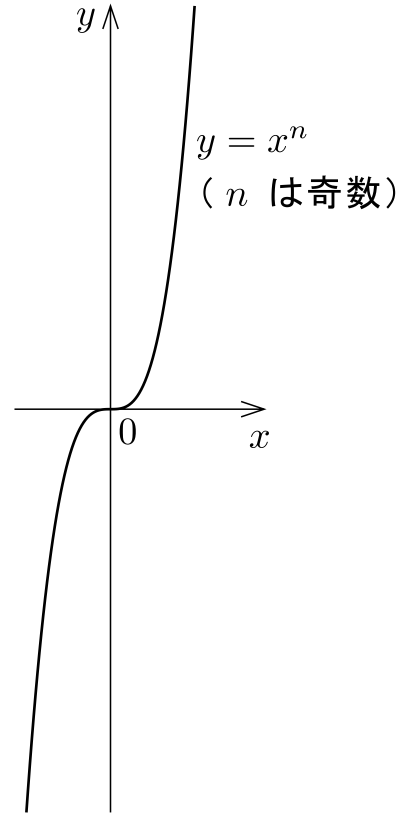
8.5 冪関数の逆関数

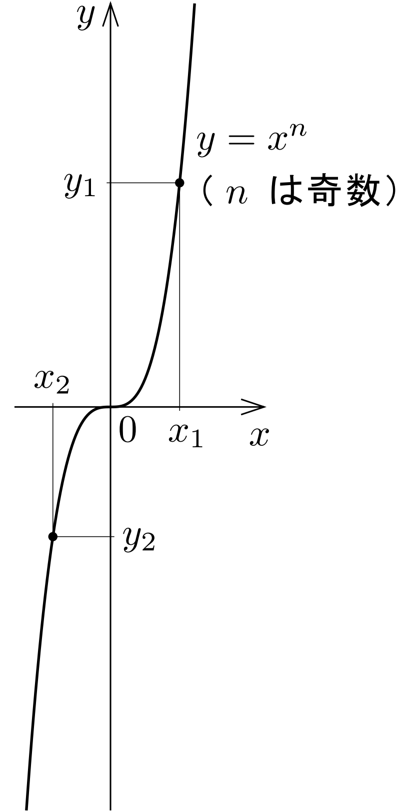
関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ である f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，f の逆関数 f^{-1} がある.

冪関数の逆関数を考える.

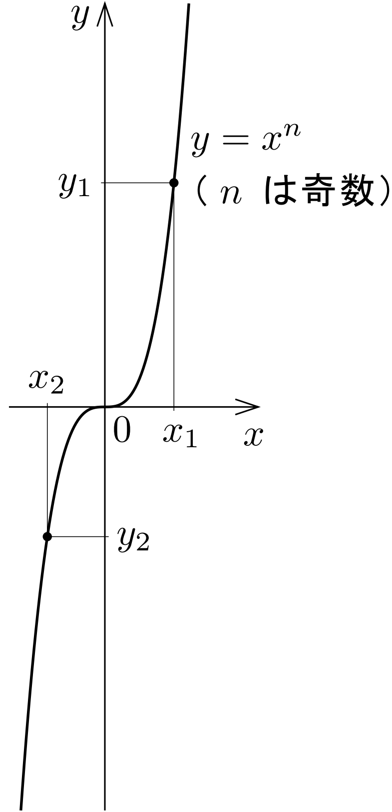
指数が正の奇数 n であり定義域が実数全体である冪関数 x^n を考える．値域は実数全体である．



