8.9 冪関数

定数 p は実数とする．前節で述べたように，任意の正の実数 x に対して x の p 乗 x^p の値が唯一つ定まる．

定数 p は実数とする．前節で述べたように，任意の正の実数 x に対して x の p 乗 x^p の値が唯一つ定まる．従って，正の実数 x に x の冪 x^p を対応させると，この対応は関数になる．この関数 x^p を，指数が p である冪関数という．

定数 p は実数とする．前節で述べたように，任意の正の実数 x に対して x の p 乗 x^p の値が唯一つ定まる．従って，正の実数 x に x の冪 x^p を対応させると，この対応は関数になる．この関数 x^p を，指数が p である冪関数という.

例えば，変数 x について $x > 0$ のとき，

x の関数 x^{-5} は 指数が -5 である冪関数であり，
x の関数 $x^{\frac{16}{3}}$ は 指数が $\dfrac{16}{3}$ である冪関数であり，
x の関数 $x^{\sqrt{7}}$ は 指数が $\sqrt{7}$ である冪関数である.

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[0,\infty)$ である冪関数 f の指数が $\dfrac{2}{3}$ であるとする. 125 における f の値及び $\dfrac{7}{8}$ における f の値を求める.

例 定義域が区間 $[0,\infty)$ である冪関数 f の指数が $\dfrac{2}{3}$ であるとする．125 における f の値及び $\dfrac{7}{8}$ における f の値を求める．

　冪関数 f の指数が $\dfrac{2}{3}$ なので，$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が区間 $[0,\infty)$ である冪関数 f の指数が $\dfrac{2}{3}$ であるとする．125 における f の値及び $\dfrac{7}{8}$ における f の値を求める．

冪関数 f の指数が $\dfrac{2}{3}$ なので，$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ ．

$$f(125) = 125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^2 = 25 \ .$$

例 定義域が区間 $[0,\infty)$ である冪関数 f の指数が $\dfrac{2}{3}$ であるとする. 125 における f の値及び $\dfrac{7}{8}$ における f の値を求める.

冪関数 f の指数が $\dfrac{2}{3}$ なので, $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$.

$$f(125)=125^{\frac{2}{3}}=(5^3)^{\frac{2}{3}}=5^2=25 \ .$$

$$f\left(\frac{7}{8}\right)=\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{7^{\frac{2}{3}}}{(2^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{7^{\frac{2}{3}}}{2^2}=\frac{7^{\frac{2}{3}}}{4} \ .$$

終

$\boxed{問 8.9.1}$ 関数 f は $\dfrac{3}{4}$ を指数とする冪関数であり，その定義域は区間 $[0,\infty)$ であるとする．81 における f の値及び $\dfrac{11}{16}$ における f の値及び 49 における f の値を求めよ．

$\boxed{\text{問}8.9.1}$ 関数 f は $\dfrac{3}{4}$ を指数とする冪関数であり，その定義域は区間 $[0,\infty)$ であるとする．81 における f の値及び $\dfrac{11}{16}$ における f の値及び 49 における f の値を求めよ．

$$f(81) = 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27 \ .$$

$\boxed{問 8.9.1}$ 関数 f は $\dfrac{3}{4}$ を指数とする冪関数であり，その定義域は区間 $[0,\infty)$ であるとする．81 における f の値及び $\dfrac{11}{16}$ における f の値及び 49 における f の値を求めよ．

$$f(81) = 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27 \ .$$

$$f\left(\frac{11}{16}\right) = \left(\frac{11}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{11^{\frac{3}{4}}}{(2^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{11^{\frac{3}{4}}}{2^3} = \frac{11^{\frac{3}{4}}}{8} \ .$$

$\boxed{問 8.9.1}$ 関数 f は $\dfrac{3}{4}$ を指数とする冪関数であり，その定義域は区間 $[0,\infty)$ であるとする．81 における f の値及び $\dfrac{11}{16}$ における f の値及び 49 における f の値を求めよ．

