9.5 指数・対数に関する不等式

定数 a について,

- $a > 1$ のとき指数関数 a^x も対数関数 $\log_a x$ も単調増加であり,
- $0 < a < 1$ のとき指数関数 a^x も対数関数 $\log_a x$ も単調減少である.

実数 a について $a > 1$ とする．実数 r, s とについて $r, s > 0$ とする．

実数 a について $a > 1$ とする. 実数 r, s とについて $r, s > 0$ とする.
対数関数 $\log_a x$ は単調増加なので,

$$r < s \text{ ならば } \log_a r < \log_a s \ .$$

実数 a について $a > 1$ とする．実数 r, s とについて $r, s > 0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調増加なので，

$$r < s \text{ ならば } \log_a r < \log_a s \ .$$

また，指数関数 a^x は単調増加なので，

$$\log_a r < \log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r} < a^{\log_a s} \ ;$$

　実数 a について $a>1$ とする．実数 r,s とについて $r,s>0$ とする．
対数関数 $\log_a x$ は単調増加なので，

$$r < s \text{ ならば } \log_a r < \log_a s \ .$$

また，指数関数 a^x は単調増加なので，

$$\log_a r < \log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r} < a^{\log_a s} \ ;$$

$a^{\log_a r} = \quad$ ，$a^{\log_a s} = \quad$ なので，

実数 a について $a > 1$ とする．実数 r, s とについて $r, s > 0$ とする．
対数関数 $\log_a x$ は単調増加なので，

$$r < s \text{ ならば } \log_a r < \log_a s \ .$$

また，指数関数 a^x は単調増加なので，

$$\log_a r < \log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r} < a^{\log_a s} \ ;$$

$a^{\log_a r} = r$ ， $a^{\log_a s} = s$ なので，

$$\log_a r < \log_a s \text{ ならば } r < s \ .$$

　実数 a について $a>1$ とする．実数 r, s とについて $r, s>0$ とする．
対数関数 $\log_a x$ は単調増加なので，

$$r < s \quad \text{ならば} \quad \log_a r < \log_a s \ .$$

また，指数関数 a^x は単調増加なので，

$$\log_a r < \log_a s \quad \text{ならば} \quad a^{\log_a r} < a^{\log_a s} \ ;$$

$a^{\log_a r} = r$ ，$a^{\log_a s} = s$ なので，

$$\log_a r < \log_a s \quad \text{ならば} \quad r < s \ .$$

こうして次のことが導かれた：

$$r < s \iff \log_a r < \log_a s \ .$$

実数 a について $0<a<1$ とする. 実数 r, s とについて $r, s>0$ とする.

実数 a について $0 < a < 1$ とする．実数 r, s とについて $r, s > 0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調減少なので，

$$r < s \quad \text{ならば} \quad \log_a r > \log_a s \ .$$

実数 a について $0<a<1$ とする．実数 r,s とについて $r,s>0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調減少なので，

$$r < s \ \text{ならば}\ \log_a r > \log_a s \ .$$

また，指数関数 a^x は単調減少なので，

$$\log_a r > \log_a s \ \text{ならば}\ a^{\log_a r} < a^{\log_a s} \ ;$$

　実数 a について $0<a<1$ とする．実数 r,s とについて $r,s>0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調減少なので，

$$r<s \text{ ならば } \log_a r>\log_a s\ .$$

また，指数関数 a^x は単調減少なので，

$$\log_a r>\log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r}<a^{\log_a s}\ ;$$

$a^{\log_a r}=\quad$ ， $a^{\log_a s}=\quad$ なので，

実数 a について $0<a<1$ とする．実数 r, s とについて $r, s>0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調減少なので，

$$r < s \text{ ならば } \log_a r > \log_a s \ .$$

また，指数関数 a^x は単調減少なので，

$$\log_a r > \log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r} < a^{\log_a s} \ ;$$

$a^{\log_a r} = r$ ，$a^{\log_a s} = s$ なので，

$$\log_a r > \log_a s \text{ ならば } r < s \ .$$

実数 a について $0<a<1$ とする．実数 r,s とについて $r,s>0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調減少なので，

$$r < s \text{ ならば } \log_a r > \log_a s \ .$$

また，指数関数 a^x は単調減少なので，

$$\log_a r > \log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r} < a^{\log_a s} \ ;$$

$a^{\log_a r} = r$ ， $a^{\log_a s} = s$ なので，

$$\log_a r > \log_a s \text{ ならば } r < s \ .$$

こうして次のことが導かれた：

$$r < s \iff \log_a r > \log_a s \ .$$

このようにして次の定理が導かれる.

