9.3 対数の性質

実数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 実数 r, s について $r > 0$ かつ $s > 0$ とする.

実数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数 r,s について $r>0$ かつ $s>0$ とする．公式　　$=\log_a(a^P)$ において

実数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする．実数 r, s について $r > 0$ かつ $s > 0$ とする．公式 $P = \log_a(a^P)$ において $P = \log_a r + \log_a s$ とおくと

$$\log_a r + \log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r + \log_a s}\right) .$$

実数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数 r,s について $r>0$ かつ $s>0$ とする．公式 $P=\log_a(a^P)$ において $P=\log_a r+\log_a s$ とおくと

$$\log_a r+\log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r+\log_a s}\right) .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{u+v}=a^u a^v$ より

$$a^{\log_a r+\log_a s} = a^{\log_a r}a^{\log_a s} ,$$

実数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数 r,s について $r>0$ かつ $s>0$ とする．公式 $P=\log_a(a^P)$ において $P=\log_a r+\log_a s$ とおくと

$$\log_a r+\log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r+\log_a s}\right) .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{u+v}=a^u a^v$ より

$$a^{\log_a r+\log_a s} = a^{\log_a r}a^{\log_a s} ,$$

$a^{\log_a r}=\quad$ ，$a^{\log_a s}=\quad$ なので

実数 a について $a>0$ かつ $a \neq 1$ とする．実数 r, s について $r>0$ かつ $s>0$ とする．公式 $P=\log_a(a^P)$ において $P=\log_a r+\log_a s$ とおくと

$$\log_a r+\log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r+\log_a s}\right) .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{u+v}=a^u a^v$ より

$$a^{\log_a r+\log_a s} = a^{\log_a r} a^{\log_a s} ,$$

$a^{\log_a r}=r$ ， $a^{\log_a s}=s$ なので

$$a^{\log_a r} a^{\log_a s} = rs .$$

実数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数 r,s について $r>0$ かつ $s>0$ とする．公式 $P=\log_a(a^P)$ において $P=\log_a r+\log_a s$ とおくと

$$\log_a r+\log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r+\log_a s}\right) .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{u+v}=a^u a^v$ より

$$a^{\log_a r+\log_a s} = a^{\log_a r}a^{\log_a s} ,$$

$a^{\log_a r}=r$ ，$a^{\log_a s}=s$ なので

$$a^{\log_a r}a^{\log_a s} = rs .$$

これら 3 個の等式より，

$$\log_a r+\log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r+\log_a s}\right) = \log_a\left(a^{\log_a r}a^{\log_a s}\right) = \log_a(rs) .$$

実数 a について $a>0$ かつ $a \neq 1$ とする. 実数 r, s について $r>0$ かつ $s>0$ とする.

実数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする．実数 r, s について $r > 0$ かつ $s > 0$ とする．公式 $\quad = \log_a(a^P)$ において

実数 a について $a>0$ かつ $a \neq 1$ とする．実数 r, s について $r>0$ かつ $s>0$ とする．公式 $P=\log_a(a^P)$ において $P=\log_a r - \log_a s$ とおくと

$$\log_a r - \log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r - \log_a s}\right) .$$

実数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数 r, s について $r>0$ かつ $s>0$ とする．公式 $P=\log_a(a^P)$ において $P=\log_a r-\log_a s$ とおくと

$$\log_a r-\log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r-\log_a s}\right) .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{u-v}=\dfrac{a^u}{a^v}$ より

$$a^{\log_a r-\log_a s} = \frac{a^{\log_a r}}{a^{\log_a s}} ,$$

実数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数 r,s について $r>0$ かつ $s>0$ とする．公式 $P=\log_a(a^P)$ において $P=\log_a r-\log_a s$ とおくと

$$\log_a r-\log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r-\log_a s}\right) .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{u-v}=\dfrac{a^u}{a^v}$ より

$$a^{\log_a r-\log_a s} = \frac{a^{\log_a r}}{a^{\log_a s}} ,$$

$a^{\log_a r}=\quad$，$a^{\log_a s}=\quad$ なので

実数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする．実数 r, s について $r > 0$ かつ $s > 0$ とする．公式 $P = \log_a(a^P)$ において $P = \log_a r - \log_a s$ とおくと

$$\log_a r - \log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r - \log_a s}\right) .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{u-v} = \dfrac{a^u}{a^v}$ より