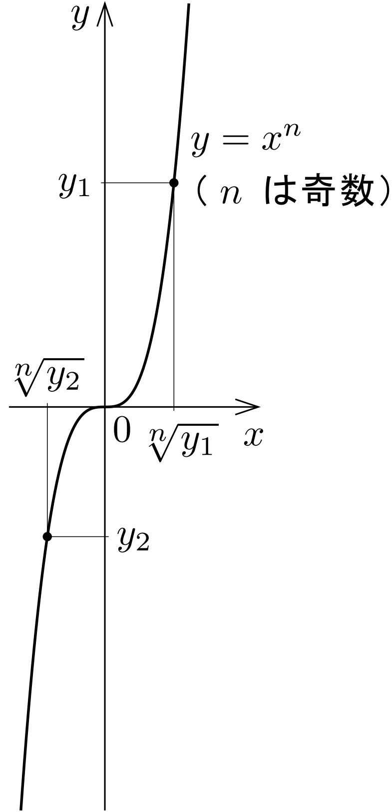
指数が正の奇数 n であり定義域が実数全体である冪関数 x^n を考える．値域は実数全体である．各実数 y に対して $y = x^n$ である実数 x が唯一つある．



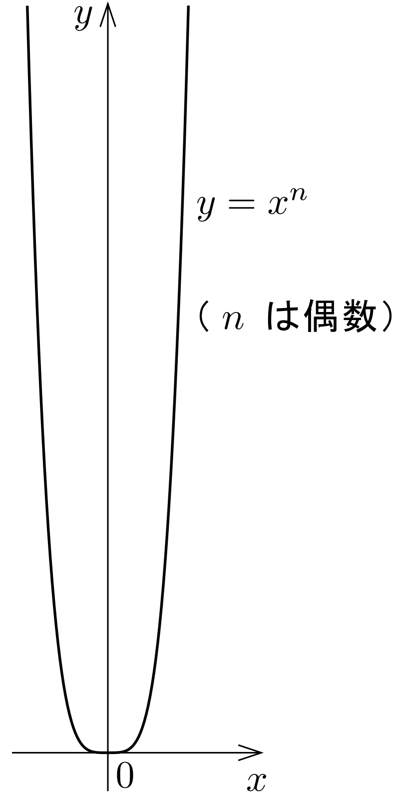
指数が正の奇数 n であり定義域が実数全体である冪関数 x^n を考える．値域は実数全体である．各実数 y に対して $y = x^n$ である実数 x が唯一つある．よって，指数が正の奇数 n であり定義域が実数全体である冪関数 x^n の逆関数があり，その定義域は実数全体である．



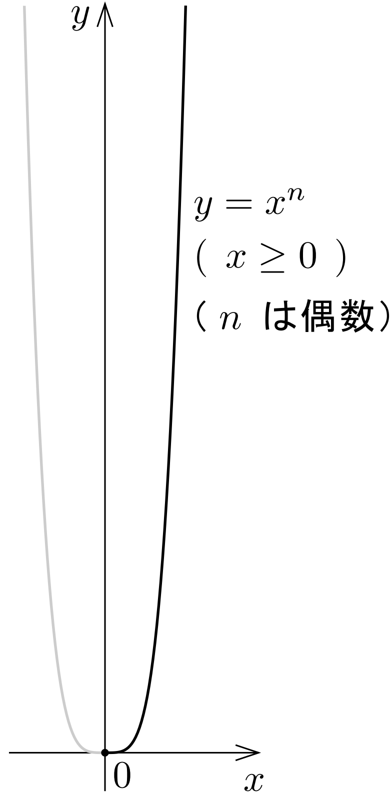
指数が正の奇数 n であり定義域が実数全体である冪関数 x^n を考える．値域は実数全体である．各実数 y に対して $y=x^n$ である実数 x が唯一つある．よって，指数が正の奇数 n であり定義域が実数全体である冪関数 x^n の逆関数があり，その定義域は実数全体である．指数が正の奇数 n である冪関数 x^n の逆関数の実数 x における値を $\sqrt[n]{x}$ と書き表す．