定理　実数 a について $a>0$，$a \neq 1$ とする.

(1) $a>1$ のとき，正の任意の実数 r と s とについて，

$$r<s \iff \log_a r < \log_a s \ ,$$

$$r \leq s \iff \log_a r \leq \log_a s \ ;$$

(2) $0<a<1$ のとき，正の任意の実数 r と s とについて，

$$r<s \iff \log_a r > \log_a s \ ,$$

$$r \leq s \iff \log_a r \geq \log_a s \ .$$

変数を含む式を指数とする冪の式を含む方程式を解く.

例 変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く.

例 変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く.

各実数 x について $\log_3 3^{x-5} =$ なので,

例 変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く.

各実数 x について $\log_3 3^{x-5} = x - 5$ なので，底が 3 である対数を考える.

$$\log_a a^p = p$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く.

各実数 x について $\log_3 3^{x-5} = x - 5$ なので，底が 3 である対数を考える.

$3^{x-5} > 0$ なので，

$$3^{x-5} < 7 \iff \log_3 3^{x-5} < \log_3 7$$

$a > 1$ のとき，　$r < s \iff \log_a r < \log_a s$.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く.

各実数 x について $\log_3 3^{x-5} = x - 5$ なので，底が 3 である対数を考える. $3^{x-5} > 0$ なので，

$$3^{x-5} < 7 \iff \log_3 3^{x-5} < \log_3 7 \iff x - 5 < \log_3 7$$

例 変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く.

各実数 x について $\log_3 3^{x-5} = x-5$ なので, 底が 3 である対数を考える. $3^{x-5} > 0$ なので,

$$3^{x-5} < 7 \iff \log_3 3^{x-5} < \log_3 7 \iff x-5 < \log_3 7$$

$$\iff x < 5 + \log_3 7 \ .$$

例 変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く.

各実数 x について $\log_3 3^{x-5} = x - 5$ なので，底が 3 である対数を考える.
$3^{x-5} > 0$ なので，

$$3^{x-5} < 7 \iff \log_3 3^{x-5} < \log_3 7 \iff x - 5 < \log_3 7$$

$$\iff x < 5 + \log_3 7 \ .$$

与えられた不等式 $3^{x-5} < 7$ を解くと $x < 5 + \log_3 7$. 終

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く.

各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} =$ なので,

$\boxed{例}$ 変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く.

各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} = 2x - 5$ なので，底が 7 である対数を考える.

$$\log_a a^p = p$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く.

各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} = 2x - 5$ なので，底が 7 である対数を考える. $7^{2x-5} > 0$ なので，与えられた不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ より，

$$\log_7 7^{2x-5} \leq \log_7 63 \ ,$$

$a > 1$ のとき， $r \leq s \iff \log_a r \leq \log_a s$.

例 変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く.

各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} = 2x-5$ なので，底が 7 である対数を考える. $7^{2x-5} > 0$ なので，与えられた不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ より,

$$\log_7 7^{2x-5} \leq \log_7 63 \ ,$$

$$2x-5 \leq \log_7 63 \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く.

各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} = 2x-5$ なので，底が 7 である対数を考える. $7^{2x-5} > 0$ なので，与えられた不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ より，

$$\log_7 7^{2x-5} \leq \log_7 63 \ ,$$

$$2x-5 \leq \log_7 63 \ ,$$

$$2x \leq 5 + \log_7 63 \ ,$$

$$x \leq \frac{5+\log_7 63}{2} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く.

各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} = 2x-5$ なので，底が 7 である対数を考える. $7^{2x-5} > 0$ なので，与えられた不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ より,

$$\log_7 7^{2x-5} \leq \log_7 63 \ ,$$

$$2x-5 \leq \log_7 63 \ ,$$

$$2x \leq 5 + \log_7 63 \ ,$$

$$x \leq \frac{5+\log_7 63}{2} \ .$$

更に

$$\frac{5+\log_7 63}{2} = \frac{5+\log_7 (7 \cdot 3^2)}{2} = \frac{5+1+2\log_7 3}{2} = 3 + \log_7 3 \ .$$

例 変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く.