$$a^{\log_a r - \log_a s} = \frac{a^{\log_a r}}{a^{\log_a s}} ,$$

$a^{\log_a r} = r$ ， $a^{\log_a s} = s$ なので

$$\frac{a^{\log_a r}}{a^{\log_a s}} = \frac{r}{s} .$$

実数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数 r,s について $r>0$ かつ $s>0$ とする．公式 $P=\log_a(a^P)$ において $P=\log_a r-\log_a s$ とおくと

$$\log_a r-\log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r-\log_a s}\right) .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{u-v}=\dfrac{a^u}{a^v}$ より

$$a^{\log_a r-\log_a s} = \frac{a^{\log_a r}}{a^{\log_a s}} ,$$

$a^{\log_a r}=r$ ，$a^{\log_a s}=s$ なので

$$\frac{a^{\log_a r}}{a^{\log_a s}} = \frac{r}{s} .$$

これら 3 個の等式より，

$$\log_a r-\log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r-\log_a s}\right) = \log_a \frac{a^{\log_a r}}{a^{\log_a s}} = \log_a \frac{r}{s} .$$

実数 a について $a>0$ かつ $a \neq 1$ とする．実数 r について $r>0$ とする．実数 p は任意とする．

実数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする．実数 r について $r > 0$ とする．実数 p は任意とする．公式 $\quad = \log_a(a^P)$ において

実数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする．実数 r について $r > 0$ とする．実数 p は任意とする．公式 $P = \log_a(a^P)$ において $P = p\log_a r$ とおくと

$$p\log_a r = \log_a\left(a^{p\log_a r}\right) .$$

実数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする．実数 r について $r > 0$ とする．実数 p は任意とする．公式 $P = \log_a(a^P)$ において $P = p\log_a r$ とおくと

$$p\log_a r = \log_a\left(a^{p\log_a r}\right) .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{vu} = a^{uv} = (a^u)^v$ より

$$a^{p\log_a r} = \left(a^{\log_a r}\right)^p ,$$

　実数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数 r について $r>0$ とする．実数 p は任意とする．公式 $P=\log_a(a^P)$ において $P=p\log_a r$ とおくと

$$p\log_a r = \log_a\left(a^{p\log_a r}\right) .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{vu}=a^{uv}=(a^u)^v$ より

$$a^{p\log_a r} = \left(a^{\log_a r}\right)^p ,$$

$a^{\log_a r} =$ 　なので

実数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数 r について $r>0$ とする．実数 p は任意とする．公式 $P=\log_a(a^P)$ において $P=p\log_a r$ とおくと

$$p\log_a r = \log_a\left(a^{p\log_a r}\right) .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{vu}=a^{uv}=(a^u)^v$ より

$$a^{p\log_a r} = \left(a^{\log_a r}\right)^p ,$$

$a^{\log_a r}=r$ なので

$$\left(a^{\log_a r}\right)^p = r^p .$$

　実数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数 r について $r>0$ とする．実数 p は任意とする．公式 $P=\log_a(a^P)$ において $P=p\log_a r$ とおくと

$$p\log_a r \;=\; \log_a\left(a^{p\log_a r}\right)\ .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{vu}=a^{uv}=(a^u)^v$ より

$$a^{p\log_a r} \;=\; \left(a^{\log_a r}\right)^p\ ,$$

$a^{\log_a r}=r$ なので

$$\left(a^{\log_a r}\right)^p \;=\; r^p\ .$$

これら 3 個の等式より，

$$p\log_a r \;=\; \log_a\left(a^{p\log_a r}\right) \;=\; \log_a\left\{\left(a^{\log_a r}\right)^p\right\} \;=\; \log_a\left(r^p\right)\ .$$

定理（対数法則） a は正の実数で $a \neq 1$ とする．任意の正の実数 r, s 及び任意の実数 p について，

$$\log_a(rs) = \log_a r + \log_a s \ , \quad \log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s \ , \quad \log_a(r^p) = p\log_a r \ .$$

実数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数 p,q は任意とする．実数 r,s について $r>0$ かつ $s>0$ とする．

指数法則では

$$a^{p+q} = a^p a^q \ .$$

対数法則では

$$\log_a(rs) = \log_a r + \log_a s \ .$$

実数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数 p,q は任意とする．実数 r,s について $r>0$ かつ $s>0$ とする．

