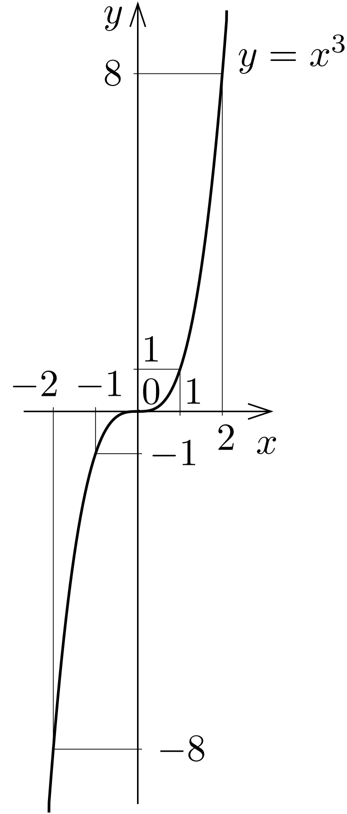
8.3 立方の逆関数

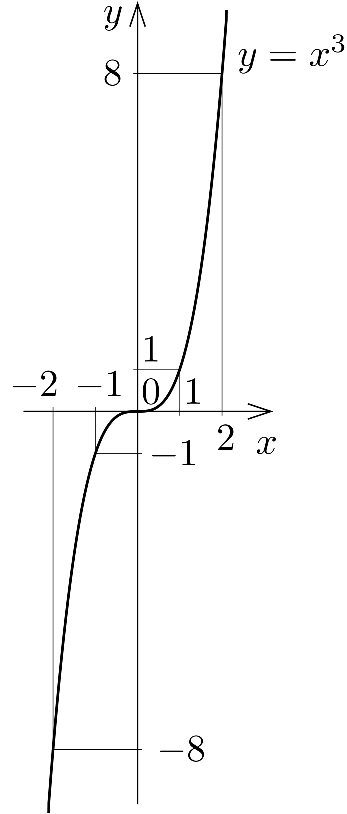
関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ である f の定義域の要素 x が唯一つあるとき, f の逆関数 f^{-1} がある.

実数 x の 3 乗 x^3 を x の立方ということがある. 立方の逆関数を考える.

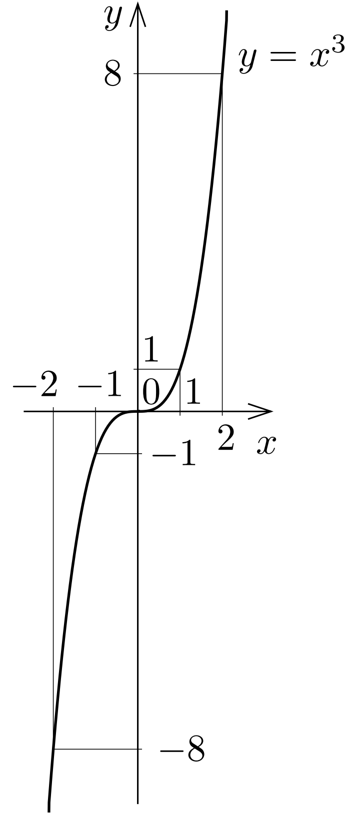
　定義域が実数全体である関数 x^3 を考える.
値域は実数全体である.



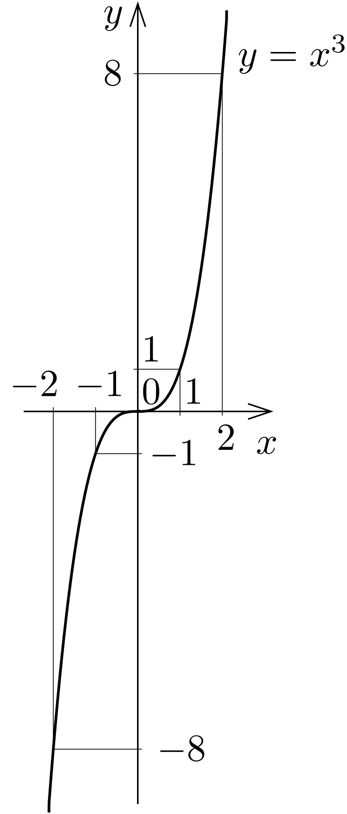
定義域が実数全体である関数 x^3 を考える.
値域は実数全体である. 各実数 y に対して
$y = x^3$ である実数 x が唯一つある.



