8.7 指数の拡張

冪の指数を有理数の範囲にまで広げる．つまり，指数が有理数である冪，例えば実数 a の $\dfrac{5}{2}$ 乗 $a^{\frac{5}{2}}$ とか $-\dfrac{4}{3}$ 乗 $a^{-\frac{4}{3}}$ などを考える．

冪の指数を有理数の範囲にまで広げる．つまり，指数が有理数である冪，例えば実数 a の $\dfrac{5}{2}$ 乗 $a^{\frac{5}{2}}$ とか $-\dfrac{4}{3}$ 乗 $a^{-\frac{4}{3}}$ などを考える．

任意の有理数は，分数 $\dfrac{m}{n}$ （m は整数で n は正の整数）の形で表せる．例えば，

$$-\frac{5}{3} = \frac{-5}{3}\,, \qquad -4 = \frac{-4}{1}\,.$$

冪の指数を有理数の範囲にまで広げる．つまり，指数が有理数である冪，例えば実数 a の $\dfrac{5}{2}$ 乗 $a^{\frac{5}{2}}$ とか $-\dfrac{4}{3}$ 乗 $a^{-\frac{4}{3}}$ などを考える．

任意の有理数は，分数 $\dfrac{m}{n}$ （m は整数で n は正の整数）の形で表せる．例えば，

$$-\frac{5}{3} = \frac{-5}{3}\,, \qquad -4 = \frac{-4}{1}\,.$$

正の実数 a 及び整数 m 及び正の整数 n に対して a の $\dfrac{m}{n}$ 乗 $a^{\frac{m}{n}}$ を定義したい．

正の実数 a 及び整数 m 及び正の整数 n に対して a の $\dfrac{m}{n}$ 乗 $a^{\frac{m}{n}}$ を定義したい．冪の指数を有理数の範囲に広げても指数法則が同じ形で成り立つことが望ましい．

正の実数 a 及び整数 m 及び正の整数 n に対して a の $\dfrac{m}{n}$ 乗 $a^{\frac{m}{n}}$ を定義したい．冪の指数を有理数の範囲に広げても指数法則が同じ形で成り立つことが望ましい．有理数 $p = \dfrac{m}{n}$ と $q = n$ とについて $(a^p)^q = a^{pq}$ とすると，

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}n} = a^m \ ,$$

正の実数 a 及び整数 m 及び正の整数 n に対して a の $\dfrac{m}{n}$ 乗 $a^{\frac{m}{n}}$ を定義したい．冪の指数を有理数の範囲に広げても指数法則が同じ形で成り立つことが望ましい．有理数 $p = \dfrac{m}{n}$ と $q = n$ とについて $(a^p)^q = a^{pq}$ とすると，

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}n} = a^m ,$$

よって

$$\sqrt[n]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n} = \sqrt[n]{a^m} ,$$

正の実数 a 及び整数 m 及び正の整数 n に対して a の $\dfrac{m}{n}$ 乗 $a^{\frac{m}{n}}$ を定義したい．冪の指数を有理数の範囲に広げても指数法則が同じ形で成り立つことが望ましい．有理数 $p=\dfrac{m}{n}$ と $q=n$ とについて $(a^p)^q=a^{pq}$ とすると，

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}n} = a^m ,$$

よって

$$\sqrt[n]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n} = \sqrt[n]{a^m} ,$$

$\sqrt[n]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n} = a^{\frac{m}{n}}$ なので $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

$\sqrt[n]{A^n} = A$

正の実数 a 及び整数 m 及び正の整数 n に対して a の $\dfrac{m}{n}$ 乗 $a^{\frac{m}{n}}$ を定義したい．冪の指数を有理数の範囲に広げても指数法則が同じ形で成り立つことが望ましい．有理数 $p=\dfrac{m}{n}$ と $q=n$ とについて $(a^p)^q=a^{pq}$ とすると，

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}n} = a^m \ ,$$

よって

$$\sqrt[n]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n} = \sqrt[n]{a^m} \ ,$$

$\sqrt[n]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n}=a^{\frac{m}{n}}$ なので $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ ．そこで $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ と定義したい．

正の実数 a 及び整数 m 及び正の整数 n に対して $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ と定義するためには次の補助定理が必要である.

補助定理　正の実数 a 及び任意の整数 k, m 及び任意の正の整数 l, n について, $\dfrac{k}{l} = \dfrac{m}{n}$ ならば $\sqrt[l]{a^k} = \sqrt[n]{a^m}$.

正の実数 a 及び整数 m 及び正の整数 n に対して $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ と定義するためには次の補助定理が必要である.

補助定理　正の実数 a 及び任意の整数 k, m 及び任意の正の整数 l, n について, $\dfrac{k}{l} = \dfrac{m}{n}$ ならば $\sqrt[l]{a^k} = \sqrt[n]{a^m}$.

