9.1 指数関数

定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする．任意の実数 x に対して a の冪 a^x の値が唯一つ定まる．従って，実数 x に対して x を指数とする冪 a^x を定めると，この対応は関数になる．

定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．任意の実数 x に対して a の冪 a^x の値が唯一つ定まる．従って，実数 x に対して x を指数とする冪 a^x を定めると，この対応は関数になる．

定義 1 でない正の定数 a に対して，各実数 x に対して x を指数とする a の冪 a^x を定める対応を，底が a である指数関数という．

定数 a は実数で $a>0$ かつ $a \neq 1$ とする．任意の実数 x に対して a の冪 a^x の値が唯一つ定まる．従って，実数 x に対して x を指数とする冪 a^x を定めると，この対応は関数になる．

定義 1 でない正の定数 a に対して，各実数 x に対して x を指数とする a の冪 a^x を定める対応を，底が a である指数関数という．

任意の実数 x に対して指数関数の値 a^x があるので，指数関数 a^x は実数全体を定義域にすることができる．以後，特に断りがない限り，指数関数の定義域は実数全体であるとする．

定数 a は実数で $a>0$ かつ $a \neq 1$ とする．任意の実数 x に対して a の冪 a^x の値が唯一つ定まる．従って，実数 x に対して x を指数とする冪 a^x を定めると，この対応は関数になる．

定義 1 でない正の定数 a に対して，各実数 x に対して x を指数とする a の冪 a^x を定める対応を，底が a である指数関数という．

任意の実数 x に対して指数関数の値 a^x があるので，指数関数 a^x は実数全体を定義域にすることができる．以後，特に断りがない限り，指数関数の定義域は実数全体であるとする．

$a=1$ のときは，任意の実数 x に対して $a^x=1^x=1$ なので，変数 x の関数 a^x は定数関数である．従って，$a=1$ のときは関数 a^x を指数関数とは考えない．

例えば，実数を表す変数 x について，

x の関数 3^x は 底が 3 の指数関数であり，

x の関数 $\left(\frac{2}{7}\right)^x$ は 底が $\frac{2}{7}$ の指数関数であり，

x の関数 $\sqrt{14}^{\,x}$ は 底が $\sqrt{14}$ の指数関数である．

例えば，実数を表す変数 x について，

$$x \text{ の関数 } 3^x \text{ は 底が } 3 \text{ の指数関数であり，}$$

$$x \text{ の関数 } \left(\frac{2}{7}\right)^x \text{ は 底が } \frac{2}{7} \text{ の指数関数であり，}$$

$$x \text{ の関数 } \sqrt{14}^{\,x} \text{ は 底が } \sqrt{14} \text{ の指数関数である．}$$

冪関数と指数関数との違いに注意すること．冪関数では底が変数で指数が定数であり，指数関数では指数が変数で底が定数である．定数 p と a （ $a > 0$ ， $a \neq 1$ ）とに対して次のようになる：

指数は定数

指数が p の冪関数 $\boxed{x}^{\boxed{p}}$

底は変数

指数は変数

底が a の指数関数 $\boxed{a}^{\boxed{x}}$

底は定数

$\boxed{\text{例}}$ 指数関数 f の底は 9 であるとする. 3 における f の値と -2 における f の値と $\dfrac{3}{2}$ における f の値とを求める.

$\boxed{\text{例}}$ 指数関数 f の底は 9 であるとする. 3 における f の値と -2 における f の値と $\dfrac{3}{2}$ における f の値とを求める.

指数関数 f の底は 9 なので $f(x) = 9^x$.

$\boxed{例}$ 指数関数 f の底は 9 であるとする. 3 における f の値と -2 における f の値と $\dfrac{3}{2}$ における f の値とを求める.

指数関数 f の底は 9 なので $f(x)=9^x$. 3 における f の値は

$$f(3) = 9^3 = 729 \ .$$

$\boxed{例}$ 指数関数 f の底は 9 であるとする. 3 における f の値と -2 における f の値と $\dfrac{3}{2}$ における f の値とを求める.

