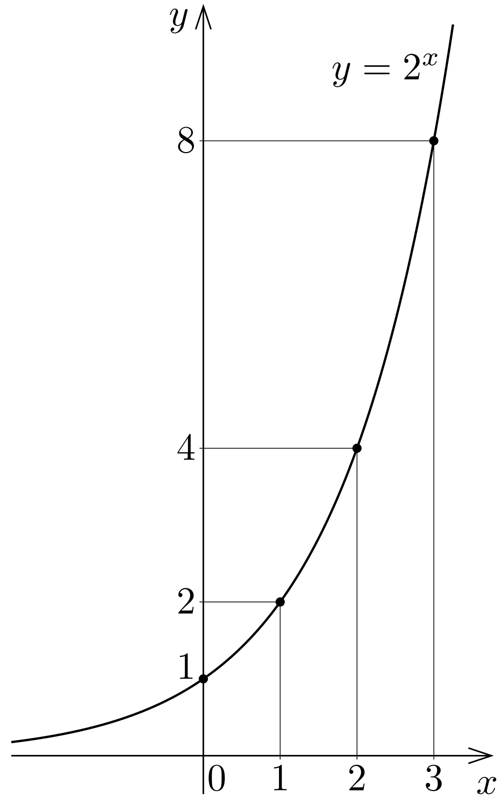
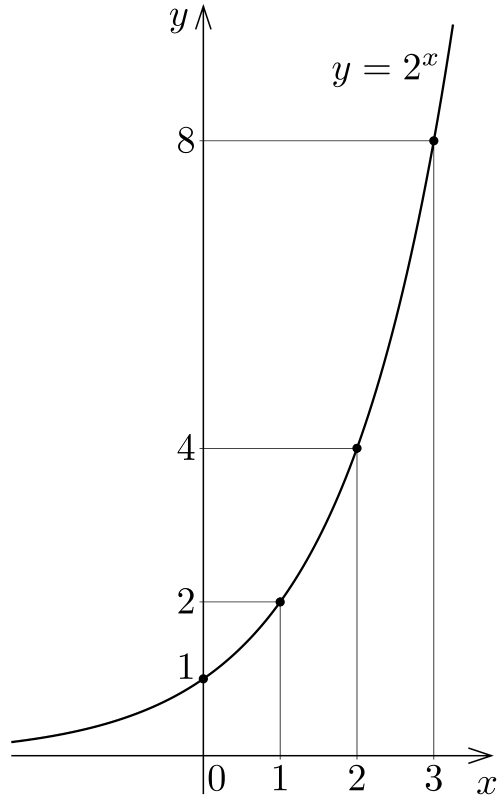
9.2 対数関数

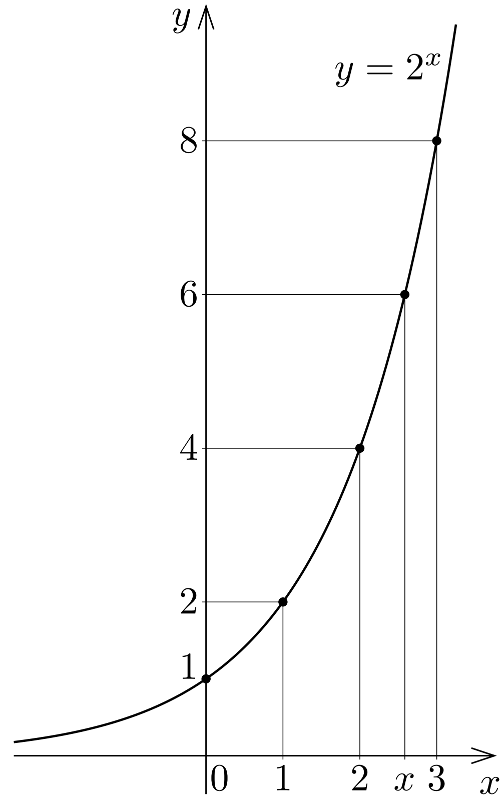
例として底が 2 である指数関数 2^x を考える． $2^2 = 4$ であり， $2^3 = 8$ である．



