である．$y=0$ のとき $x=2$ ．$y=3$ のとき $x=5$ ．$y=6$ のとき $x=14$ ．点 $(2,0)$, $(5,3),(14,6)$ が $y=\sqrt{3x+6}$ のグラフに属す.

例 xy 座標平面において，定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $y=\sqrt{3x-6}$ のグラフを描く．関数 $y=\sqrt{3x-6}$ について，$\sqrt{3x-6}\geq 0$ なので $y\geq 0$ ．また，$y=\sqrt{3x-6}$ を 2 乗すると $y^2=\sqrt{3x-6}^{\,2}=3x-6$ なので，$3x=y^2+6$ ，よって $x=\dfrac{1}{3}y^2+2$ ．これより，実数 x,y ($x\geq 2$) について，

$$y=\sqrt{3x-6} \iff x=\frac{1}{3}y^2+2 \text{ かつ } y\geq 0 \quad .$$

変数 x は変数 y の 2 次関数なので，そのグラフは放物線である．$y=0$ のとき $x=2$ ．$y=3$ のとき $x=5$ ．$y=6$ のとき $x=14$ ．点 $(2,0)$, $(5,3),(14,6)$ が $y=\sqrt{3x+6}$ のグラフに属す．



終

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{5}{2}, \infty\right)$ である関数 $y = \sqrt{2x+5}$ のグラフを描く.

例 xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\frac{5}{2}, \infty\right)$ である関数 $y=\sqrt{2x+5}$ のグラフを描く.

$$y=\sqrt{2x+5} \geq 0 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{5}{2},\infty\right)$ である関数 $y=\sqrt{2x+5}$ のグラフを描く.

$y=\sqrt{2x+5}\geq 0$. また, $y=\sqrt{2x+5}$ より, $y^2=2x+5$, $x=\dfrac{y^2-5}{2}$.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\frac{5}{2},\infty\right)$ である関数 $y=\sqrt{2x+5}$ のグラフを描く.

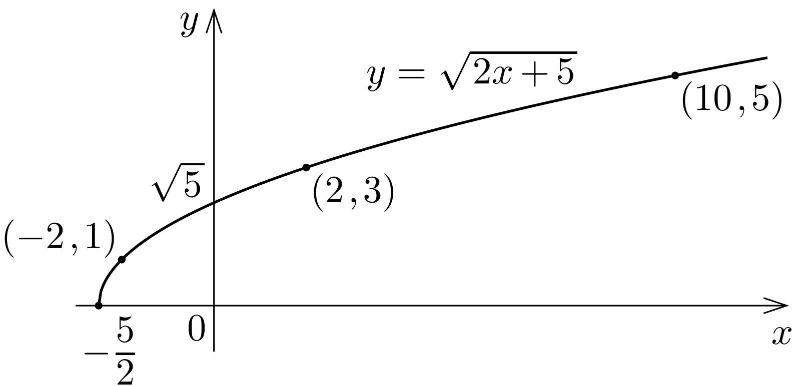
$y=\sqrt{2x+5}\geq 0$ ．また，$y=\sqrt{2x+5}$ より，$y^2=2x+5$ ，$x=\dfrac{y^2-5}{2}$ ．

$y=\sqrt{2x+5}$ のグラフは，不等式 $y\geq 0$ と方程式 $x=\dfrac{y^2-5}{2}$ との連立で表される放物線であり，点 $\left(-\frac{5}{2},0\right),(0,\sqrt{5}),(-2,1),(2,3),(10,5)$ が属す.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{5}{2}, \infty\right)$ である関数 $y=\sqrt{2x+5}$ のグラフを描く.

$y=\sqrt{2x+5} \geq 0$. また, $y=\sqrt{2x+5}$ より, $y^2=2x+5$, $x=\dfrac{y^2-5}{2}$.

$y=\sqrt{2x+5}$ のグラフは, 不等式 $y \geq 0$ と方程式 $x=\dfrac{y^2-5}{2}$ との連立で表される放物線であり, 点 $\left(-\dfrac{5}{2}, 0\right), (0, \sqrt{5}), (-2, 1), (2, 3), (10, 5)$ が属す.



$\boxed{\text{終}}$

問8.2.1 xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{4}{3}, \infty\right)$ である関数 $y=\sqrt{3x+4}$ のグラフの概形を描け.

$y=\sqrt{3x+4} \geq 0$. $y=\sqrt{3x+4}$ より, $\quad = \quad$, $x = \quad$.

$y=\sqrt{3x+4}$ のグラフは，不等式 $y \geq 0$ と方程式 $x = \quad$ とでの連立で表される放物線であり，点 $\left(\quad ,0\right), (0, \ ), (\quad ,1), (\ ,4), (\ ,5)$ が属す.