指数関数 f の底は 9 なので $f(x) = 9^x$. 3 における f の値は

$$f(3) = 9^3 = 729 .$$

-2 における f の値は

$$f(-2) = 9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81} .$$

$\boxed{\text{例}}$ 指数関数 f の底は 9 であるとする. 3 における f の値と -2 における f の値と $\dfrac{3}{2}$ における f の値とを求める.

指数関数 f の底は 9 なので $f(x) = 9^x$. 3 における f の値は

$$f(3) = 9^3 = 729 \ .$$

-2 における f の値は

$$f(-2) = 9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81} \ .$$

$\dfrac{3}{2}$ における f の値は

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 9.1}$ 関数 f は 4 を底とする指数関数であるとする．3 における f の値と -2 における f の値と $\dfrac{5}{2}$ における f の値とを求めよ．

関数 f は 4 を底とする指数関数なので $f(x) =$ ． 3 における f の値は

-2 における f の値は

$\dfrac{5}{2}$ における f の値は

$\boxed{問9.1}$ 関数 f は 4 を底とする指数関数であるとする． 3 における f の値と -2 における f の値と $\dfrac{5}{2}$ における f の値とを求めよ．

関数 f は 4 を底とする指数関数なので $f(x) = 4^x$ ． 3 における f の値は

-2 における f の値は

$\dfrac{5}{2}$ における f の値は

$\boxed{\text{問}9.1}$ 関数 f は 4 を底とする指数関数であるとする. 3 における f の値と -2 における f の値と $\frac{5}{2}$ における f の値とを求めよ.

関数 f は 4 を底とする指数関数なので $f(x) = 4^x$. 3 における f の値は

$$f(3) = 4^3 = 64 \ .$$

-2 における f の値は

$\frac{5}{2}$ における f の値は

$\boxed{問9.1}$ 関数 f は 4 を底とする指数関数であるとする．3 における f の値と -2 における f の値と $\dfrac{5}{2}$ における f の値とを求めよ．

関数 f は 4 を底とする指数関数なので $f(x) = 4^x$ ．3 における f の値は

$$f(3) = 4^3 = 64 \ .$$

-2 における f の値は

$$f(-2) = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \ .$$

$\dfrac{5}{2}$ における f の値は

$\boxed{\text{問}9.1}$ 関数 f は 4 を底とする指数関数であるとする．3 における f の値と -2 における f の値と $\dfrac{5}{2}$ における f の値とを求めよ．

関数 f は 4 を底とする指数関数なので $f(x) = 4^x$ ． 3 における f の値は

$$f(3) = 4^3 = 64 \ .$$

-2 における f の値は

$$f(-2) = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \ .$$

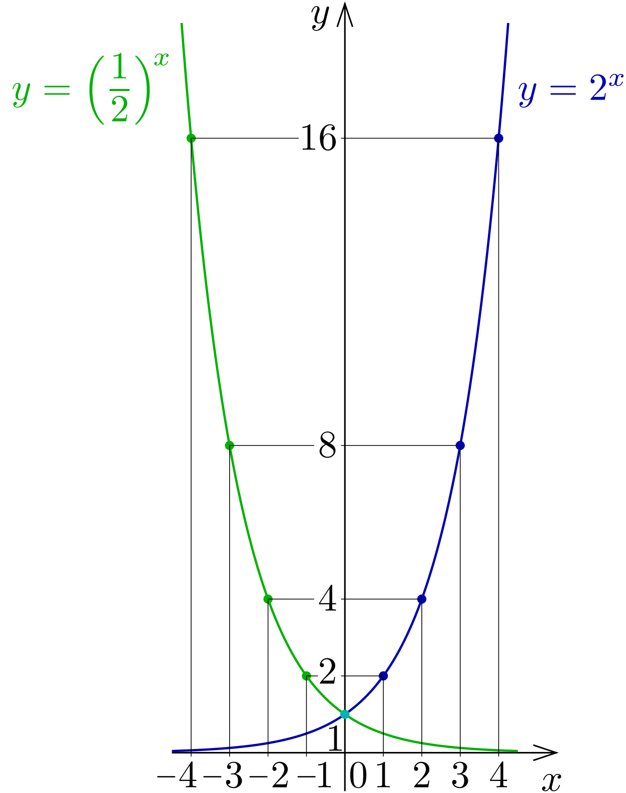
$\dfrac{5}{2}$ における f の値は

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 4^{\frac{5}{2}} = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5 = 32 \ .$$