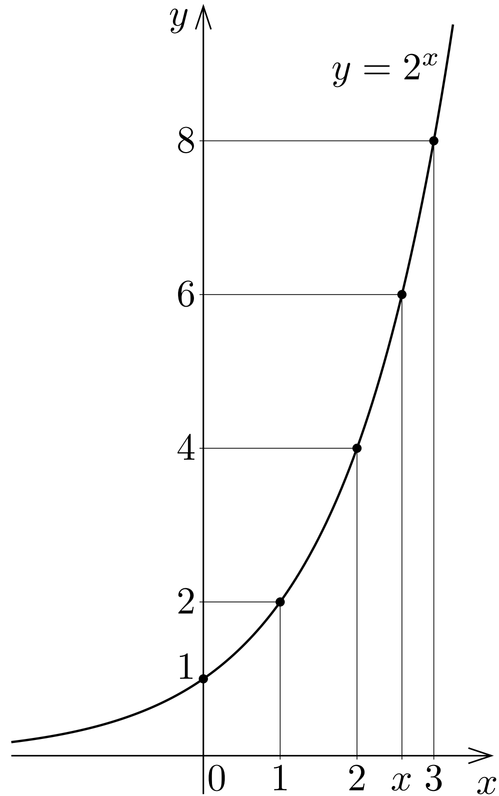
例として底が 2 である指数関数 2^x を考える．$2^2 = 4$ であり，$2^3 = 8$ である．では $2^x = 6$ である x の値はどうか．



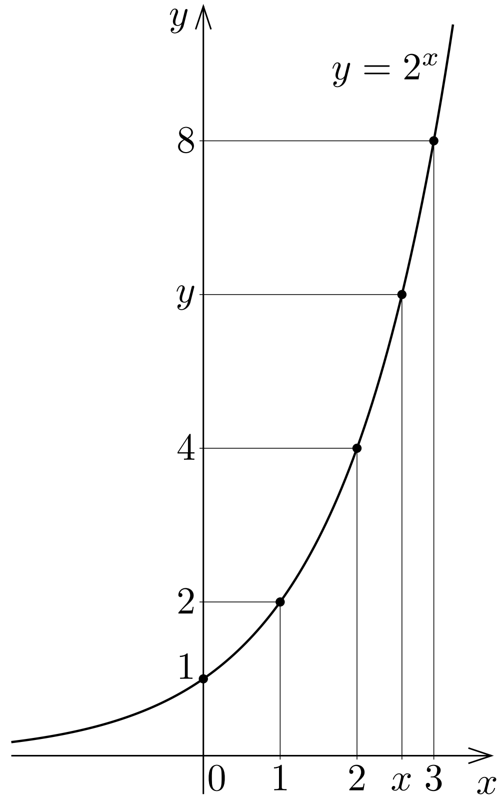
例として底が 2 である指数関数 2^x を考える．$2^2=4$ であり，$2^3=8$ である．では $2^x=6$ である x の値はどうか．xy 座標平面において関数 $y=2^x$ のグラフを描くと，$2^x=6$ である実数 x が唯一つあると考えられる．



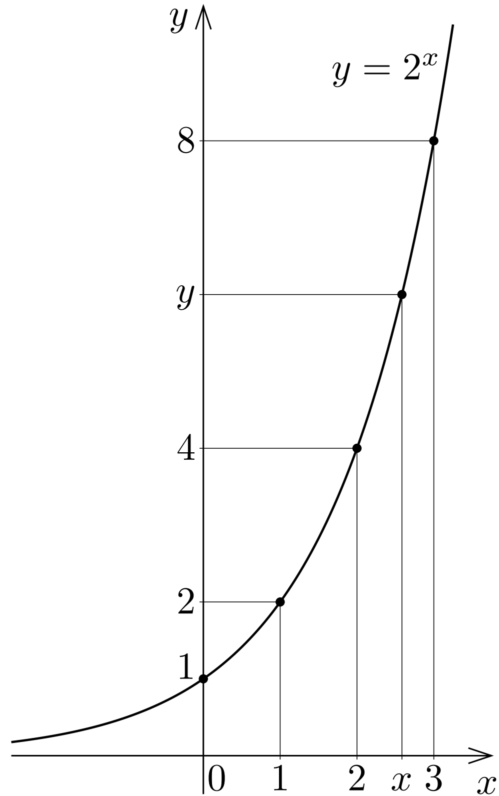
　例として底が 2 である指数関数 2^x を考える．$2^2=4$ であり，$2^3=8$ である．では $2^x=6$ である x の値はどうか．xy 座標平面において関数 $y=2^x$ のグラフを描くと，$2^x=6$ である実数 x が唯一つあると考えられる．そこで，例えば 6 に対して $2^x=6$ である実数 x を考えることにする．