指数法則では

$$a^{p+q} = a^p a^q \ .$$

対数法則では

$$\log_a(rs) = \log_a r + \log_a s \ .$$

このように，

指数法則では　指数が 和 の冪は 冪の 積 であり，

対数法則では　積 の対数は 対数の 和 である．

実数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする．実数 p, q は任意とする．実数 r, s について $r > 0$ かつ $s > 0$ とする．

指数法則では

$$a^{p-q} = \frac{a^p}{a^q} \ .$$

対数法則では

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s \ .$$

実数 a について $a>0$ かつ $a \neq 1$ とする．実数 p, q は任意とする．実数 r, s について $r>0$ かつ $s>0$ とする．

指数法則では

$$a^{p-q} = \frac{a^p}{a^q} \ .$$

対数法則では

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s \ .$$

このように，

指数法則では　指数が 差 の冪は 冪の 商 であり，

対数法則では　商 の対数は 対数の 差 である．

a は正の実数で $a \neq 1$ とします．正の実数 r について，

$$\log_a \frac{1}{r} = \log_a r^{-1} = -\log_a r \ .$$

例 次の式を計算して簡単にする： $\log_2 \dfrac{8}{5} + \log_2 10$.

例 次の式を計算して簡単にする： $\log_2 \frac{8}{5} + \log_2 10$.

2 通りの計算法を示す.

$\boxed{例}$ 次の式を計算して簡単にする： $\log_2 \dfrac{8}{5} + \log_2 10$.

2 通りの計算法を示す.

$$\log_2 \frac{8}{5} = \log_2 8 - \log_2 5$$

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする： $\log_2 \dfrac{8}{5} + \log_2 10$.

2 通りの計算法を示す.

$$\log_2 \frac{8}{5} = \log_2 8 - \log_2 5 = \log_2 2^3 - \log_2 5 = 3 - \log_2 5 \ ,$$

例 次の式を計算して簡単にする： $\log_2 \frac{8}{5} + \log_2 10$.

2 通りの計算法を示す.

$$\log_2 \frac{8}{5} = \log_2 8 - \log_2 5 = \log_2 2^3 - \log_2 5 = 3 - \log_2 5 \ ,$$

$$\log_2 10 = \log_2 (2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5$$

$$\log_a (rs) = \log_a r + \log_a s$$

例 次の式を計算して簡単にする： $\log_2 \dfrac{8}{5} + \log_2 10$.

2 通りの計算法を示す.

$$\log_2 \frac{8}{5} = \log_2 8 - \log_2 5 = \log_2 2^3 - \log_2 5 = 3 - \log_2 5 \ ,$$

$$\log_2 10 = \log_2 (2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする： $\log_2 \dfrac{8}{5} + \log_2 10$.

2 通りの計算法を示す.

$$\log_2 \frac{8}{5} = \log_2 8 - \log_2 5 = \log_2 2^3 - \log_2 5 = 3 - \log_2 5 \ ,$$

$$\log_2 10 = \log_2 (2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5 \ .$$

よって

$$\log_2 \frac{8}{5} + \log_2 10 = 3 - \log_2 5 + 1 + \log_2 5 = 4 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする： $\log_2\dfrac{8}{5}+\log_2 10$.

2 通りの計算法を示す.

$$\log_2\frac{8}{5}=\log_2 8-\log_2 5=\log_2 2^3-\log_2 5=3-\log_2 5\ ,$$

$$\log_2 10=\log_2(2\cdot 5)=\log_2 2+\log_2 5=1+\log_2 5\ .$$

よって

$$\log_2\frac{8}{5}+\log_2 10\ =\ 3-\log_2 5+1+\log_2 5\ =\ 4\ .$$

あるいは,

$$\log_2\frac{8}{5}+\log_2 10=\log_2\left(\frac{8}{5}\cdot 10\right)$$

$$\log_a r+\log_a s=\log_a(rs)$$

例 次の式を計算して簡単にする： $\log_2 \dfrac{8}{5} + \log_2 10$.

2 通りの計算法を示す.

$$\log_2 \frac{8}{5} = \log_2 8 - \log_2 5 = \log_2 2^3 - \log_2 5 = 3 - \log_2 5 \ ,$$

$$\log_2 10 = \log_2 (2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5 \ .$$

よって

$$\log_2 \frac{8}{5} + \log_2 10 = 3 - \log_2 5 + 1 + \log_2 5 = 4 \ .$$

あるいは,

$$\log_2 \frac{8}{5} + \log_2 10 = \log_2 \left(\frac{8}{5} \cdot 10 \right) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \ .$$

終

$\boxed{\text{問}9.3.1}$ 次の式を計算して簡単にせよ： $\log_3 36 + \log_3 \dfrac{27}{4}$.