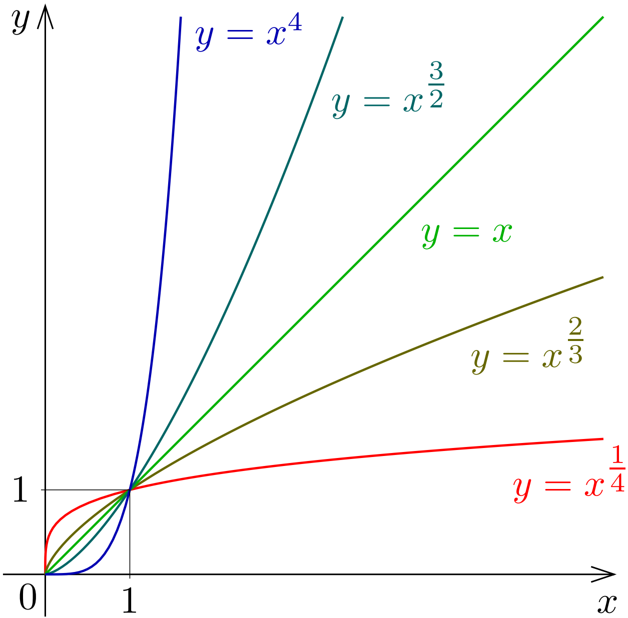
$$f(81) = 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27 \ .$$

$$f\left(\frac{11}{16}\right) = \left(\frac{11}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{11^{\frac{3}{4}}}{(2^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{11^{\frac{3}{4}}}{2^3} = \frac{11^{\frac{3}{4}}}{8} \ .$$

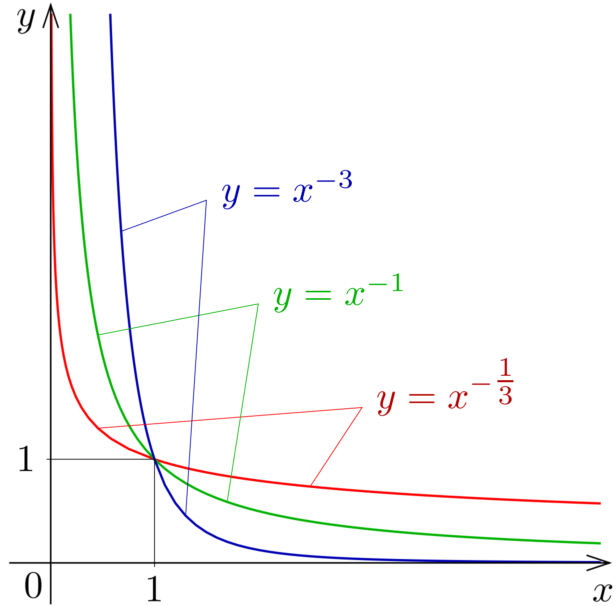
$$f(49) = 49^{\frac{3}{4}} = (7^2)^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{3}{2}} = 7\sqrt{7} \ .$$

$\boxed{終}$

定数 p は実数で $p \neq 0$ とする． $p>0$ のときの冪関数 x^p （ $x \geq 0$ ）のグラフと $p<0$ のときの冪関数 x^p （ $x>0$ ）のグラフとは次のようになる．



$p>0$ のときの $y=x^p$ のグラフ



$p<0$ のときの $y=x^p$ のグラフ

グラフから分かるように次の定理が成り立つ.

定理　定数 p は実数で $p \neq 0$ とする.

$p > 0$ のとき, 定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 x^p は単調増加である.

$p < 0$ のとき, 定義域が区間 $(0, \infty)$ である冪関数 x^p は単調減少である.

0 以上の実数 x について, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. 従って, 定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ などは単調増加である.

7.6 節において次の定理を述べた：関数 g の定義域が関数 f の値域であり，f の定義域の各要素 x について $g\bigl(f(x)\bigr) = x$ ならば，g は f の逆関数である．

7.6 節において次の定理を述べた：関数 g の定義域が関数 f の値域であり，f の定義域の各要素 x について $g\bigl(f(x)\bigr)=x$ ならば，g は f の逆関数である．

定数 p について $p>0$ とする．定義域が区間 $[0,\infty)$ である冪関数 f と g とを次のように定める：

$$f(x)=x^p \quad (\ x\geq 0\ )\ , \qquad\qquad g(x)=x^{\frac{1}{p}} \quad (\ x\geq 0\ )$$

7.6 節において次の定理を述べた：関数 g の定義域が関数 f の値域であり，f の定義域の各要素 x について $g\big(f(x)\big)=x$ ならば，g は f の逆関数である．

定数 p について $p>0$ とする．定義域が区間 $[0,\infty)$ である冪関数 f と g とを次のように定める：

$$f(x) = x^p \quad (\ x \geq 0\ )\ , \qquad\qquad g(x) = x^{\frac{1}{p}} \quad (\ x \geq 0\ )$$

f の値域は区間 $[0,\infty)$ であり，g の定義域と一致する．また，区間 $[0,\infty)$ の任意の実数 x について，指数法則より，

$$g\big(f(x)\big) = g(x^p) = (x^p)^{\frac{1}{p}} = x^{p\frac{1}{p}} = x^1 = x\ .$$