　例として底が 2 である指数関数 2^x を考える．$2^2=4$ であり，$2^3=8$ である．では $2^x=6$ である x の値はどうか．xy 座標平面において関数 $y=2^x$ のグラフを描くと，$2^x=6$ である実数 x が唯一つあると考えられる．そこで，例えば 6 に対して $2^x=6$ である実数 x を考えることにする．一般的に，正の実数 y に対して $2^x=y$ である実数 x を考えることにする．



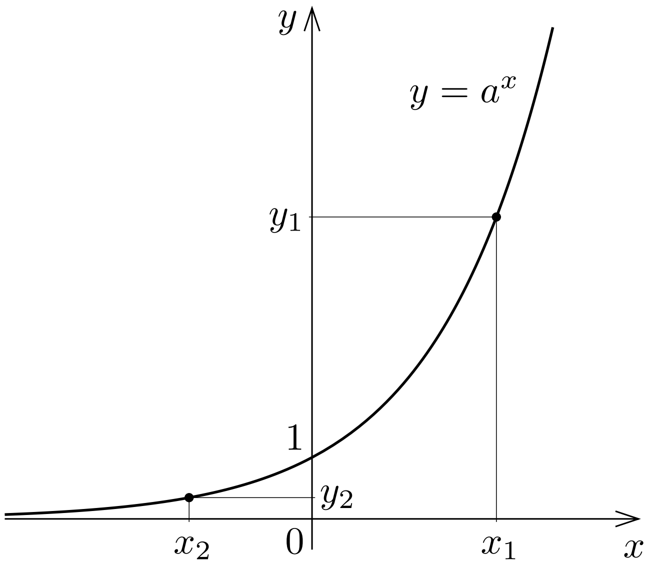
例として底が 2 である指数関数 2^x を考える．$2^2=4$ であり，$2^3=8$ である．では $2^x=6$ である x の値はどうか．xy 座標平面において関数 $y=2^x$ のグラフを描くと，$2^x=6$ である実数 x が唯一つあると考えられる．そこで，例えば 6 に対して $2^x=6$ である実数 x を考えることにする．一般的に，正の実数 y に対して $2^x=y$ である実数 x を考えることにする．これは指数関数 2^x の逆関数を考えることである．



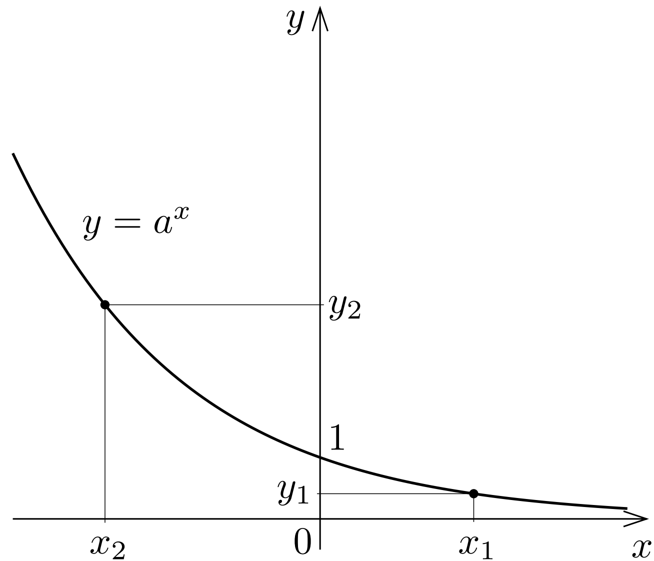
関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ である f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，f の逆関数 f^{-1} がある.

指数関数の逆関数を考える.