$\boxed{\text{問}9.3.1}$ 次の式を計算して簡単にせよ： $\log_3 36 + \log_3 \dfrac{27}{4}$.

$$\begin{aligned}
\log_3 36 + \log_3 \frac{27}{4} &= \log_3 (2^2 3^2) + \log_3 27 - \log_3 4 \\
&= \log_3 2^2 + \log_3 3^2 + \log_3 3^3 - \log_3 2^2 \\
&= 2 \log_3 2 + 2 + 3 - 2 \log_3 2 \\
&= 5 \ .
\end{aligned}$$

あるは

$$\begin{aligned}
\log_3 36 + \log_3 \frac{27}{4} &= \log_3 \left(36 \cdot \frac{27}{4} \right) = \log_3 (9 \cdot 27) = \log_3 (3^2 3^3) = \log_3 3^5 \\
&= 5 \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする： $2\log_5 8 + \log_5 \dfrac{3}{32}$.

$\boxed{例}$ 次の式を計算して簡単にする： $2\log_5 8 + \log_5 \dfrac{3}{32}$.

2 通りの計算法を示す.

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする： $2\log_5 8 + \log_5 \dfrac{3}{32}$.

2 通りの計算法を示す.

$$2\log_5 8 + \log_5 \frac{3}{32} = 2\log_5 2^3 + \log_5 3 - \log_5 32$$

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$$

$\boxed{例}$ 次の式を計算して簡単にする： $2\log_5 8 + \log_5 \dfrac{3}{32}$.

2 通りの計算法を示す.

$$2\log_5 8 + \log_5 \frac{3}{32} = 2\log_5 2^3 + \log_5 3 - \log_5 32 = 6\log_5 2 + \log_5 3 - \log_5 2^5$$

$$\log_a r^p = p\log_a r$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする： $2\log_5 8 + \log_5 \dfrac{3}{32}$.

2 通りの計算法を示す.

$$\begin{aligned}2\log_5 8 + \log_5 \frac{3}{32} &= 2\log_5 2^3 + \log_5 3 - \log_5 32 = 6\log_5 2 + \log_5 3 - \log_5 2^5 \\ &= 6\log_5 2 + \log_5 3 - 5\log_5 2 = \log_5 2 + \log_5 3 \\ &= \log_5 6 \ .\end{aligned}$$

$\log_a r + \log_a s = \log_a (rs)$

例 次の式を計算して簡単にする： $2\log_5 8 + \log_5 \dfrac{3}{32}$.

2 通りの計算法を示す.

$$
\begin{aligned}
2\log_5 8 + \log_5 \frac{3}{32} &= 2\log_5 2^3 + \log_5 3 - \log_5 32 = 6\log_5 2 + \log_5 3 - \log_5 2^5 \\
&= 6\log_5 2 + \log_5 3 - 5\log_5 2 = \log_5 2 + \log_5 3 \\
&= \log_5 6 \ .
\end{aligned}
$$

あるいは,

$$
\begin{aligned}
2\log_5 8 + \log_5 \frac{3}{32} &= \log_5 (2^3)^2 + \log_5 \frac{3}{32} = \log_5 \left(2^6 \cdot \frac{3}{2^5} \right) = \log_5 (2 \cdot 3) \\
&= \log_5 6 \ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{\text{問}\,9.3.2}$ 次の式を計算して簡単にせよ： $\log_6 \dfrac{27}{7} - 2\log_6 9$.

問9.3.2 次の式を計算して簡単にせよ： $\log_6 \dfrac{27}{7} - 2\log_6 9$.

$$
\begin{aligned}
\log_6 \frac{27}{7} - 2\log_6 9 &= \log_6 27 - \log_6 7 - 2\log_6 3^2 \\
&= \log_6 3^3 - \log_6 7 - 4\log_6 3 \\
&= 3\log_6 3 - \log_6 7 - 4\log_6 3 \\
&= -\log_6 7 - \log_6 3 \\
&= -\log_6 21 \ .
\end{aligned}
$$

あるいは

$$
\begin{aligned}
\log_6 \frac{27}{7} - 2\log_6 9 &= \log_6 \frac{27}{7} - \log_6 9^2 = \log_6 \frac{27}{7 \cdot 9^2} = \log_6 \frac{1}{7 \cdot 3} = \log_6 \frac{1}{21} \\
&= -\log_6 21 \ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{例}$ 次の式を計算して簡単にする： $\dfrac{\log_2 40}{2} - \log_2 \sqrt{5}$.