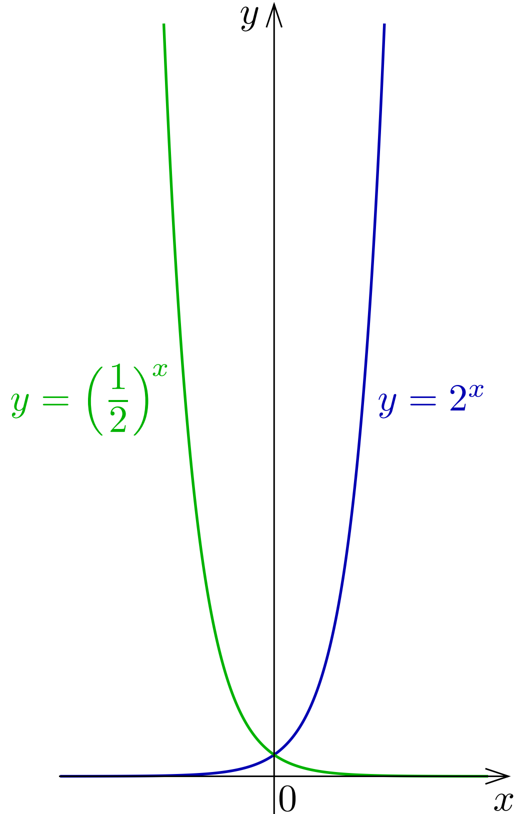
$\boxed{\text{終}}$

例として，指数関数 2^x と $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ とを考える． $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$ ． xy 座標平面において， $y = 2^x$ のグラフと $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフとを描く．

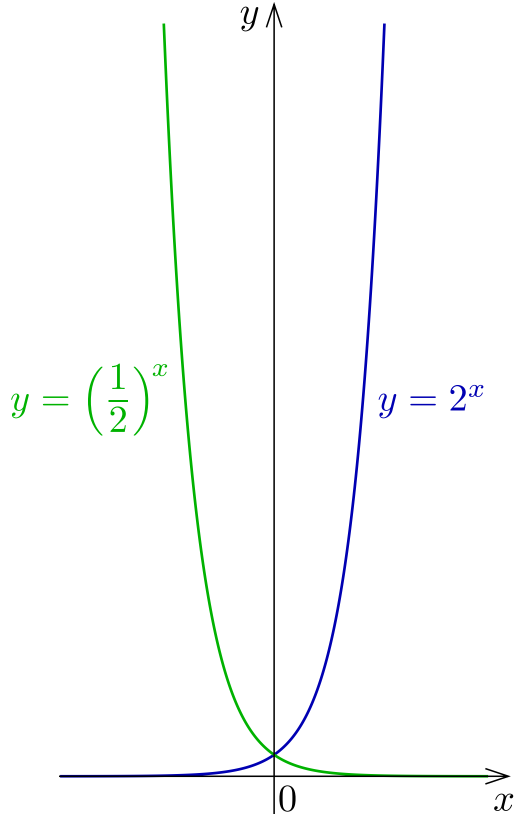
x の値	2^x の値	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の値
-4	$\frac{1}{16} = 0.0625$	16
-3	$\frac{1}{8} = 0.125$	8
-2	$\frac{1}{4} = 0.25$	4
-1	$\frac{1}{2} = 0.5$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2} = 0.5$
2	4	$\frac{1}{4} = 0.25$
3	8	$\frac{1}{8} = 0.125$
4	16	$\frac{1}{16} = 0.0625$