定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．定義域が実数全体である指数関数 a^x の値域は正の実数の全体 $(0,\infty)$ である．グラフから分かるように，正の各実数 y に対して $y=a^x$ である実数 x が唯一つある．



$a>1$ のとき



$0<a<1$ のとき

正の各実数 y に対して $y = a^x$ である実数 x が唯一つある．よって指数関数 a^x の逆関数がある．実数全体を定義域とする指数関数 a^x について，値域は正の実数の全体なので，その逆関数の定義域は正の実数の全体である．

正の各実数 y に対して $y=a^x$ である実数 x が唯一つある．よって指数関数 a^x の逆関数がある．実数全体を定義域とする指数関数 a^x について，値域は正の実数の全体なので，その逆関数の定義域は正の実数の全体である．

定義　1 でない正の定数 a を底とする実数全体を定義域とする指数関数 a^x の逆関数を，a を底とする対数関数という．a を底とする対数関数の実数 x における値を $\log_a x$ と書き表す．対数関数の定義域は正の実数の集合である．

正の各実数 y に対して $y = a^x$ である実数 x が唯一つある．よって指数関数 a^x の逆関数がある．実数全体を定義域とする指数関数 a^x について，値域は正の実数の全体なので，その逆関数の定義域は正の実数の全体である．

定義　1 でない正の定数 a を底とする実数全体を定義域とする指数関数 a^x の逆関数を，a を底とする対数関数という．a を底とする対数関数の実数 x における値を $\log_a x$ と書き表す．対数関数の定義域は正の実数の集合である．

　対数関数の定義域は本来は正の実数の全体であるが，正の実数の集合（つまり正の実数の全体の部分集合）でもかまわない．特に断りがないときは対数関数の定義域は正の実数の全体であるとする．

1 でない正の実数 a を底とする対数関数の正の実数 r における値 $\log_a r$ を，a を底とする r の対数という．

1 でない正の実数 a を底とする対数関数の正の実数 r における値 $\log_a r$ を，a を底とする r の対数という．

r の対数を表す式 $\log_a r$ において，r を真数という．対数関数 $\log_a x$ の定義域は正の実数の集合なので，

対数を表す式 $\log_a r$ の真数 r は正の実数である

ことに注意すること．

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } p \text{ について } \quad f^{-1}\bigl(f(p)\bigr) = p \ .$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } p \text{ について } f^{-1}\big(f(p)\big) = p \ .$$

定数 a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする．a を底とする指数関数を f とおく： $f(x) = a^x$ ． f の定義域は実数全体とする．

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } p \text{ について } f^{-1}\bigl(f(p)\bigr) = p \ .$$

定数 a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする．a を底とする指数関数を f とおく： $f(x) = a^x$ ． f の定義域は実数全体とする．a を底とする指数関数 f の逆関数 f^{-1} は a を底とする対数関数である： $f^{-1}(x) = \log_a x$ ． よって，

$$f^{-1}\bigl(f(p)\bigr) = \log_a\{f(p)\} = \log_a(a^p) \ ,$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } p \text{ について } \quad f^{-1}\bigl(f(p)\bigr) = p \ .$$

定数 a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする． a を底とする指数関数を f とおく： $f(x) = a^x$ ． f の定義域は実数全体とする． a を底とする指数関数 f の逆関数 f^{-1} は a を底とする対数関数である： $f^{-1}(x) = \log_a x$ ． よって，

$$f^{-1}\bigl(f(p)\bigr) = \log_a\{f(p)\} = \log_a(a^p) \ ,$$

f の定義域は実数全体なので，

$$\text{任意の実数 } p \text{ について } \quad \log_a(a^p) = p \ .$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } r \text{ について } f\left(f^{-1}(r)\right) = r \ .$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } r \text{ について } f\bigl(f^{-1}(r)\bigr) = r\ .$$

定数 a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする．a を底とする指数関数を f とおく： $f(x) = a^x$ ．f の定義域は実数全体とする．f の値域は正の実数の全体である．

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } r \text{ について } f\big(f^{-1}(r)\big) = r \ .$$

定数 a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする．a を底とする指数関数を f とおく： $f(x) = a^x$ ． f の定義域は実数全体とする． f の値域は正の実数の全体である． a を底とする指数関数 f の逆関数 f^{-1} は a を底とする対数関数である： $f^{-1}(x) = \log_a x$ ．よって，

$$f\big(f^{-1}(r)\big) = a^{f^{-1}(r)} = a^{\log_a r} \ ,$$

7.6 節で次のことを述べた：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } r \text{ について } f\bigl(f^{-1}(r)\bigr) = r \ .$$