例 次の式を計算して簡単にする： $\dfrac{\log_2 40}{2} - \log_2 \sqrt{5}$.

$$\frac{\log_2 40}{2} - \log_2 \sqrt{5} = \frac{\log_2 (2^3 \cdot 5)}{2} - \log_2 5^{\frac{1}{2}} = \frac{\log_2 2^3 + \log_2 5}{2} - \frac{1}{2}\log_2 5$$

$$\log_a (rs) = \log_a r + \log_a s \ , \ \log_a r^p = p \log_a r$$

例 次の式を計算して簡単にする： $\dfrac{\log_2 40}{2} - \log_2 \sqrt{5}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\log_2 40}{2} - \log_2 \sqrt{5} &= \frac{\log_2 (2^3 \cdot 5)}{2} - \log_2 5^{\frac{1}{2}} = \frac{\log_2 2^3 + \log_2 5}{2} - \frac{1}{2}\log_2 5 \\
&= \frac{3 + \log_2 5}{2} - \frac{\log_2 5}{2} \\
&= \frac{3}{2} \ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{問 9.3.3}$ 次の式を計算して簡単にせよ： $\log_5\sqrt{7} - \dfrac{\log_5 28}{2}$.

$\boxed{\text{問}\,9.3.3}$ 次の式を計算して簡単にせよ： $\log_5\sqrt{7} - \dfrac{\log_5 28}{2}$.

$$
\begin{aligned}
\log_5\sqrt{7} - \frac{\log_5 28}{2} &= \frac{\log_5 7}{2} - \frac{\log_5 (2^2 \cdot 7)}{2} \\
&= \frac{\log_5 7}{2} - \frac{\log_5 2^2 + \log_5 7}{2} = -\frac{2\log_5 2}{2} \\
&= -\log_5 2 \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

対数に関するもう一つの公式は対数の底を換えるための公式である.

実数 a と b とについて $a, b > 0$, $b \neq 1$ とする. $\log_b a = 0$ とすると, $b^{\log_b a} = b^0 = 1$, $b^{\log_b a} = a$ なので, $a = 1$. つまり, $\log_b a = 0$ ならば $a = 1$. 対偶をとると, $a \neq 1$ ならば $\log_b a \neq 0$.

補助定理　実数 a, b について, $a, b > 0$ かつ $a, b \neq 1$ のとき, $\log_b a \neq 0$.

実数 a, b, r について，$a, b, r > 0$ かつ $a, b \neq 1$ とする．

実数 a, b, r について，$a, b, r > 0$ かつ $a, b \neq 1$ とする．公式

$= \log_b(b^P)$ において

実数 a,b,r について， $a,b,r>0$ かつ $a,b\neq 1$ とする．公式 $P=\log_b(b^P)$ において $P=(\log_b a)(\log_a r)$ とおくと

$$(\log_b a)(\log_a r) = \log_b\left\{ b^{(\log_b a)(\log_a r)} \right\} .$$

実数 a, b, r について，$a, b, r > 0$ かつ $a, b \neq 1$ とする．公式 $P = \log_b(b^P)$ において $P = (\log_b a)(\log_a r)$ とおくと

$$(\log_b a)(\log_a r) = \log_b\left\{ b^{(\log_b a)(\log_a r)} \right\} .$$

右辺の式において，指数法則 $b^{uv} = (b^u)^v$ より

$$b^{(\log_b a)(\log_a r)} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a r} ,$$

実数 a, b, r について，$a, b, r > 0$ かつ $a, b \neq 1$ とする．公式 $P = \log_b(b^P)$ において $P = (\log_b a)(\log_a r)$ とおくと

$$(\log_b a)(\log_a r) = \log_b\left\{ b^{(\log_b a)(\log_a r)} \right\} .$$

右辺の式において，指数法則 $b^{uv} = (b^u)^v$ より

$$b^{(\log_b a)(\log_a r)} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a r} ,$$

$b^{\log_b a} = a$ ，$a^{\log_a r} = r$ なので，

$$\left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a r} = a^{\log_a r} = r .$$