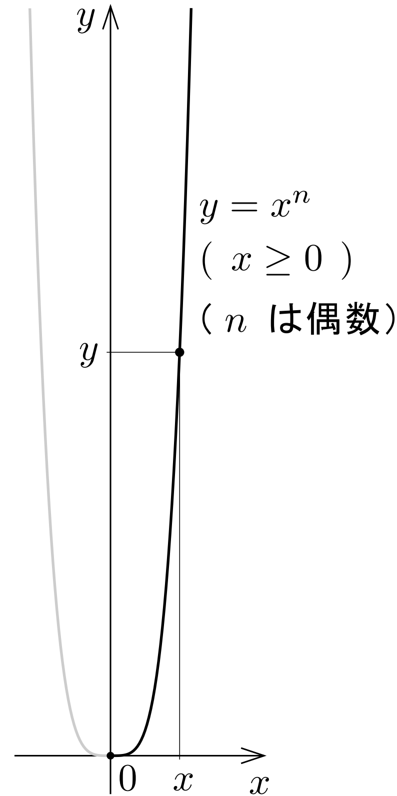
指数が正の偶数 n である冪関数 x^n を考える.



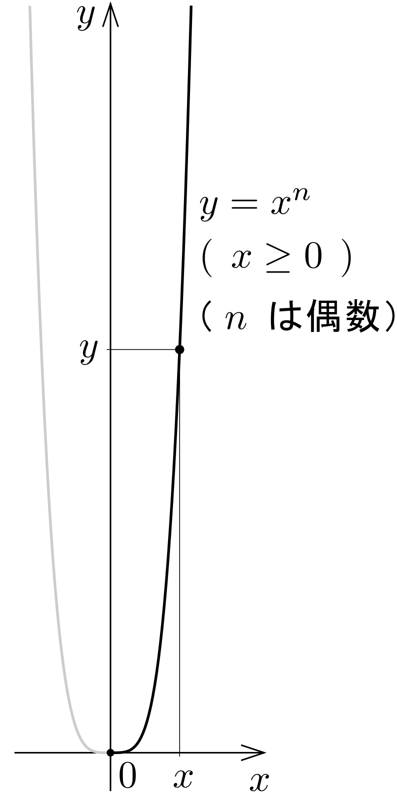
指数が正の偶数 n である冪関数 x^n を考える．逆関数を考えるために $x \geq 0$ とする．



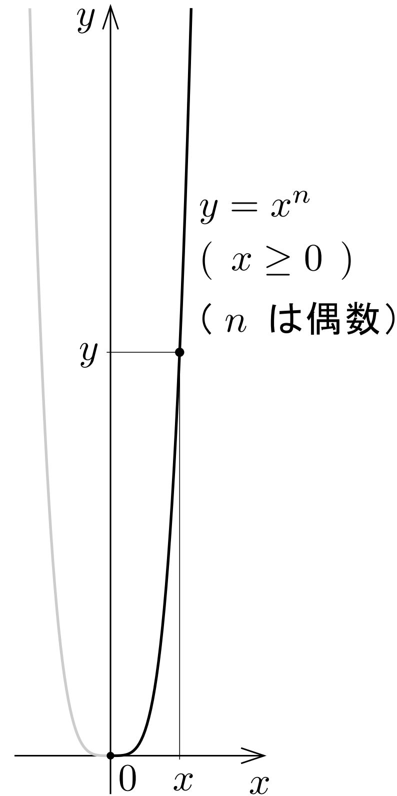
　指数が正の偶数 n である冪関数 x^n を考える．逆関数を考えるために $x \geq 0$ とする．0 以上の各実数 y に対して $y = x^n$ である実数 x が唯一つある．



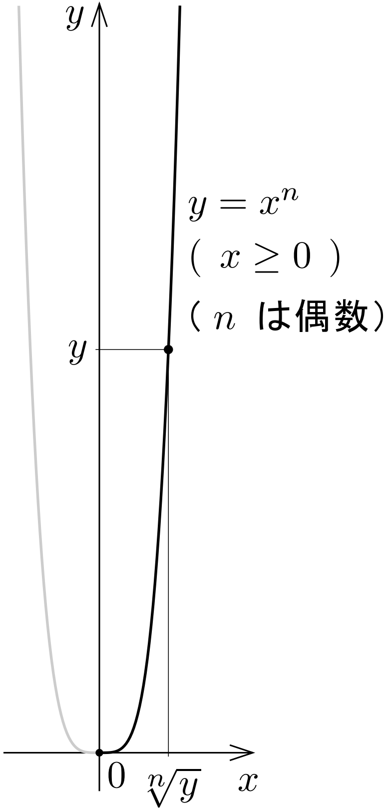
指数が正の偶数 n である冪関数 x^n を考える．逆関数を考えるために $x \geq 0$ とする．0 以上の各実数 y に対して $y = x^n$ である実数 x が唯一つある．つまり，指数が正の偶数 n である冪関数 x^n の定義域を区間 $[0, \infty)$ に制限すると，値域である区間 $[0, \infty)$ の各実数 y に対して $y = x^n$ である定義域の実数 x が唯一つある．