定数 a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする．a を底とする指数関数を f とおく： $f(x) = a^x$ ． f の定義域は実数全体とする． f の値域は正の実数の全体である． a を底とする指数関数 f の逆関数 f^{-1} は a を底とする対数関数である： $f^{-1}(x) = \log_a x$ ．よって，

$$f\bigl(f^{-1}(r)\bigr) = a^{f^{-1}(r)} = a^{\log_a r} \ ,$$

f の値域は正の実数の全体なので，

$$\text{任意の正の実数 } r \text{ について } a^{\log_a r} = r \ .$$

定理　実数 a について $a>0$ ，$a\neq 1$ とする.

任意の実数 p について $\log_a(a^p)=p$.

$r>0$ である任意の実数 r について $a^{\log_a r}=r$.

定理　実数 a について $a>0$ ，$a \neq 1$ とする.

任意の実数 p について $\log_a(a^p)=p$.

$r>0$ である任意の実数 r について $a^{\log_a r}=r$.

例

$$\log_2 8=\log_2 2^3=3 \ .$$

$$\log_5 25=\log_5 5^2=2 \ .$$

$$3^{\log_3 7}=7 \ .$$

終

a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする． $1 = a^0$ なので，

$$\log_a 1 = \log_a (a^0) = 0 \ .$$

a は実数で $a > 0$, $a \neq 1$ とする. $1 = a^0$ なので,

$$\log_a 1 = \log_a(a^0) = 0 \ .$$

$a = a^1$ なので,

$$\log_a a = \log_a(a^1) = 1 \ .$$

a は実数で $a>0$, $a \neq 1$ とする. $1=a^0$ なので,

$$\log_a 1 = \log_a(a^0) = 0 \ .$$

$a=a^1$ なので,

$$\log_a a = \log_a(a^1) = 1 \ .$$

対数の式 $\log_a(RS)$ を $\log_a RS$ と, $\log_a(R^p)$ を $\log_a R^p$ と略すことがよくある. 次のことに注意すること :

$\log_a RS = \log_a(RS)$ と $(\log_a R)S$ とは全く別の意味であり,

$\log_a R^p = \log_a(R^p)$ と $(\log_a R)^p$ とは全く別の意味である.

a は実数で $a > 0$, $a \neq 1$ とする． $1 = a^0$ なので，

$$\log_a 1 = \log_a (a^0) = 0 \ .$$

$a = a^1$ なので，

$$\log_a a = \log_a (a^1) = 1 \ .$$

対数の式 $\log_a (RS)$ を $\log_a RS$ と， $\log_a (R^p)$ を $\log_a R^p$ と略すことがよくある．次のことに注意すること：

$\log_a RS = \log_a (RS)$ と $(\log_a R) S$ とは全く別の意味であり，

$\log_a R^p = \log_a (R^p)$ と $(\log_a R)^p$ とは全く別の意味である．

また例えば， $\log_a R + S$ は $(\log_a R) + S$ のことである； $\log_a (R + S)$ との違いに注意すること．

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**： $\log_3 9 + 18$ ， $\log_2(16 + 48)$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する： $\log_3 9+18$，$\log_2(16+48)$．

公式 $\log_a a^p = p$ （ $a>0$ ， $a \neq 1$ ） を用いる.

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**： $\log_3 9 + 18$ **,** $\log_2(16+48)$.

公式 $\log_a a^p = p$ （ $a > 0$, $a \neq 1$ ） **を用いる.**

$$\log_3 9 + 18 = \log_3 3^2 + 18 = 2 + 18 = 20 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する： $\log_3 9+18$，$\log_2(16+48)$.