$\boxed{問 8.2.1}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{4}{3}, \infty\right)$ である関数 $y = \sqrt{3x+4}$ のグラフの概形を描け.

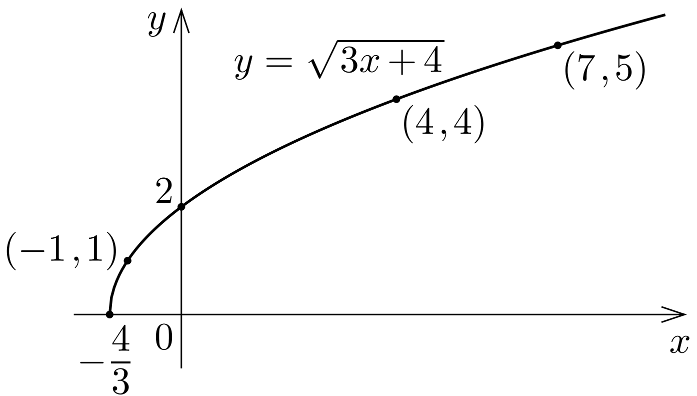
$$y = \sqrt{3x+4} \geq 0 \ . \quad y = \sqrt{3x+4} \text{ より}, \quad y^2 = 3x+4 \ , \quad x = \frac{y^2-4}{3} \ .$$

$y = \sqrt{3x+4}$ のグラフは，不等式 $y \geq 0$ と方程式 $x = \dfrac{y^2-4}{3}$ とでの連立で表される放物線であり，点 $\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right), (0,2), (-1,1), (4,4), (7,5)$ が属す.

$\boxed{問 8.2.1}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{4}{3},\infty\right)$ である関数 $y=\sqrt{3x+4}$ のグラフの概形を描け.

$$y=\sqrt{3x+4}\geq 0\ . \quad y=\sqrt{3x+4}\ \text{より,}\quad y^2=3x+4\ ,\quad x=\frac{y^2-4}{3}\ .$$

$y=\sqrt{3x+4}$ のグラフは，不等式 $y\geq 0$ と方程式 $x=\dfrac{y^2-4}{3}$ とでの連立で表される放物線であり，点 $\left(-\dfrac{4}{3},0\right),(0,2),(-1,1),(4,4),(7,5)$ が属す.



$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(-\infty, 6]$ である関数 $y = \sqrt{3 - \dfrac{x}{2}}$ のグラフを描く.

例 xy 座標平面において定義域が区間 $(-\infty, 6]$ である関数 $y = \sqrt{3 - \frac{x}{2}}$ のグラフを描く.

$$y = \sqrt{3 - \frac{x}{2}} \geq 0 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(-\infty, 6]$ である関数 $y = \sqrt{3 - \dfrac{x}{2}}$ のグラフを描く.

$y = \sqrt{3 - \dfrac{x}{2}} \geq 0$. また, $y = \sqrt{3 - \dfrac{x}{2}}$ より, $y^2 = 3 - \dfrac{x}{2}$, $x = 6 - 2y^2$.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(-\infty, 6]$ である関数 $y=\sqrt{3-\dfrac{x}{2}}$ のグラフを描く.

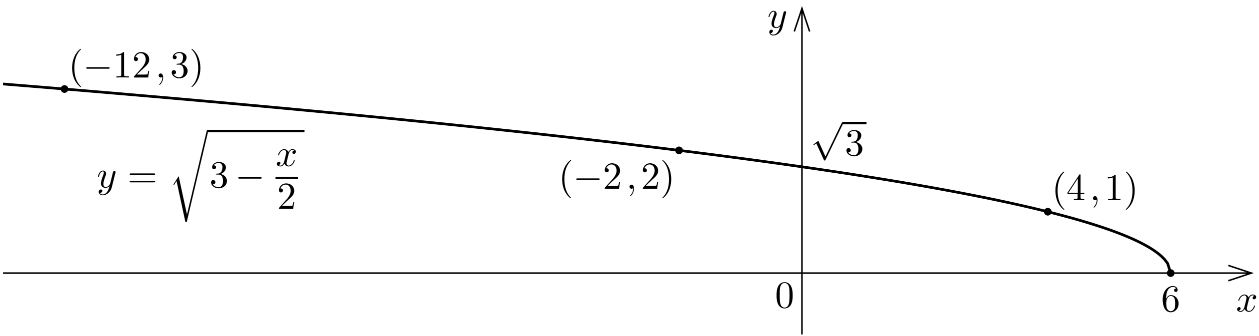
$y=\sqrt{3-\dfrac{x}{2}} \geq 0$ ．また，$y=\sqrt{3-\dfrac{x}{2}}$ より，$y^2=3-\dfrac{x}{2}$ ，$x=6-2y^2$ ．

$y=\sqrt{3-\dfrac{x}{2}}$ のグラフは，不等式 $y \geq 0$ と方程式 $x=6-2y^2$ との連立で表される放物線であり，点 $(6,0),\left(0,\sqrt{3}\right),(4,1),(-2,2),(-12,3)$ が属す.