証明は省略するが, この補助定理が成り立つので次の定義ができる.

定義　実数 a について $a \geq 0$ とする. 整数 m と正の整数 n とに対して, a の $\dfrac{m}{n}$ 乗 $a^{\frac{m}{n}}$ を次のように定義する:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \ ;$$

但し, $m < 0$ のときは $a > 0$ とする.

例えば次のようになる：

$$2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8} \ ; \qquad 3^{-\frac{2}{5}} = 3^{\frac{-2}{5}} = \sqrt[5]{3^{-2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{9}} \ .$$

次のことに注意すること：整数 m 及び正の実数 a に対して

$$a^{\frac{m}{2}} = \sqrt[2]{a^m} = \sqrt{a^m} \ .$$

前節で述べた指数法則は，冪の指数を有理数の範囲にまで拡張しても大体同じ形で成り立つ．

定理（有理数指数の指数法則）　任意の正の実数 a, b 及び任意の有理数 p, q について，

$$a^p a^q = a^{p+q} \ , \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \ , \qquad (a^p)^q = a^{pq} \ ;$$

$$(ab)^p = a^p b^p \ , \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \ .$$

$a = a^1$ なので， $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}}$ ；従って，指数法則を用いると，

$$\sqrt[n]{a}^{\,m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} .$$

定理　任意の正の実数 a 及び任意の整数 m 及び任意の正の整数 n について，

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m} .$$

指数法則より

$$a^{-p} = a^{0-p} = \frac{a^0}{a^p} = \frac{1}{a^p} .$$

定理　任意の正の実数 a 及び任意の有理数 p について $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$.

例 正の実数 a に対して，次の式を a の冪の形に直す： $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}^{\,5}}$，$\sqrt{a^3\sqrt[3]{a}^{\,2}}$．

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数 a に対して，次の式を a の冪の形に直す： $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}^{\,5}}$，$\sqrt{a^3\sqrt[3]{a}^{\,2}}$．

指数法則を用いる.

$$\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}^{\,5}} = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{2}}} = a^{\frac{4}{3}-\frac{5}{2}} = a^{-\frac{7}{6}} .$$

例 正の実数 a に対して，次の式を a の冪の形に直す： $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}^{\,5}}$，$\sqrt{a^3\sqrt[3]{a}^{\,2}}$．

指数法則を用いる．

$$\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}^{\,5}} = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{2}}} = a^{\frac{4}{3}-\frac{5}{2}} = a^{-\frac{7}{6}} .$$

$$\sqrt{a^3\sqrt[3]{a}^{\,2}} = \left(a^3 a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{3+\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{11}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{6}} .$$

終

$\boxed{\text{問}8.7.1}$ 正の実数 a に対して，次の式を a の冪の形に直せ：$\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a}^{\,7}}$ ，$\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^3}}$ ．

$\boxed{\text{問}8.7.1}$ **正の実数 a に対して，次の式を a の冪の形に直せ：$\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a}^{\,7}}$ ，$\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^3}}$ ．**

$$\frac{\sqrt{a}^{\,3}}{\sqrt[3]{a}^{\,7}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{7}{3}}} = a^{\frac{3}{2}-\frac{7}{3}} = a^{-\frac{5}{6}} .$$

$\boxed{\text{問}8.7.1}$ 正の実数 a に対して，次の式を a の冪の形に直せ：$\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a}^{\,7}}$ ，$\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^3}}$ ．

$$\frac{\sqrt{a}^{\,3}}{\sqrt[3]{a^7}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{7}{3}}} = a^{\frac{3}{2}-\frac{7}{3}} = a^{-\frac{5}{6}} \ .$$

$$\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^3}} = \left(a^2 a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{2+\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{6}} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数 a, b に対して次の式を計算して簡単にする: $\dfrac{a^3}{b^2}(a^8b^5)^{\frac{3}{4}}$, $ab^4\left(\dfrac{a^2}{b^9}\right)^{\frac{2}{3}}$. 結果は指数が正の数の a や b の冪の式かまたは a や b そのもののだけから成る積や分数の形の式で書き表す.

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数 a, b に対して次の式を計算して簡単にする: $\dfrac{a^3}{b^2}(a^8b^5)^{\frac{3}{4}}$, $ab^4\left(\dfrac{a^2}{b^9}\right)^{\frac{2}{3}}$. 結果は指数が正の数の a や b の冪の式かまたは a や b そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す.

指数法則を用いて計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数 a, b に対して次の式を計算して簡単にする: $\dfrac{a^3}{b^2}(a^8b^5)^{\frac{3}{4}}$, $ab^4\left(\dfrac{a^2}{b^9}\right)^{\frac{2}{3}}$. 結果は指数が正の数の a や b の冪の式かまたは a や b そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す.

