8.8　指数の拡張

冪の指数の範囲を実数全体にまで更に広げる.

冪の指数の範囲を実数全体にまで更に広げる．例として 3 の $\sqrt{2}$ 乗 $3^{\sqrt{2}}$ を考える．

冪の指数の範囲を実数全体にまで更に広げる．例として 3 の $\sqrt{2}$ 乗 $3^{\sqrt{2}}$ を考える． $\sqrt{2} = 1.414213562\cdots$ なので，次のような値を計算できる：

$$3^{1.41} = 3^{\frac{141}{100}} = 4.70\cdots \ ,$$
$$3^{1.414} = 3^{\frac{1414}{1000}} = 4.727\cdots \ ,$$
$$3^{1.4142} = 3^{\frac{14142}{10000}} = 4.7287\cdots \ ,$$
$$3^{1.41421} = 3^{\frac{141421}{100000}} = 4.72878\cdots \ ,$$
$$3^{1.414213} = 3^{\frac{1414213}{1000000}} = 4.728801\cdots \ ,$$
$$3^{1.4142135} = 3^{\frac{14142135}{10000000}} = 4.7288041\cdots \ ,$$
$$3^{1.41421356} = 3^{\frac{141421356}{100000000}} = 4.72880437\cdots \ ,$$
$$3^{1.414213562} = 3^{\frac{1414213562}{1000000000}} = 4.728804385\cdots \ ,$$

冪の指数の範囲を実数全体にまで更に広げる．例として 3 の $\sqrt{2}$ 乗 $3^{\sqrt{2}}$ を考える． $\sqrt{2} = 1.414213562\cdots$ なので，次のような値を計算できる：

$$
\begin{gathered}
3^{1.41} = 3^{\frac{141}{100}} = 4.70\cdots\ ,\\
3^{1.414} = 3^{\frac{1414}{1000}} = 4.727\cdots\ ,\\
3^{1.4142} = 3^{\frac{14142}{10000}} = 4.7287\cdots\ ,\\
3^{1.41421} = 3^{\frac{141421}{100000}} = 4.72878\cdots\ ,\\
3^{1.414213} = 3^{\frac{1414213}{1000000}} = 4.728801\cdots\ ,\\
3^{1.4142135} = 3^{\frac{14142135}{10000000}} = 4.7288041\cdots\ ,\\
3^{1.41421356} = 3^{\frac{141421356}{100000000}} = 4.72880437\cdots\ ,\\
3^{1.414213562} = 3^{\frac{1414213562}{1000000000}} = 4.728804385\cdots\ ,
\end{gathered}
$$

このように，指数を $\sqrt{2} = 1.41421356237\cdots$ に近づけていくと 3 の冪は $4.7288043878374\cdots$ に近づいていく．このことより， $3^{\sqrt{2}} = 4.7288043878374\cdots$ と考える．

このようにして，任意の正の実数 a と任意の実数 p とに対して a の p 乗 a^p を定義することができる．そして，前述の指数法則も指数が実数である場合にそのまま拡張できる．

このようにして，任意の正の実数 a と任意の実数 p とに対して a の p 乗 a^p を定義することができる．そして，前述の指数法則も指数が実数である場合にそのまま拡張できる．

定理（実数指数の指数法則）　任意の正の実数 a, b 及び任意の実数 p, q について，

$$a^p a^q = a^{p+q} \ , \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \ , \qquad (a^p)^q = a^{pq} \ ;$$

$$(ab)^p = a^p b^p \ , \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \ .$$

このようにして，任意の正の実数 a と任意の実数 p とに対して a の p 乗 a^p を定義することができる．そして，前述の指数法則も指数が実数である場合にそのまま拡張できる．

定理（実数指数の指数法則）　任意の正の実数 a, b 及び任意の実数 p, q について，

$$a^p a^q = a^{p+q} \ , \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \ , \qquad (a^p)^q = a^{pq} \ ;$$

$$(ab)^p = a^p b^p \ , \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \ .$$

正の数の冪の値はいつも正である．

定理　任意の正の実数 a 及び任意の実数 p について $a^p > 0$ ．