例 xy 座標平面において定義域が区間 $(-\infty,6]$ である関数 $y=\sqrt{3-\dfrac{x}{2}}$ のグラフを描く.

$y=\sqrt{3-\dfrac{x}{2}} \geq 0$. また, $y=\sqrt{3-\dfrac{x}{2}}$ より, $y^2=3-\dfrac{x}{2}$, $x=6-2y^2$.

$y=\sqrt{3-\dfrac{x}{2}}$ のグラフは, 不等式 $y \geq 0$ と方程式 $x=6-2y^2$ との連立で表される放物線であり, 点 $(6,0),\left(0,\sqrt{3}\right),(4,1),(-2,2),(-12,3)$ が属す.



終

$\boxed{\text{問}8.2.2}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left(-\infty, \dfrac{15}{2}\right]$ である関数

$y = \sqrt{5 - \dfrac{2}{3}x}$ のグラフの概形を描け.

$y = \sqrt{5 - \dfrac{2}{3}x} \geq 0$. $y = \sqrt{5 - \dfrac{2}{3}x}$ より, $\quad = \quad$, $x = \quad$.

$y = \sqrt{5 - \dfrac{2}{3}x}$ のグラフは, 不等式 $y \geq 0$ と方程式 $x = \quad$ との連立

で表される放物線であり, 点 $\left(\quad ,0\right), (0, \quad), (\quad ,1), (\quad ,3)$ が属す.

$\boxed{問8.2.2}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left(-\infty, \dfrac{15}{2}\right]$ である関数 $y=\sqrt{5-\dfrac{2}{3}x}$ のグラフの概形を描け.

$$y=\sqrt{5-\frac{2}{3}x} \geq 0\ .\quad y=\sqrt{5-\frac{2}{3}x}\ \text{より,}\quad y^2=5-\frac{2}{3}x\ ,\quad x=\frac{15-3y^2}{2}\ .$$

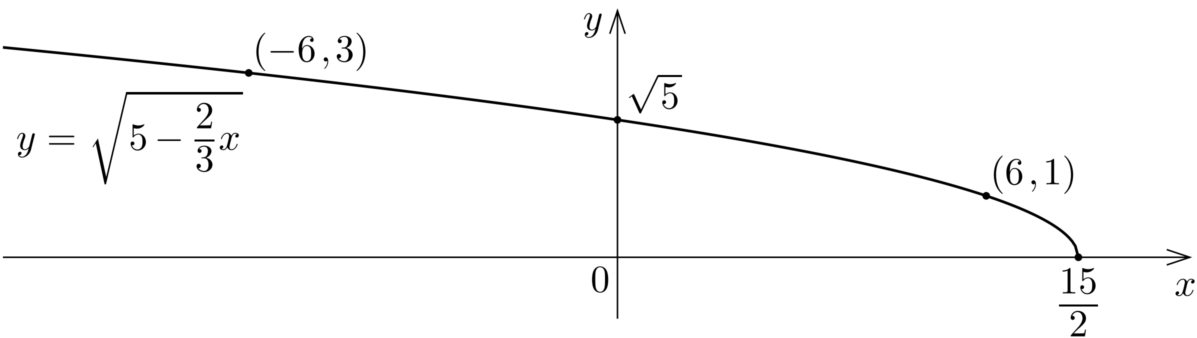
$y=\sqrt{5-\dfrac{2}{3}x}$ のグラフは, 不等式 $y \geq 0$ と方程式 $x=\dfrac{3}{2}(5-y^2)$ との連立で表される放物線であり, 点 $\left(\dfrac{15}{2}, 0\right), (0, \sqrt{5}), (6, 1), (-6, 3)$ が属す.

問8.2.2 xy 座標平面において定義域が区間 $\left(-\infty, \dfrac{15}{2}\right]$ である関数

$y=\sqrt{5-\dfrac{2}{3}x}$ のグラフの概形を描け.

$$y=\sqrt{5-\frac{2}{3}x}\geq 0\ .\quad y=\sqrt{5-\frac{2}{3}x}\ \text{より,}\quad y^2=5-\frac{2}{3}x\ ,\quad x=\frac{15-3y^2}{2}\ .$$

$y=\sqrt{5-\dfrac{2}{3}x}$ のグラフは, 不等式 $y\geq 0$ と方程式 $x=\dfrac{3}{2}(5-y^2)$ との連立で表される放物線であり, 点 $\left(\dfrac{15}{2}, 0\right), (0, \sqrt{5}), (6, 1), (-6, 3)$ が属す.



終