定義域が実数全体である関数 x^3 を考える．値域は実数全体である．各実数 y に対して $y = x^3$ である実数 x が唯一つある．よって，関数 x^3 の逆関数があり，その定義域は実数全体である．



定義域が実数全体である関数 x^3 を考える．値域は実数全体である．各実数 y に対して $y = x^3$ である実数 x が唯一つある．よって，関数 x^3 の逆関数があり，その定義域は実数全体である．関数 x^3 の逆関数の実数 x における値を $\sqrt[3]{x}$ と書き表す．



7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ .$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \ .$$

定義域が実数全体である関数 x^3 を f とおく： $f(x) = x^3$ ．関数 f の逆関数 f^{-1} があり，

$$\text{任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \ ,$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } \quad f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ .$$

定義域が実数全体である関数 x^3 を f とおく： $f(x) = x^3$ ． 関数 f の逆関数 f^{-1} があり，

$$\text{任意の実数 } a \text{ について } \quad f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ ,$$

$f(x) = x^3$ ， $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ なので，

$$f^{-1}\big(f(a)\big) = \sqrt[3]{f(a)} = \sqrt[3]{a^3} \ ,$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \ .$$

定義域が実数全体である関数 x^3 を f とおく： $f(x) = x^3$ ．関数 f の逆関数 f^{-1} があり，

$$\text{任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \ ,$$

$f(x) = x^3$ ， $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ なので，

$$f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = \sqrt[3]{f(a)} = \sqrt[3]{a^3} \ ,$$

よって，

$$\text{任意の実数 } a \text{ について } \sqrt[3]{a^3} = a \ .$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } a \text{ について } f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ .$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } a \text{ について } f\left(f^{-1}(a)\right) = a \ .$$

定義域が実数全体である関数 x^3 を f とおく： $f(x) = x^3$ ． f の値域は実数全体である．関数 f の逆関数 f^{-1} があり，

$$\text{任意の実数 } a \text{ について } f\left(f^{-1}(a)\right) = a \ ,$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } a \text{ について } f\big(f^{-1}(a)\big) = a \ .$$

定義域が実数全体である関数 x^3 を f とおく： $f(x) = x^3$ ． f の値域は実数全体である．関数 f の逆関数 f^{-1} があり，

$$\text{任意の実数 } a \text{ について } f\big(f^{-1}(a)\big) = a \ ,$$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ， $f(x) = x^3$ なので，

$$f\big(f^{-1}(a)\big) = \{f^{-1}(a)\}^3 = \big(\sqrt[3]{a}\,\big)^3 \ ,$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } a \text{ について } f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ .$$

定義域が実数全体である関数 x^3 を f とおく： $f(x) = x^3$ ． f の値域は実数全体である．関数 f の逆関数 f^{-1} があり，

$$\text{任意の実数 } a \text{ について } f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ ,$$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ， $f(x) = x^3$ なので，

$$f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = \{f^{-1}(a)\}^3 = \left(\sqrt[3]{a}\,\right)^3 \ ,$$

よって，

$$\text{任意の実数 } a \text{ について } \left(\sqrt[3]{a}\,\right)^3 = a \ .$$

定理　任意の実数 a について,

$$\sqrt[3]{a^3} = a \ , \qquad \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a \ .$$

$\left(\sqrt[3]{A}\right)^3$ を $\sqrt[3]{A}\,^3$ のように略す.

例 次の式を計算して簡単にする： $\sqrt[3]{64}$ ， $\sqrt[3]{-8}$ ， $\sqrt[3]{5}^{\,6}$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする： $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{5}^{\,6}$.

$64 = 4^3$ なので

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 \ .$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

$\boxed{例}$ 次の式を計算して簡単にする： $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{5}^{\,6}$.

$64 = 4^3$ なので

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 \ .$$

$-8 = (-2)^3$ なので

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2 \ .$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする： $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{5}^{\,6}$.

$64 = 4^3$ なので

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 \ .$$

$-8 = (-2)^3$ なので

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2 \ .$$

指数法則 $a^{mn} = (a^m)^n$ （ m, n は自然数） を用いる：

$$\sqrt[3]{5}^{\,6} = \sqrt[3]{5}^{\,3\cdot 2} = \left(\sqrt[3]{5}^{\,3}\right)^2 = 5^2 = 25 \ .$$ $\boxed{\text{終}}$

$$\sqrt[3]{a}^{\,3} = a$$

$\boxed{\text{問}8.3}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$\sqrt[3]{125}$ ，$\sqrt[3]{-27}$ ，$\sqrt[3]{-2}^{\,15}$.

$\boxed{問8.3}$ **次の式を計算して簡単にせよ：** $\sqrt[3]{125}$ ，$\sqrt[3]{-27}$ ，$\sqrt[3]{-2}^{\,15}$.

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5 \ .$$

$\boxed{問8.3}$ **次の式を計算して簡単にせよ：** $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{-2}^{\,15}$.

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5 \ .$$

$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3 \ .$$

$\boxed{問8.3}$ **次の式を計算して簡単にせよ：** $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{-2}^{\,15}$.

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5 \ .$$

$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3 \ .$$

$$\sqrt[3]{-2}^{\,15} = \sqrt[3]{-2}^{\,3\cdot 5} = \left(\sqrt[3]{-2}^{\,3}\right)^5 = (-2)^5 = -32 \ .$$

平方根 $\sqrt{}$ に関する定理と似た次の定理が成り立つ.

定理　任意の実数 a, b について,

$$\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}\ , \qquad b \neq 0 \text{ のとき } \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\ .$$