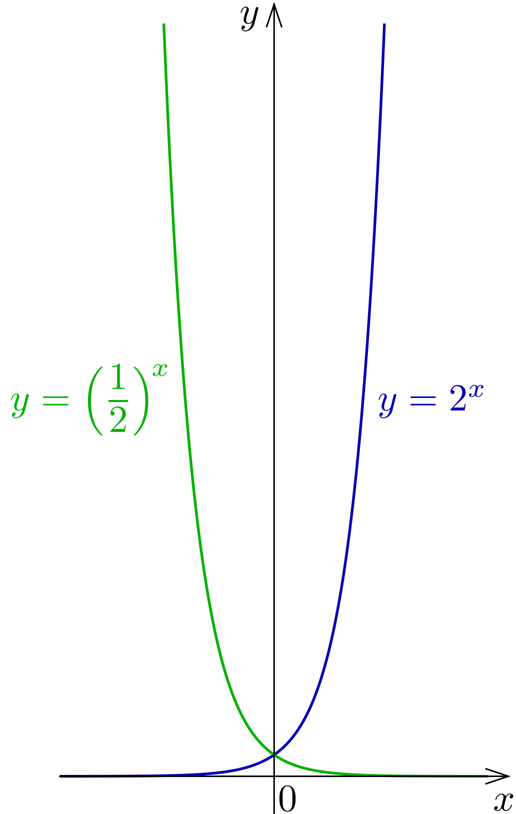
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y=2^x$ のグラフと y 軸に関して対称である.



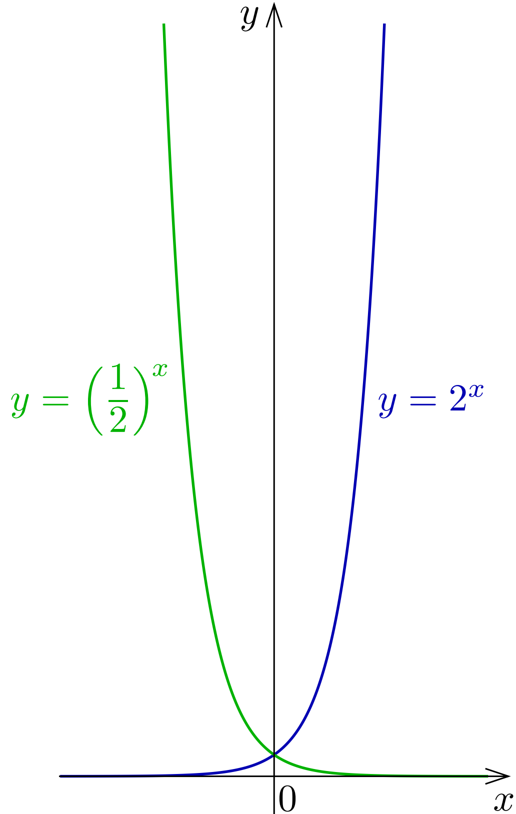
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y = 2^x$ のグラフと y 軸に関して対称である．例えば関数 $y = 2^x$ について，$x = -3, -4, -5, -6, \ldots$ としていくと，$y = 2^x = 0.125, 0.0625, 0.03125, 0.015625, 0.0078125, \ldots$ のように y の値は 0 に近づいていく．