実数 a, b, r について，$a, b, r > 0$ かつ $a, b \neq 1$ とする．公式 $P = \log_b(b^P)$ において $P = (\log_b a)(\log_a r)$ とおくと

$$(\log_b a)(\log_a r) = \log_b\left\{b^{(\log_b a)(\log_a r)}\right\} .$$

右辺の式において，指数法則 $b^{uv} = (b^u)^v$ より

$$b^{(\log_b a)(\log_a r)} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a r} ,$$

$b^{\log_b a} = a$ ，$a^{\log_a r} = r$ なので，

$$\left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a r} = a^{\log_a r} = r .$$

これら 3 個の等式より，

$$(\log_b a)(\log_a r) = \log_b\left\{b^{(\log_b a)(\log_a r)}\right\} = \log_b\left\{\left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a r}\right\} = \log_b r .$$

実数 a, b, r について，$a, b, r > 0$ かつ $a, b \neq 1$ とする．公式 $P = \log_b(b^P)$ において $P = (\log_b a)(\log_a r)$ とおくと

$$(\log_b a)(\log_a r) = \log_b\left\{ b^{(\log_b a)(\log_a r)} \right\} .$$

右辺の式において，指数法則 $b^{uv} = (b^u)^v$ より

$$b^{(\log_b a)(\log_a r)} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a r} ,$$

$b^{\log_b a} = a$ ，$a^{\log_a r} = r$ なので，

$$\left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a r} = a^{\log_a r} = r .$$

これら 3 個の等式より，

$$(\log_b a)(\log_a r) = \log_b\left\{ b^{(\log_b a)(\log_a r)} \right\} = \log_b\left\{ \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a r} \right\} = \log_b r .$$

$a \neq 1$ なので，補助定理より $\log_b a \neq 0$ ，故に $\log_a r = \dfrac{\log_b r}{\log_b a}$.

定理（対数の底の変換公式）　実数 a, b, r について，$a, b, r > 0$ ，$a, b \neq 1$ のとき，

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a} \ .$$

例 次の式を計算して簡単にする： $\log_8 32$，$\log_{\frac{1}{4}} 49$．対数の式を用いるならば底を 2 にする.

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする： $\log_8 32$，$\log_{\frac{1}{4}} 49$． 対数の式を用いるならば底を 2 にする.

$$\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8}$$

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$$

$\boxed{例}$ 次の式を計算して簡単にする: $\log_8 32$, $\log_{\frac{1}{4}} 49$. 対数の式を用いるならば底を 2 にする.

$$\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3} = \frac{5}{3} .$$

例 次の式を計算して簡単にする： $\log_8 32$，$\log_{\frac{1}{4}} 49$．対数の式を用いるならば底を 2 にする．

$$\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3} = \frac{5}{3}\ .$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 49 = \frac{\log_2 49}{\log_2 \frac{1}{4}}$$

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$$

例 次の式を計算して簡単にする： $\log_8 32$ ，$\log_{\frac{1}{4}} 49$ ． 対数の式を用いるならば底を 2 にする.

$$\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3} = \frac{5}{3} \ .$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 49 = \frac{\log_2 49}{\log_2 \frac{1}{4}} = \frac{\log_2 7^2}{\log_2 \frac{1}{2^2}} = \frac{2\log_2 7}{\log_2 2^{-2}} = \frac{2\log_2 7}{-2} = -\log_2 7 \ .$$

終

$\boxed{問9.3.4}$ 以下の式を簡単にせよ：$\log_{16} 64$，$\log_{\frac{1}{9}} 27$． 対数の式を用いるならば底を 2 にせよ.

$\boxed{\text{問}9.3.4}$ 以下の式を簡単にせよ：$\log_{16}64$，$\log_{\frac{1}{9}}27$．対数の式を用いるならば底を 2 にせよ.

$$\log_{16}64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 16} = \frac{\log_2 4^3}{\log_2 4^2} = \frac{3}{2} \ .$$

$\boxed{問 9.3.4}$ 以下の式を簡単にせよ：$\log_{16}64$，$\log_{\frac{1}{9}}27$．対数の式を用いるならば底を 2 にせよ.

$$\log_{16}64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 16} = \frac{\log_2 4^3}{\log_2 4^2} = \frac{3}{2} \ .$$

$$\log_{\frac{1}{9}}27 = \frac{\log_2 27}{\log_2 \frac{1}{9}} = \frac{\log_2 3^3}{\log_2 \frac{1}{3^2}} = \frac{3\log_2 3}{\log_2 3^{-2}} = \frac{3\log_2 3}{-2\log_2 3} = -\frac{3}{2} \ .$$

$\boxed{終}$

実数 a と b とについて，$a,b>0$ ，$a,b\neq 1$ であるとき，底の変換公式より，

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \ .$$

一つの式に異なる底の対数が現れるときは，底の変換公式を用いて対数の底を揃える．

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする: $\log_3 10 - \log_9 16$. 対数の式を用いるならば底を 3 にする.