各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} = 2x-5$ なので，底が 7 である対数を考える. $7^{2x-5} > 0$ なので，与えられた不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ より，

$$\log_7 7^{2x-5} \leq \log_7 63 \ ,$$

$$2x-5 \leq \log_7 63 \ ,$$

$$2x \leq 5 + \log_7 63 \ ,$$

$$x \leq \frac{5+\log_7 63}{2} \ .$$

更に

$$\frac{5+\log_7 63}{2} = \frac{5+\log_7(7\cdot 3^2)}{2} = \frac{5+1+2\log_7 3}{2} = 3+\log_7 3 \ .$$

故に与えられた不等式を解くと $x \leq 3+\log_7 3$. 終

$\boxed{問 9.5.1}$ 変数 x に関する不等式 $5^{2x-4} < 45$ を解け.

$0 < 5^{2x-4}$ なので，与えられた不等式 $5^{2x-4} < 45$ より，

$\boxed{問 9.5.1}$ 変数 x に関する不等式 $5^{2x-4} < 45$ を解け.

$0 < 5^{2x-4}$ なので, 与えられた不等式 $5^{2x-4} < 45$ より,

$$\begin{aligned}
\log_5 5^{2x-4} &< \log_5 45 \ , \\
2x - 4 &< \log_5 45 \ , \\
2x &< 4 + \log_5 45 \ , \\
x &< \frac{4 + \log_5 45}{2} \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{問 9.5.1}$ 変数 x に関する不等式 $5^{2x-4} < 45$ を解け.

$0 < 5^{2x-4}$ なので，与えられた不等式 $5^{2x-4} < 45$ より,

$$\log_5 5^{2x-4} < \log_5 45 \ ,$$

$$2x - 4 < \log_5 45 \ ,$$

$$2x < 4 + \log_5 45 \ ,$$

$$x < \frac{4 + \log_5 45}{2} \ .$$

更に

$$\frac{4 + \log_5 45}{2} = \frac{4 + \log_5 (3^2 \cdot 5)}{2} = \frac{4 + 2\log_5 3 + \log_5 5}{2} = \frac{5 + 2\log_5 3}{2}$$
$$= \frac{5}{2} + \log_5 3 \ .$$

故に与えられた不等式を解くと $x < \dfrac{5}{2} + \log_5 3$. $\boxed{終}$

変数を含む式を真数とする対数の式を含む不等式を解く．前述の定理を用いる．

定理　実数 a について $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする．

(1)　$a > 1$ のとき，正の任意の実数 r と s とについて，

$$\log_a r < \log_a s \iff r < s \ ,$$

$$\log_a r \leq \log_a s \iff r \leq s \ ;$$

(2)　$0 < a < 1$ のとき，正の任意の実数 r と s とについて，

$$\log_a r > \log_a s \iff r < s \ ,$$

$$\log_a r \geq \log_a s \iff r \leq s \ .$$

不等式の両辺が底が同じ一つの対数の式であるとき対数記号を外すことができる．

不等式の中に変数 x を含む式 $f(x)$ を真数とする対数の式 $\log_a f(x)$ が現れるとき，次のことに注意せよ：

$$\text{対数の式 } \log_a f(x) \text{ の真数 } f(x) \text{ は正である；}$$

従って，その不等式が成り立つためには $f(x) > 0$ でなければならない．このことを真数条件という．

$\boxed{例}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6) < 2$ を解く.

例 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6) < 2$ を解く.

対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$, よって $x>\dfrac{6}{5}$.

まず対数の式の真数が正になる条件(真数条件)を考える.

例 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く.

対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$, よって $x>\dfrac{6}{5}$. 与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ について, 右辺は $2=\log_3 \quad =\log_3 \quad$ なので,

右辺も底が 3 である一つの対数の式にする.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く.

対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$, よって $x>\dfrac{6}{5}$. 与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ について, 右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので,

$p=\log_a a^p$

例 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く.

対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$, よって $x>\dfrac{6}{5}$. 与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ について, 右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので,

$$\log_3(5x-6)<2 \iff \log_3(5x-6)<\log_3 9$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く.

対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$, よって $x>\dfrac{6}{5}$. 与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ について，右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\begin{aligned}\log_3(5x-6)<2 &\iff \log_3(5x-6)<\log_3 9\\ &\iff 5x-6<9\end{aligned}$$

$a>1$ のとき， $\log_a r<\log_a s \iff r<s$.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く.