指数が正の偶数 n である冪関数 x^n を考える．逆関数を考えるために $x \geq 0$ とする．0 以上の各実数 y に対して $y = x^n$ である実数 x が唯一つある．つまり，指数が正の偶数 n である冪関数 x^n の定義域を区間 $[0, \infty)$ に制限すると，値域である区間 $[0, \infty)$ の各実数 y に対して $y = x^n$ である定義域の実数 x が唯一つある．よって，指数が正の偶数 n であり定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 x^n の逆関数があり，その定義域は区間 $[0, \infty)$ である．



指数が正の偶数 n である冪関数 x^n を考える．逆関数を考えるために $x \geq 0$ とする．0 以上の各実数 y に対して $y = x^n$ である実数 x が唯一つある．つまり，指数が正の偶数 n である冪関数 x^n の定義域を区間 $[0, \infty)$ に制限すると，値域である区間 $[0, \infty)$ の各実数 y に対して $y = x^n$ である定義域の実数 x が唯一つある．よって，指数が正の偶数 n であり定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 x^n の逆関数があり，その定義域は区間 $[0, \infty)$ である．指数が正の偶数 n である冪関数 x^n の逆関数の 0 以上の実数 x における値を $\sqrt[n]{x}$ と書き表す．



7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ .$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ .$$

指数が正の自然数 n である冪関数を f とおく： $f(x) = x^n$.

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \ .$$

指数が正の自然数 n である冪関数を f とおく： $f(x) = x^n$ ． f の定義域は，n が奇数のときは実数全体とし，n が偶数のときは区間 $[0, \infty)$ とする．

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \text{ .}$$

指数が正の自然数 n である冪関数を f とおく： $f(x) = x^n$ ． f の定義域は，n が奇数のときは実数全体とし，n が偶数のときは区間 $[0, \infty)$ とする．関数 f の逆関数 f^{-1} がある．

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ .$$

指数が正の自然数 n である冪関数を f とおく： $f(x) = x^n$ ． f の定義域は，n が奇数のときは実数全体とし，n が偶数のときは区間 $[0, \infty)$ とする．関数 f の逆関数 f^{-1} がある．

$$n \text{ が奇数のときは任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ ,$$

$$n \text{ が偶数のときは } 0 \text{ 以上の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ .$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\big(f(a)\big) = a \text{ .}$$

指数が正の自然数 n である冪関数を f とおく： $f(x) = x^n$ ． f の定義域は，n が奇数のときは実数全体とし，n が偶数のときは区間 $[0, \infty)$ とする．関数 f の逆関数 f^{-1} がある．

$$n \text{ が奇数のときは任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\big(f(a)\big) = a \text{ ,}$$

$$n \text{ が偶数のときは } 0 \text{ 以上の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\big(f(a)\big) = a \text{ .}$$

$f(x) = x^n$ ， $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ なので，

$$f^{-1}\big(f(a)\big) = \sqrt[n]{f(a)} = \sqrt[n]{a^n} \text{ .}$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

f の定義域の任意の実数 a について　$f^{-1}\big(f(a)\big)=a$ ．

指数が正の自然数 n である冪関数を f とおく： $f(x)=x^n$ ． f の定義域は，n が奇数のときは実数全体とし，n が偶数のときは区間 $[0,\infty)$ とする．関数 f の逆関数 f^{-1} がある．

n が奇数のときは任意の実数 a について　$f^{-1}\big(f(a)\big)=a$ ，

n が偶数のときは 0 以上の任意の実数 a について　$f^{-1}\big(f(a)\big)=a$ ．

$f(x)=x^n$ ，　$f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$　なので，

$$f^{-1}\big(f(a)\big)=\sqrt[n]{f(a)}=\sqrt[n]{a^n}\ .$$

よって，

n が奇数のときは任意の実数 a について　$\sqrt[n]{a^n}=a$ ，

n が偶数のときは 0 以上の任意の実数 a について　$\sqrt[n]{a^n}=a$ ．

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } a \text{ について } f\left(f^{-1}(a)\right) = a \ .$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } a \text{ について } \quad f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ .$$