指数法則を用いて計算する.

$$\frac{a^3}{b^2}(a^8b^5)^{\frac{3}{4}} = \frac{a^3}{b^2}(a^8)^{\frac{3}{4}}(b^5)^{\frac{3}{4}} = \frac{a^3}{b^2}a^6b^{\frac{15}{4}} = a^3a^6\frac{b^{\frac{15}{4}}}{b^2} = a^9b^{\frac{7}{4}} .$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数 a, b に対して次の式を計算して簡単にする: $\dfrac{a^3}{b^2}(a^8b^5)^{\frac{3}{4}}$, $ab^4\left(\dfrac{a^2}{b^9}\right)^{\frac{2}{3}}$. 結果は指数が正の数の a や b の冪の式かまたは a や b そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す.

指数法則を用いて計算する.

$$\frac{a^3}{b^2}(a^8b^5)^{\frac{3}{4}} = \frac{a^3}{b^2}(a^8)^{\frac{3}{4}}(b^5)^{\frac{3}{4}} = \frac{a^3}{b^2}a^6b^{\frac{15}{4}} = a^3a^6\frac{b^{\frac{15}{4}}}{b^2} = a^9b^{\frac{7}{4}}.$$

$$ab^4\left(\frac{a^2}{b^9}\right)^{\frac{2}{3}} = ab^4\frac{(a^2)^{\frac{2}{3}}}{(b^9)^{\frac{2}{3}}} = ab^4\frac{a^{\frac{4}{3}}}{b^6} = aa^{\frac{4}{3}}\frac{b^4}{b^6} = a^{\frac{7}{3}}b^{-2} = \frac{a^{\frac{7}{3}}}{b^2}.$$ $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問8.7.2}$ 正の実数 a, b に対して次の式を計算して簡単にせよ：$a^3b^2\left(\dfrac{a^2}{b^{10}}\right)^{\frac{3}{5}}$ ，$\dfrac{b^2}{a^5}(a^5b^3)^{\frac{4}{3}}$ ． 結果は指数が正の数の a や b の冪の式かまたは a や b そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表せ.

$\boxed{問8.7.2}$ 正の実数 a, b に対して次の式を計算して簡単にせよ：$a^3b^2\left(\dfrac{a^2}{b^{10}}\right)^{\frac{3}{5}}$，$\dfrac{b^2}{a^5}(a^5b^3)^{\frac{4}{3}}$．結果は指数が正の数の a や b の冪の式かまたは a や b そのもののだけから成る積や分数の形の式で書き表せ.

$$a^3b^2\left(\frac{a^2}{b^{10}}\right)^{\frac{3}{5}} = a^3b^2\,\frac{a^{\frac{6}{5}}}{b^6} = a^3a^{\frac{6}{5}}\,\frac{b^2}{b^6} = \frac{a^{\frac{21}{5}}}{b^4}\ .$$

$\boxed{問8.7.2}$ 正の実数 a, b に対して次の式を計算して簡単にせよ：$a^3b^2\left(\dfrac{a^2}{b^{10}}\right)^{\frac{3}{5}}$，$\dfrac{b^2}{a^5}(a^5b^3)^{\frac{4}{3}}$．結果は指数が正の数の a や b の冪の式かまたは a や b そのもののだけから成る積や分数の形の式で書き表せ.

$$a^3b^2\left(\frac{a^2}{b^{10}}\right)^{\frac{3}{5}} = a^3b^2\,\frac{a^{\frac{6}{5}}}{b^6} = a^3a^{\frac{6}{5}}\,\frac{b^2}{b^6} = \frac{a^{\frac{21}{5}}}{b^4}\ .$$

$$\frac{b^2}{a^5}(a^5b^3)^{\frac{4}{3}} = \frac{b^2}{a^5}\,a^{\frac{20}{3}}b^4 = \frac{a^{\frac{20}{3}}}{a^5}\,b^2b^4 = a^{\frac{5}{3}}b^6\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数 x, y に対して次の式を計算して簡単にする： $\dfrac{y^2}{x^3}(x^3y^2)^{-\frac{4}{3}}$, $xy^4\left(\dfrac{y^3}{x^4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ ． 結果は指数が正の数の x や y の冪の式かまたは x や y そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す.

例 正の実数 x, y に対して次の式を計算して簡単にする： $\frac{y^2}{x^3}(x^3y^2)^{-\frac{4}{3}}$ ， $xy^4\left(\frac{y^3}{x^4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ ． 結果は指数が正の数の x や y の冪の式かまたは x や y そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す.

指数法則を用いて計算する.