　対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$，よって $x>\dfrac{6}{5}$．与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ について，右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\begin{aligned}\log_3(5x-6)<2 &\iff \log_3(5x-6)<\log_3 9\\ &\iff 5x-6<9 \iff 5x<15\end{aligned}$$

例 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く.

対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$ ，よって $x>\dfrac{6}{5}$. 与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ について，右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\begin{aligned}\log_3(5x-6)<2 &\iff \log_3(5x-6)<\log_3 9\\ &\iff 5x-6<9 \iff 5x<15\\ &\iff x<3\ .\end{aligned}$$

例 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6) < 2$ を解く.

対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$, よって $x>\dfrac{6}{5}$. 与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ について, 右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので,

$$\begin{aligned}\log_3(5x-6)<2 &\iff \log_3(5x-6)<\log_3 9\\ &\iff 5x-6<9 \iff 5x<15\\ &\iff x<3\ .\end{aligned}$$

故に, 与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解くと, $x>\dfrac{6}{5}$ かつ $x<3$, つまり $\dfrac{6}{5}<x<3$. 終

例 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ を解く.

例 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7)>2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $3x+7>0$ ，よって $x>-\dfrac{7}{3}$.

まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える.

例 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7)>2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $3x+7>0$, よって $x>-\dfrac{7}{3}$. 与えられた不等式 $\log_5(3x+7)>2$ について, 右辺は $2=\log_5\ \ \ =\log_5\ \ \ $ なので,

右辺も底が 5 である一つの対数の式にする.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $3x+7>0$,よって $x > -\dfrac{7}{3}$. 与えられた不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ について,右辺は $2 = \log_5 5^2 = \log_5 25$ なので,

$$p = \log_a a^p$$

例 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7)>2$ を解く.

対数の式の真数は正なので， $3x+7>0$ ，よって $x>-\dfrac{7}{3}$. 与えられた不等式 $\log_5(3x+7)>2$ について，右辺は $2=\log_5 5^2=\log_5 25$ なので，

$$\log_5(3x+7)>\log_5 25 \ ,$$

例 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7)>2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $3x+7>0$, よって $x>-\dfrac{7}{3}$. 与えられた不等式 $\log_5(3x+7)>2$ について, 右辺は $2=\log_5 5^2=\log_5 25$ なので,

$$\log_5(3x+7)>\log_5 25\ ,$$

$$3x+7>25\ ,$$

$a>1$ のとき, $\log_a r>\log_a s \iff r>s$.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $3x+7>0$, よって $x > -\dfrac{7}{3}$. 与えられた不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ について, 右辺は $2 = \log_5 5^2 = \log_5 25$ なので,

$$\log_5(3x+7) > \log_5 25 \ ,$$

$$3x+7 > 25 \ ,$$

$$3x > 18 \ ,$$

$$x > 6 \ .$$

例 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので， $3x+7>0$ ，よって $x>-\frac{7}{3}$. 与えられた不等式 $\log_5(3x+7)>2$ について，右辺は $2=\log_5 5^2=\log_5 25$ なので，

$$\log_5(3x+7) > \log_5 25 \ ,$$

$$3x+7 > 25 \ ,$$

$$3x > 18 \ ,$$

$$x > 6 \ .$$

故に，与えられた不等式を解くと， $x>-\frac{7}{3}$ かつ $x>6$ ，つまり $x>6$.

終

$\boxed{問9.5.2}$ 変数 k に関する不等式 $3 - \log_2(5k-2) \geq 0$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $\qquad > 0$, よって $k \qquad$. 与えられた不等式 $3 - \log_2(5k-2) \geq 0$ より,

$$\log_2(5k-2) \qquad 3 = \log_2 \qquad = \log_2 \qquad ,$$

$\boxed{\text{問}9.5.2}$ 変数 k に関する不等式 $3 - \log_2(5k-2) \geq 0$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $5k-2>0$, よって $k > \dfrac{2}{5}$. 与えられた不等式 $3 - \log_2(5k-2) \geq 0$ より,

$$\log_2(5k-2) \leq 3 = \log_2 2^3 = \log_2 8 \ ,$$

$$5k-2 \leq 8$$

$$k \leq 2 \ .$$

故に, 与えられた不等式を解くと, $k > \dfrac{2}{5}$ かつ $k \leq 2$, つまり $\dfrac{2}{5} < k \leq 2$.

$\boxed{\text{終}}$

例 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く.

例 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $2a-5>0$, よって $a>\dfrac{5}{2}$.

まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える.