指数が正の自然数 n である冪関数を f とおく： $f(x) = x^n$.

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } a \text{ について } f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \text{ .}$$

指数が正の自然数 n である冪関数を f とおく： $f(x) = x^n$ ． f の定義域は，n が奇数のときは実数全体とし，n が偶数のときは区間 $[0, \infty)$ とする．

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } a \text{ について } f\big(f^{-1}(a)\big) = a \ .$$

指数が正の自然数 n である冪関数を f とおく： $f(x) = x^n$ ． f の定義域は，n が奇数のときは実数全体とし，n が偶数のときは区間 $[0, \infty)$ とする．関数 f の逆関数 f^{-1} がある．

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } a \text{ について } f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ .$$

指数が正の自然数 n である冪関数を f とおく： $f(x) = x^n$ ． f の定義域は，n が奇数のときは実数全体とし，n が偶数のときは区間 $[0, \infty)$ とする．関数 f の逆関数 f^{-1} がある． f の値域は，n が奇数のときは実数全体であり，n が偶数のときは区間 $[0, \infty)$ である．

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } a \text{ について } f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ .$$

指数が正の自然数 n である冪関数を f とおく： $f(x) = x^n$ ． f の定義域は，n が奇数のときは実数全体とし，n が偶数のときは区間 $[0, \infty)$ とする．関数 f の逆関数 f^{-1} がある． f の値域は，n が奇数のときは実数全体であり，n が偶数のときは区間 $[0, \infty)$ である．

$$n \text{ が奇数のときは任意の実数 } a \text{ について } f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ ,$$

$$n \text{ が偶数のときは } 0 \text{ 以上の任意の実数 } a \text{ について } f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ .$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } a \text{ について } f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ .$$

指数が正の自然数 n である冪関数を f とおく： $f(x) = x^n$ ． f の定義域は，n が奇数のときは実数全体とし，n が偶数のときは区間 $[0, \infty)$ とする．関数 f の逆関数 f^{-1} がある． f の値域は，n が奇数のときは実数全体であり，n が偶数のときは区間 $[0, \infty)$ である．

$$n \text{ が奇数のときは任意の実数 } a \text{ について } f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ ,$$

$$n \text{ が偶数のときは } 0 \text{ 以上の任意の実数 } a \text{ について } f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ .$$

$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ ，$f(x) = x^n$ なので，

$$f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = \{f^{-1}(a)\}^n = \sqrt[n]{a}^{\,n} \ .$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } a \text{ について } f\big(f^{-1}(a)\big) = a \ .$$

指数が正の自然数 n である冪関数を f とおく： $f(x) = x^n$ ． f の定義域は，n が奇数のときは実数全体とし，n が偶数のときは区間 $[0, \infty)$ とする．関数 f の逆関数 f^{-1} がある． f の値域は，n が奇数のときは実数全体であり，n が偶数のときは区間 $[0, \infty)$ である．

$$n \text{ が奇数のときは任意の実数 } a \text{ について } f\big(f^{-1}(a)\big) = a \ ,$$

$$n \text{ が偶数のときは } 0 \text{ 以上の任意の実数 } a \text{ について } f\big(f^{-1}(a)\big) = a \ .$$

$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ ， $f(x) = x^n$ なので，

$$f\big(f^{-1}(a)\big) = \{f^{-1}(a)\}^n = \sqrt[n]{a}^{\,n} \ .$$

よって，

$$n \text{ が奇数のときは任意の実数 } a \text{ について } \sqrt[n]{a}^{\,n} = a \ ;$$

$$n \text{ が偶数のときは } 0 \text{ 以上の任意の実数 } a \text{ について } \sqrt[n]{a}^{\,n} = a \ .$$