公式 $\log_a a^p = p$ （ $a>0$ ， $a \neq 1$ ） を用いる.

$$\log_3 9+18 = \log_3 3^2+18 = 2+18 = 20 \ .$$

$$\log_2(16+48) = \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 9.2.1}$ 以下の式を計算して簡単にせよ：$\log_3(27+54)$，$\log_2 8+24$ ．

$\boxed{\text{問}9.2.1}$ **以下の式を計算して簡単にせよ**：$\log_3(27+54)$，$\log_2 8+24$ ．

$$\log_3(27+54) = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \ .$$

$\boxed{問 9.2.1}$ **以下の式を計算して簡単にせよ：** $\log_3(27+54)$，$\log_2 8+24$.

$$\log_3(27+54) = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \ .$$

$$\log_2 8+24 = \log_2 2^3+24 = 3+24 = 27 \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする： $\log_5 \dfrac{1}{25}$, $\log_2\left(8\sqrt{2}\right)$.

$\boxed{例}$ 次の式を計算して簡単にする： $\log_5 \dfrac{1}{25}$，$\log_2\left(8\sqrt{2}\right)$．

公式 $\log_a a^p = p$ （ $a > 0$ ，$a \neq 1$ ） 及び指数法則を用いる.

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする： $\log_5 \dfrac{1}{25}$ ， $\log_2\left(8\sqrt{2}\right)$.

公式 $\log_a a^p = p$ （ $a > 0$ ， $a \neq 1$ ） 及び指数法則を用いる.

$$\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 \frac{1}{5^2} = \log_5 5^{-2} = -2 \ .$$

例 次の式を計算して簡単にする： $\log_5 \dfrac{1}{25}$，$\log_2\left(8\sqrt{2}\right)$.

公式 $\log_a a^p = p$ （ $a>0$ ，$a \neq 1$ ） 及び指数法則を用いる.

$$\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 \frac{1}{5^2} = \log_5 5^{-2} = -2 \ .$$

$$\log_2\left(8\sqrt{2}\right) = \log_2\left(2^3 2^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2 2^{3+\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2} \ .$$

終

$\boxed{問 9.2.2}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$\log_2 \dfrac{1}{32}$ ，$\log_3(9\sqrt{3})$ ．

$\boxed{\text{問}\,9.2.2}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$\log_2 \dfrac{1}{32}$ ，$\log_3(9\sqrt{3})$ ．

$$\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 \frac{1}{2^5} = \log_2 2^{-5} = -5 \ .$$

$\boxed{問 9.2.2}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$\log_2 \dfrac{1}{32}$ ，$\log_3(9\sqrt{3})$ ．

$$\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 \frac{1}{2^5} = \log_2 2^{-5} = -5 \ .$$

$$\log_3(9\sqrt{3}) = \log_3\left(3^2 3^{\frac{1}{2}}\right) = \log_3 3^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \ .$$

$\boxed{終}$

例 次の式を計算して簡単にする： $3^{2+\log_3 7}$ ， $7^{5\log_7 2}$ ．

$\boxed{例}$ 次の式を計算して簡単にする： $3^{2+\log_3 7}$, $7^{5\log_7 2}$.

公式 $a^{\log_a r} = r$ （ $a > 0$, $a \neq 1$, $r > 0$ ） を用いる.

例 次の式を計算して簡単にする： $3^{2+\log_3 7}$ ，$7^{5\log_7 2}$ ．

公式 $a^{\log_a r} = r$ （ $a > 0$ ，$a \neq 1$ ，$r > 0$ ）を用いる．指数法則 $a^{p+q} = a^p a^q$ より，

$$3^{2+\log_3 7} = 3^2 3^{\log_3 7} = 9 \cdot 7 = 63 \ .$$

例 次の式を計算して簡単にする： $3^{2+\log_3 7}$, $7^{5\log_7 2}$.

公式 $a^{\log_a r} = r$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $r > 0$) を用いる．指数法則 $a^{p+q} = a^p a^q$ より，

$$3^{2+\log_3 7} = 3^2 3^{\log_3 7} = 9 \cdot 7 = 63 \ .$$

指数法則 $a^{pq} = (a^p)^q$ より，

$$7^{5\log_7 2} = 7^{(\log_7 2)\cdot 5} = \left(7^{\log_7 2}\right)^5 = 2^5 = 32 \ .$$

終

$\boxed{\text{問}9.2.3}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$2^{3+\log_2 5}$ ，$5^{4\log_5 3}$ ．