$\boxed{例}$ 正の実数 x, y に対して次の式を計算して簡単にする： $\dfrac{y^2}{x^3}(x^3y^2)^{-\frac{4}{3}}$，$xy^4\left(\dfrac{y^3}{x^4}\right)^{-\frac{3}{2}}$．結果は指数が正の数の x や y の冪の式かまたは x や y そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す.

指数法則を用いて計算する.

$$\frac{y^2}{x^3}(x^3y^2)^{-\frac{4}{3}} = \frac{y^2}{x^3}(x^3)^{-\frac{4}{3}}(y^2)^{-\frac{4}{3}} = \frac{y^2}{x^3}x^{-4}y^{-\frac{8}{3}} = \frac{x^{-4}}{x^3}y^2y^{-\frac{8}{3}} = x^{-7}y^{-\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{1}{x^7y^{\frac{2}{3}}}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数 x, y に対して次の式を計算して簡単にする： $\dfrac{y^2}{x^3}(x^3y^2)^{-\frac{4}{3}}$，$xy^4\left(\dfrac{y^3}{x^4}\right)^{-\frac{3}{2}}$． 結果は指数が正の数の x や y の冪の式かまたは x や y そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す.

指数法則を用いて計算する.

$$\frac{y^2}{x^3}(x^3y^2)^{-\frac{4}{3}} = \frac{y^2}{x^3}(x^3)^{-\frac{4}{3}}(y^2)^{-\frac{4}{3}} = \frac{y^2}{x^3}x^{-4}y^{-\frac{8}{3}} = \frac{x^{-4}}{x^3}y^2y^{-\frac{8}{3}} = x^{-7}y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^7y^{\frac{2}{3}}}\ .$$

$$xy^4\left(\frac{y^3}{x^4}\right)^{-\frac{3}{2}} = xy^4\frac{(y^3)^{-\frac{3}{2}}}{(x^4)^{-\frac{3}{2}}} = xy^4\frac{y^{-\frac{9}{2}}}{x^{-6}} = \frac{x}{x^{-6}}y^4y^{-\frac{9}{2}} = x^7y^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^7}{y^{\frac{1}{2}}}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 8.7.3}$ 正の実数 x, y に対して次の式を計算して簡単にせよ：$\dfrac{y^3}{x^2}(x^8y^6)^{-\frac{3}{4}}$ ，$xy^3\left(\dfrac{x^5}{y^6}\right)^{-\frac{2}{3}}$ ．結果は指数が正の数の x や y の冪の式かまたは x や y そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表せ.

$\boxed{問 8.7.3}$ 正の実数 x, y に対して次の式を計算して簡単にせよ: $\dfrac{y^3}{x^2}(x^8y^6)^{-\frac{3}{4}}$, $xy^3\left(\dfrac{x^5}{y^6}\right)^{-\frac{2}{3}}$. 結果は指数が正の数の x や y の冪の式かまたは x や y そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表せ.

$$\begin{aligned}\frac{y^3}{x^2}(x^8y^6)^{-\frac{3}{4}} &= \frac{y^3}{x^2}(x^8)^{-\frac{3}{4}}(y^6)^{-\frac{3}{4}} = \frac{y^3}{x^2}x^{-6}y^{-\frac{9}{2}} = \frac{x^{-6}}{x^2}y^3y^{-\frac{9}{2}} = x^{-8}y^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{x^8y^{\frac{3}{2}}} \ .\end{aligned}$$

$\boxed{問8.7.3}$ 正の実数 x, y に対して次の式を計算して簡単にせよ: $\dfrac{y^3}{x^2}(x^8y^6)^{-\frac{3}{4}}$, $xy^3\left(\dfrac{x^5}{y^6}\right)^{-\frac{2}{3}}$. 結果は指数が正の数の x や y の冪の式かまたは x や y そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表せ.

$$\frac{y^3}{x^2}(x^8y^6)^{-\frac{3}{4}} = \frac{y^3}{x^2}(x^8)^{-\frac{3}{4}}(y^6)^{-\frac{3}{4}} = \frac{y^3}{x^2}x^{-6}y^{-\frac{9}{2}} = \frac{x^{-6}}{x^2}y^3y^{-\frac{9}{2}} = x^{-8}y^{-\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{1}{x^8y^{\frac{3}{2}}} .$$

$$xy^3\left(\frac{x^5}{y^6}\right)^{-\frac{2}{3}} = xy^3\frac{(x^5)^{-\frac{2}{3}}}{(y^6)^{-\frac{2}{3}}} = xy^3\frac{x^{-\frac{10}{3}}}{y^{-4}} = xx^{-\frac{10}{3}}\frac{y^3}{y^{-4}} = x^{-\frac{7}{3}}y^7$$
$$= \frac{y^7}{x^{\frac{7}{3}}} .$$

$\boxed{終}$