従って，関数 g は関数 f の逆関数である．

7.6 節において次の定理を述べた：関数 g の定義域が関数 f の値域であり，f の定義域の各要素 x について $g\bigl(f(x)\bigr) = x$ ならば，g は f の逆関数である．

7.6 節において次の定理を述べた：関数 g の定義域が関数 f の値域であり，f の定義域の各要素 x について $g\big(f(x)\big) = x$ ならば，g は f の逆関数である．

定数 p について $p < 0$ とする．定義域が区間 $(0, \infty)$ である冪関数 f と g とを次のように定める：

$$f(x) = x^p \quad (\ x > 0\ )\ , \qquad\qquad g(x) = x^{\frac{1}{p}} \quad (\ x > 0\ )$$

7.6 節において次の定理を述べた：関数 g の定義域が関数 f の値域であり，f の定義域の各要素 x について $g\bigl(f(x)\bigr) = x$ ならば，g は f の逆関数である．

定数 p について $p < 0$ とする．定義域が区間 $(0, \infty)$ である冪関数 f と g とを次のように定める：

$$f(x) = x^p \quad (\ x > 0\ )\ , \qquad\qquad g(x) = x^{\frac{1}{p}} \quad (\ x > 0\ )$$

f の値域は区間 $(0, \infty)$ であり，g の定義域と一致する．また，区間 $(0, \infty)$ の任意の実数 x について，指数法則より，

$$g\bigl(f(x)\bigr) = g(x^p) = (x^p)^{\frac{1}{p}} = x^{p\frac{1}{p}} = x^1 = x\ .$$

従って，関数 g は関数 f の逆関数である．

定理　定数 p は実数で $p \neq 0$ とする.

(1) $p > 0$ のとき，定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 x^p の逆関数は，定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である.

(2) $p < 0$ のとき，定義域が区間 $(0, \infty)$ である冪関数 x^p の逆関数は，定義域が区間 $(0, \infty)$ である冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である.

定理　定数 p は実数で $p \neq 0$ とする．

(1) $p > 0$ のとき，定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 x^p の逆関数は，定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である．

(2) $p < 0$ のとき，定義域が区間 $(0, \infty)$ である冪関数 x^p の逆関数は，定義域が区間 $(0, \infty)$ である冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である．

このように，冪関数の逆関数はやはり冪関数である．

$\boxed{例}$ 変数 x について $x \geq -\dfrac{9}{5}$ とする. x に関する方程式 $(5x+9)^{\frac{3}{4}} = 7$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \geq -\dfrac{9}{5}$ とする．x に関する方程式 $(5x+9)^{\frac{3}{4}} = 7$ を解く．

$x \geq -\dfrac{9}{5}$ つまり $5x+9 \geq 0$ である各実数 x について

$$\left\{(5x+9)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{4}{3}} = (5x+9)^1 = 5x+9 \ .$$

例 変数 x について $x \geq -\dfrac{9}{5}$ とする. x に関する方程式 $(5x+9)^{\frac{3}{4}} = 7$ を解く.

$x \geq -\dfrac{9}{5}$ つまり $5x+9 \geq 0$ である各実数 x について

$$\left\{(5x+9)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{4}{3}} = (5x+9)^1 = 5x+9 \ .$$

方程式 $(5x+9)^{\frac{3}{4}} = 7$ の両辺を $\dfrac{4}{3}$ 乗する:

$$\left\{(5x+9)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{4}{3}} = 7^{\frac{4}{3}} \ ,$$

$$5x+9 = 7^{\frac{4}{3}} \ ,$$

故に $x = \dfrac{7^{\frac{4}{3}}-9}{5}$.

終

$\boxed{\text{問}8.9.2}$ 変数 x について $x \geq \dfrac{3}{4}$ とする. x に関する方程式 $(4x-3)^{\frac{7}{5}} = 9$ を解け.

$\boxed{問 8.9.2}$ 変数 x について $x \geq \dfrac{3}{4}$ とする. x に関する方程式 $(4x-3)^{\frac{7}{5}} = 9$ を解け.

$4x-3 \geq 0$ なので, 方程式 $(4x-3)^{\frac{7}{5}} = 9$ より, $\left\{(4x-3)^{\frac{7}{5}}\right\}^{\frac{5}{7}} = 9^{\frac{5}{7}}$, $4x-3 = 9^{\frac{5}{7}}$, 故に $x = \dfrac{9^{\frac{5}{7}}+3}{4}$. $\boxed{終}$