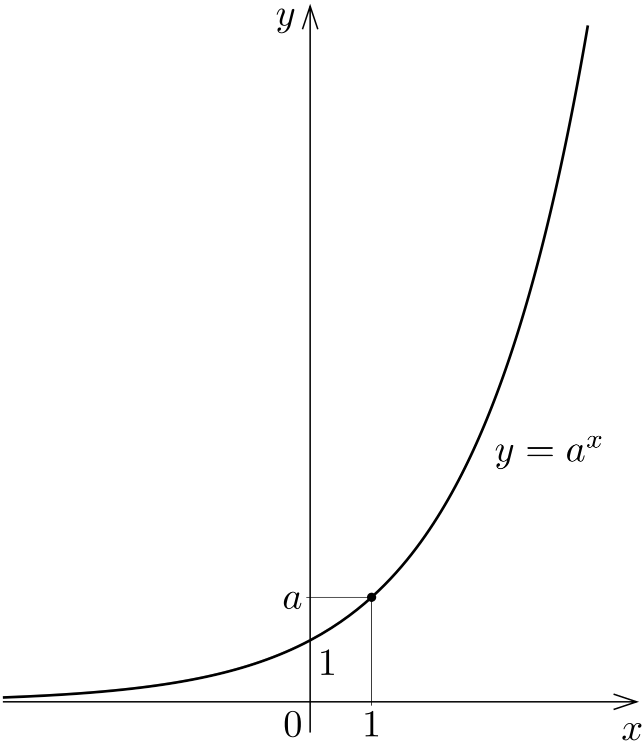
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y=2^x$ のグラフと y 軸に関して対称である．例えば関数 $y=2^x$ について，$x=-3,-4,-5,-6,\ldots$ としていくと，$y=2^x=0.125, 0.0625, 0.03125, 0.015625, 0.0078125, \ldots$ のように y の値は 0 に近づいていく．しかし，変数 x の値が何であっても $2^x>0$ なので，$y=2^x$ のグラフは x 軸と交わることはない．なので x 軸は $y=2^x$ のグラフの漸近線である．



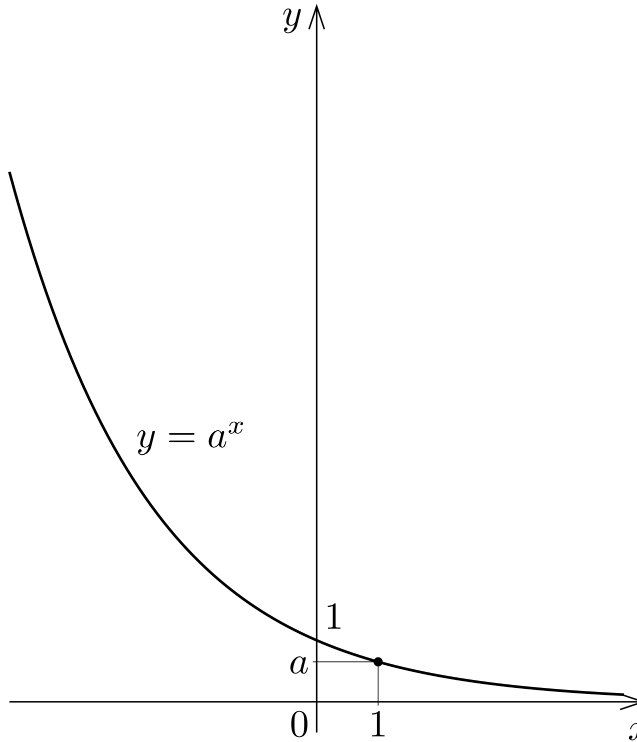
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y = 2^x$ のグラフと y 軸に関して対称である．例えば関数 $y = 2^x$ について，$x = -3, -4, -5, -6, \ldots$ としていくと，$y = 2^x = 0.125, 0.0625, 0.03125, 0.015625, 0.0078125, \ldots$ のように y の値は 0 に近づいていく．しかし，変数 x の値が何であっても $2^x > 0$ なので，$y = 2^x$ のグラフは x 軸と交わることはない．なので x 軸は $y = 2^x$ のグラフの漸近線である．また x 軸は $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフの漸近線でもある．



定数 a は実数で $a>0$ ，$a\neq1$ とする. $a>1$ のときと $0<a<1$ のときに分けて，xy 座標平面において指数関数 $y=a^x$ のグラフを描く.
$a^0=1$ ，$a^1=a$ なので，$y=a^x$ のグラフは点 $(0,1)$ と点 $(1,a)$ とが属す.
また，x 軸は $y=a^x$ のグラフの漸近線である.



$a > 1$ のときの $y = a^x$ のグラフ



$0 < a < 1$ のときの $y = a^x$ のグラフ

グラフから分かるように次の定理が成り立つ.

定理　定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする. 定義域が実数全体である指数関数 a^x の値域は区間 $(0,\infty)$ である. また, 指数関数 a^x は, $a>1$ のとき単調増加であり, $0<a<1$ のとき単調減少である.