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする： $\log_3 10 - \log_9 16$． 対数の式を用いるならば底を 3 にする.

$$\log_3 10 - \log_9 16 = \log_3 (2 \cdot 5) - \frac{\log_3 16}{\log_3 9}$$

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$$

$\boxed{例}$ 次の式を計算して簡単にする： $\log_3 10 - \log_9 16$． 対数の式を用いるならば底を 3 にする.

$$\log_3 10 - \log_9 16 = \log_3(2\cdot 5) - \frac{\log_3 16}{\log_3 9} = \log_3 2 + \log_3 5 - \frac{\log_3 2^4}{\log_3 3^2}$$

$$= \log_3 2 + \log_3 5 - \frac{4\log_3 2}{2}$$

$$\log_a r^p = p\log_a r$$

例 次の式を計算して簡単にする: $\log_3 10 - \log_9 16$. 対数の式を用いるならば底を 3 にする.

$$\log_3 10 - \log_9 16 = \log_3(2\cdot 5) - \frac{\log_3 16}{\log_3 9} = \log_3 2 + \log_3 5 - \frac{\log_3 2^4}{\log_3 3^2}$$
$$= \log_3 2 + \log_3 5 - \frac{4\log_3 2}{2} = \log_3 2 + \log_3 5 - 2\log_3 2$$
$$= \log_3 5 - \log_3 2$$
$$= \log_3 \frac{5}{2}\ .$$

終

$\boxed{問9.3.5}$ 次の式を計算して簡単にせよ： $\dfrac{\log_2 21}{3} - \log_8 49$．対数の式を用いるならば底を 2 にせよ.

$\boxed{問 9.3.5}$ 次の式を計算して簡単にせよ： $\dfrac{\log_2 21}{3} - \log_8 49$ ． 対数の式を用いるならば底を 2 にせよ.

$$
\begin{aligned}
\frac{\log_2 21}{3} - \log_8 49 &= \frac{\log_2 (3 \cdot 7)}{3} - \frac{\log_2 7^2}{3} \\
&= \frac{\log_2 3 + \log_2 7 - 2\log_2 7}{3} \\
&= \frac{\log_2 3 - \log_2 7}{3} \\
&= \frac{1}{3}\log_2 \frac{3}{7} \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする：$(\log_3 2)(\log_8 6)$．対数の式を用いるならば底を 3 にする.

$\boxed{例}$ 次の式を計算して簡単にする： $(\log_3 2)(\log_8 6)$． 対数の式を用いるならば底を 3 にする.

$$(\log_3 2)(\log_8 6) = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 8}$$

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$$

例 次の式を計算して簡単にする：$(\log_3 2)(\log_8 6)$．対数の式を用いるならば底を 3 にする.

$$(\log_3 2)(\log_8 6) = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 8} = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 2^3} = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 6}{3\log_3 2}$$

$$\log_a r^p = p\log_a r$$

例 次の式を計算して簡単にする：$(\log_3 2)(\log_8 6)$． 対数の式を用いるならば底を 3 にする．

$$
\begin{aligned}
(\log_3 2)(\log_8 6) &= \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 8} = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 2^3} = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 6}{3\log_3 2} \\
&= \frac{\log_3 6}{3}\ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{問9.3.6}$ 次の式を計算して簡単にせよ： $(\log_2 3)(\log_9 10)$． 対数の式を用いるならば底を 2 にせよ.

$\boxed{問9.3.6}$ 次の式を計算して簡単にせよ： $(\log_2 3)(\log_9 10)$． 対数の式を用いるならば底を 2 にせよ.

$$
\begin{aligned}
(\log_2 3)(\log_9 10) &= (\log_2 3)\frac{\log_2 10}{\log_2 9} = (\log_2 3)\frac{\log_2 10}{\log_2 3^2} = (\log_2 3)\frac{\log_2 10}{2\log_2 3} \\
&= \frac{\log_2 10}{2} \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$