$\boxed{\text{問}\,9.2.3}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$2^{3+\log_2 5}$ ，$5^{4\log_5 3}$ ．

$$2^{3+\log_2 5} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 5} = 8 \cdot 5 = 40 \ .$$

問9.2.3 次の式を計算して簡単にせよ：$2^{3+\log_2 5}$, $5^{4\log_5 3}$.

$$2^{3+\log_2 5} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 5} = 8 \cdot 5 = 40 \ .$$

$$5^{4\log_5 3} = \left(5^{\log_5 3}\right)^4 = 3^4 = 81 \ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 関数 f は 2 を底とする対数関数であるとする. 11 における f の値と 16 における f の値と $\dfrac{1}{8}$ における f の値とを求める.

$\boxed{\text{例}}$ 関数 f は 2 を底とする対数関数であるとする. 11 における f の値と 16 における f の値と $\dfrac{1}{8}$ における f の値とを求める.

関数 f は 2 を底とする対数関数なので $f(x) = \log_2 x$.

$\boxed{\text{例}}$ 関数 f は 2 を底とする対数関数であるとする．11 における f の値と 16 における f の値と $\dfrac{1}{8}$ における f の値とを求める．

関数 f は 2 を底とする対数関数なので $f(x) = \log_2 x$ ．11 における f の値は

$$f(11) = \log_2 11 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 関数 f は 2 を底とする対数関数であるとする．11 における f の値と 16 における f の値と $\frac{1}{8}$ における f の値とを求める．

関数 f は 2 を底とする対数関数なので $f(x)=\log_2 x$ ．11 における f の値は

$$f(11)=\log_2 11\ .$$

16 における f の値は

$$f(16)=\log_2 16=\log_2 2^4=4\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 関数 f は 2 を底とする対数関数であるとする. 11 における f の値と 16 における f の値と $\frac{1}{8}$ における f の値とを求める.

関数 f は 2 を底とする対数関数なので $f(x) = \log_2 x$. 11 における f の値は

$$f(11) = \log_2 11 \ .$$

16 における f の値は

$$f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \ .$$

$\frac{1}{8}$ における f の値は

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 \frac{1}{2^3} = \log_2 2^{-3} = -3 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問9.2.4}$ 対数関数 g の底は 3 であるとする．23 における g の値と 81 における g の値と $\dfrac{1}{27}$ における g の値とを求める．

対数関数 g の底が 3 なので $g(x) =$ ．23 における g の値は

81 における g の値は

$\dfrac{1}{27}$ における g の値は

$\boxed{問 9.2.4}$ 対数関数 g の底は 3 であるとする．23 における g の値と 81 における g の値と $\dfrac{1}{27}$ における g の値とを求める．

対数関数 g の底が 3 なので $g(x) = \log_3 x$ ．23 における g の値は

81 における g の値は

$\dfrac{1}{27}$ における g の値は

$\boxed{問 9.2.4}$ 対数関数 g の底は 3 であるとする. 23 における g の値と 81 における g の値と $\dfrac{1}{27}$ における g の値とを求める.

対数関数 g の底が 3 なので $g(x) = \log_3 x$. 23 における g の値は

$$g(23) = \log_3 23 \ .$$

81 における g の値は

$\dfrac{1}{27}$ における g の値は

$\boxed{問9.2.4}$ 対数関数 g の底は 3 であるとする．23 における g の値と 81 における g の値と $\dfrac{1}{27}$ における g の値とを求める．

対数関数 g の底が 3 なので $g(x) = \log_3 x$ ．23 における g の値は

$$g(23) = \log_3 23 \ .$$

81 における g の値は

$$g(81) = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \ .$$

$\dfrac{1}{27}$ における g の値は

$\boxed{問9.2.4}$ 対数関数 g の底は 3 であるとする．23 における g の値と 81 における g の値と $\dfrac{1}{27}$ における g の値とを求める．