定理　正の整数 n が奇数のとき，任意の実数 a について，

$$\sqrt[n]{a^n} = a \ , \qquad \sqrt[n]{a}^{\,n} = a \ .$$

正の整数 n が偶数のとき， $a \geq 0$ である任意の実数 a について，

$$\sqrt[n]{a^n} = a \ , \qquad \sqrt[n]{a}^{\,n} = a \ .$$

例 次の式を計算して簡単にする： $\sqrt[5]{-32}$ ， $\sqrt[4]{5}^{\,8}$ ．

例 次の式を計算して簡単にする： $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[4]{5}^{\,8}$.

$-32 = (-2)^5$ なので

$$\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2 \, .$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

例 次の式を計算して簡単にする： $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[4]{5}^{\,8}$.

$-32=(-2)^5$ なので

$$\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^5}=-2 \ .$$

指数法則 $a^{mn}=(a^m)^n$ （ m,n は自然数） を用いる：

$$\sqrt[4]{5}^{\,8}=\sqrt[4]{5}^{\,4\cdot 2}=\left(\sqrt[4]{5}^{\,4}\right)^2=5^2=25 \ .$$

終

$$\sqrt[n]{a}^{\,n}=a$$

$\boxed{問8.5}$ 以下の式を計算して簡単にせよ：$\sqrt[4]{81}$ ，$\sqrt[5]{-2}^{\,15}$ ，$\sqrt[6]{64}$ ．

問8.5 以下の式を計算して簡単にせよ：$\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[5]{-2}^{\,15}$, $\sqrt[6]{64}$.

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \ .$$

$\boxed{問8.5}$ 以下の式を計算して簡単にせよ：$\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[5]{-2}^{\,15}$, $\sqrt[6]{64}$.

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \ .$$

$$\sqrt[5]{-2}^{\,15} = \left(\sqrt[5]{-2}^{\,5}\right)^3 = (-2)^3 = -8 \ .$$

$\boxed{問8.5}$ 以下の式を計算して簡単にせよ：$\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[5]{-2}^{\,15}$, $\sqrt[6]{64}$.

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \ .$$

$$\sqrt[5]{-2}^{\,15} = \left(\sqrt[5]{-2}^{\,5}\right)^3 = (-2)^3 = -8 \ .$$

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2 \ .$$

$\boxed{終}$

冪関数 x^1 の逆関数は $\sqrt[1]{x}$ なので，$\sqrt[1]{x^1} = x$; $x^1 = x$ なので，結局 $\sqrt[1]{x} = x$ ．つまり，$\sqrt[1]{}$ は実質的に意味がない．

冪関数 x^1 の逆関数は $\sqrt[1]{x}$ なので，$\sqrt[1]{x^1} = x$; $x^1 = x$ なので，結局 $\sqrt[1]{x} = x$ ．つまり，$\sqrt[1]{}$ は実質的に意味がない．

定義域が区間 $[0, \infty)$ である 2 次関数 x^2 の逆関数は $\sqrt{x}$ なので，$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ ．つまり，$\sqrt[2]{}$ は $\sqrt{}$ と同じことである．

正の整数 n に対して，記号 $\sqrt[n]{}$ を根号といい，実数 a に対して $\sqrt[n]{a}$ を n 乗根 a ということがある．n が偶数であるときは，$\sqrt[n]{a}$ は $a \geq 0$ のときにのみ意味を持つ．

　正の整数 n に対して，記号 $\sqrt[n]{}$ を根号といい，実数 a に対して $\sqrt[n]{a}$ を n 乗根 a ということがある．n が偶数であるときは，$\sqrt[n]{a}$ は $a \geq 0$ のときにのみ意味を持つ．

定理　任意の正の整数 n および任意の実数 a, b について，n が偶数であるとき $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ ならば，

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}\ , \qquad\qquad b \neq 0 \text{ のとき } \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ .$$