例 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $2a-5>0$, よって $a>\dfrac{5}{2}$. 与えられた不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ より

$$\log_9(2a-5) \leq \frac{1}{2} .$$

例 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $2a-5>0$, よって $a>\dfrac{5}{2}$. 与えられた不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ より

$$\log_9(2a-5) \leq \frac{1}{2}\ .$$

この不等式の右辺は $\dfrac{1}{2}=\log_9 \qquad =\log_9 \qquad\qquad =\log_9 \qquad$ なので,

右辺も底が 9 である一つの対数の式にする.

例 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $2a-5>0$, よって $a>\dfrac{5}{2}$. 与えられた不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ より

$$\log_9(2a-5) \leq \frac{1}{2} \ .$$

この不等式の右辺は $\dfrac{1}{2}=\log_9 9^{\frac{1}{2}}=\log_9(3^2)^{\frac{1}{2}}=\log_9 3$ なので,

$p=\log_a a^p$

例 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $2a-5>0$, よって $a>\dfrac{5}{2}$. 与えられた不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ より

$$\log_9(2a-5) \leq \frac{1}{2} \ .$$

この不等式の右辺は $\dfrac{1}{2}=\log_9 9^{\frac{1}{2}}=\log_9(3^2)^{\frac{1}{2}}=\log_9 3$ なので,

$$\log_9(2a-5) \leq \log_9 3 \ ,$$

$\boxed{例}$ 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $2a-5>0$, よって $a>\dfrac{5}{2}$. 与えられた不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ より

$$\log_9(2a-5) \leq \frac{1}{2} \ .$$

この不等式の右辺は $\dfrac{1}{2}=\log_9 9^{\frac{1}{2}}=\log_9(3^2)^{\frac{1}{2}}=\log_9 3$ なので,

$$\log_9(2a-5) \leq \log_9 3 \ ,$$

$$2a-5 \leq 3 \ ,$$

$a>1$ のとき, $\log_a r \leq \log_a s \iff r \leq s$.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $2a-5>0$, よって $a>\dfrac{5}{2}$. 与えられた不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ より

$$\log_9(2a-5) \leq \frac{1}{2} .$$

この不等式の右辺は $\dfrac{1}{2}=\log_9 9^{\frac{1}{2}}=\log_9(3^2)^{\frac{1}{2}}=\log_9 3$ なので,

$$\log_9(2a-5) \leq \log_9 3 ,$$

$$2a-5 \leq 3 ,$$

$$2a \leq 8 ,$$

$$a \leq 4 .$$

例 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $2a-5>0$, よって $a>\dfrac{5}{2}$. 与えられた不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ より

$$\log_9(2a-5) \leq \frac{1}{2} \ .$$

この不等式の右辺は $\dfrac{1}{2}=\log_9 9^{\frac{1}{2}}=\log_9(3^2)^{\frac{1}{2}}=\log_9 3$ なので,

$$\log_9(2a-5) \leq \log_9 3 \ ,$$

$$2a-5 \leq 3 \ ,$$

$$2a \leq 8 \ ,$$

$$a \leq 4 \ .$$

故に, 与えられた不等式を解くと, $a>\dfrac{5}{2}$ かつ $a \leq 4$, つまり $\dfrac{5}{2}<a \leq 4$.

終

$\boxed{問 9.5.3}$ 変数 x に関する不等式 $3\log_8(5x-11) \geq 2$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $\qquad > 0$, よって $x \qquad$. 与えられた不等式 $3\log_8(5x-11) \geq 2$ より,

$$\log_8(5x-11) \geq \quad = \log_8 \quad = \log_8 \qquad = \log_8 \quad = \log_8 \quad ,$$

$\boxed{\text{問}9.5.3}$ 変数 x に関する不等式 $3\log_8(5x-11) \geq 2$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $5x-11>0$, よって $x>\dfrac{11}{5}$. 与えられた不等式 $3\log_8(5x-11) \geq 2$ より,

$$\log_8(5x-11) \geq \frac{2}{3} = \log_8 8^{\frac{2}{3}} = \log_8 (2^3)^{\frac{2}{3}} = \log_8 2^2 = \log_8 4 \ ,$$

$$5x-11 \geq 4 \ .$$

$$5x \geq 15 \ .$$

$$x \geq 3 \ .$$

故に, 与えられた不等式を解くと, $x>\dfrac{11}{5}$ かつ $x \geq 3$, つまり $x \geq 3$. $\boxed{\text{終}}$

実数 a について $0 < a < 1$ のとき，任意の正の実数 r と s とについて，

$$\log_a r < \log_a s \iff r > s \ ,$$

$$\log_a r \leq \log_a s \iff r \geq s \ .$$

対数の式の底 a が 1 より小さいときは，両辺から対数記号 $\log_a$ を外すと不等号の向きが逆になる.