対数関数 g の底が 3 なので $g(x) = \log_3 x$ ．23 における g の値は

$$g(23) = \log_3 23 \ .$$

81 における g の値は

$$g(81) = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \ .$$

$\dfrac{1}{27}$ における g の値は

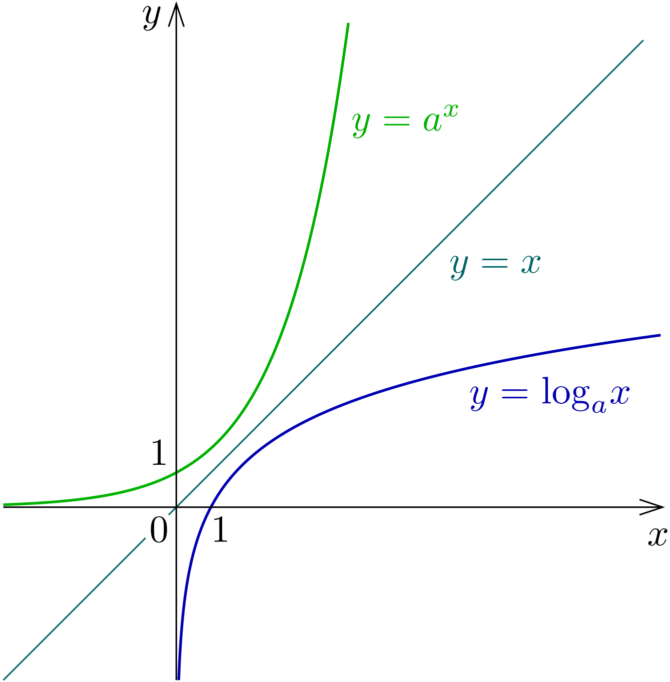
$$g\left(\frac{1}{27}\right) = \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3 \ .$$

$\boxed{終}$

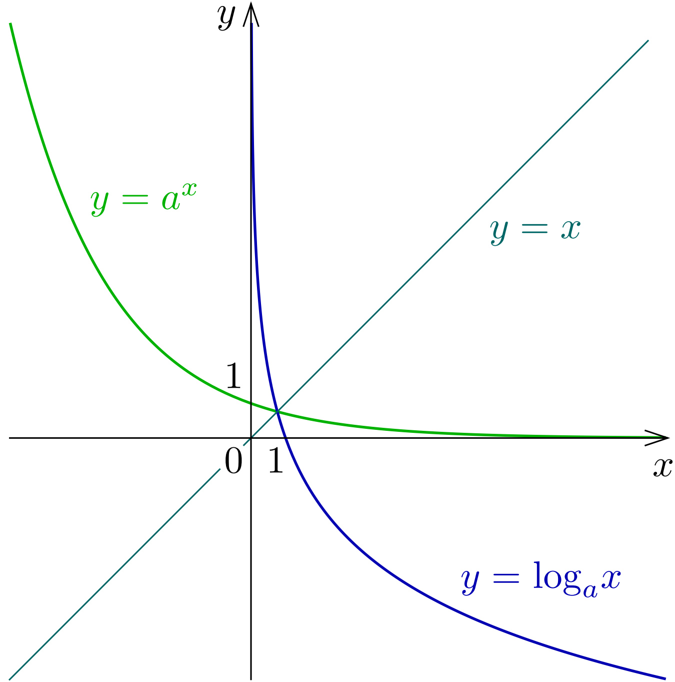
7.7 節で次のことを述べた：xy 座標平面において関数 f の逆関数 f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である．

7.7 節で次のことを述べた：xy 座標平面において関数 f の逆関数 f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である.

定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. a を底とする対数関数 $\log_a x$ は a を底とする指数関数 a^x の逆関数なので，xy 座標平面において $y = \log_a x$ のグラフは $y = a^x$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である.



$a > 1$ のときの $y = \log_a x$ のグラフ



$0 < a < 1$ のときの $y = \log_a x$ のグラフ

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは y 軸に限りなく近付いていくが，y 軸と交わらない．つまり，y 軸は $y = \log_a x$ のグラフの漸近線である．

対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは y 軸に限りなく近付いていくが，y 軸と交わらない．つまり，y 軸は $y=\log_a x$ のグラフの漸近線である．

グラフから分かるように，次の定理が成り立つ．

定理　定数 a は実数で $a>0$ かつ $a \neq 1$ とする．定義域が正の実数の全体である対数関数 $\log_a x$ の値域は実数全体である．また，対数関数 $\log_a x$ は，$a>1$ のとき単調増加であり，$0<a<1$ のとき単調減少である．