例 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > 2$ を解く.

例 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $2y-1>0$, よって $y>\dfrac{1}{2}$.

まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える.

例 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $2y-1>0$, よって $y > \frac{1}{2}$. 与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) \geq 2$ について, 右辺は $2 = \log_{\frac{1}{2}} \qquad = \log_{\frac{1}{2}} \qquad$ なので,

右辺も底が $\frac{1}{2}$ である一つの対数の式にする.

例 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $2y-1>0$, よって $y > \dfrac{1}{2}$. 与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) \geq 2$ について, 右辺は $2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}$ なので,

$p = \log_a a^p$

例 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $2y-1>0$, よって $y>\dfrac{1}{2}$. 与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) \geq 2$ について, 右辺は $2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}$ なので,

$$\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} ,$$

例 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > 2$ を解く.

　対数の式の真数は正なので, $2y-1>0$, よって $y > \dfrac{1}{2}$. 与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) \geq 2$ について, 右辺は $2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}$ なので,

$$\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} \ ,$$

$$2y-1 < \frac{1}{4} \ ,$$

$0<a<1$ のとき, $\log_a r < \log_a s \iff r > s$, 対数記号を外すと不等号の向きが逆になる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $2y-1>0$, よって $y > \dfrac{1}{2}$. 与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) \geq 2$ について, 右辺は $2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}$ なので,

$$\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\ ,$$

$$2y-1 < \frac{1}{4}\ ,$$

$$2y < \frac{5}{4}\ ,$$

$$y < \frac{5}{8}\ .$$

例 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)>2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $2y-1>0$, よって $y>\dfrac{1}{2}$. 与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)\geq 2$ について, 右辺は $2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}$ なので,

$$\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\ ,$$

$$2y-1<\frac{1}{4}\ ,$$

$$2y<\frac{5}{4}\ ,$$

$$y<\frac{5}{8}\ .$$

故に, 与えられた不等式を解くと, $y>\dfrac{1}{2}$ かつ $y<\dfrac{5}{8}$, つまり $\dfrac{1}{2}<y<\dfrac{5}{8}$.

終

$\boxed{\text{問}9.5.4}$ 変数 z に関する不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(4z-5)+2\geq 0$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $\qquad > 0$, よって $z \qquad$. 与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(4z-5)+2\geq 0$ より,

$$\log_{\frac{1}{3}}(4z-5) \qquad -2=\log_{\frac{1}{3}} \qquad\qquad =\log_{\frac{1}{3}} \qquad =\log_{\frac{1}{3}} \qquad ,$$

$\boxed{問9.5.4}$ 変数 z に関する不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(4z-5)+2 \geq 0$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $4z-5>0$, よって $z>\dfrac{5}{4}$. 与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(4z-5)+2 \geq 0$ より,

$$\log_{\frac{1}{3}}(4z-5) \geq -2 = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{3}} 3^2 = \log_{\frac{1}{3}} 9 \ ,$$

$$4z-5 \leq 9 \ ,$$

$$4z \leq 14 \ ,$$

$$z \leq \frac{7}{2}$$

故に, 与えられた不等式を解くと, $z>\dfrac{5}{4}$ かつ $z \leq \dfrac{7}{2}$, つまり $\dfrac{5}{4}<z \leq \dfrac{7}{2}$.

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く.

例 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $x+1>0$ かつ $x-7>0$, よって $x>7$.

まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える.

$\boxed{例}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $x+1>0$ かつ $x-7>0$, よって $x>7$.

与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ について, 左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\} \ ,$$

左辺を一つの対数の式にする.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $x+1>0$ かつ $x-7>0$, よって $x>7$.

与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ について, 左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\} \ ,$$

右辺は $2=\log_3 \quad =\log_3 \quad$ なので,

右辺も底が 3 である一つの対数の式にする.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $x+1>0$ かつ $x-7>0$, よって $x>7$.

与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ について, 左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\} \ ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので,

$p=\log_a a^p$

例 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $x+1>0$ かつ $x-7>0$, よって $x>7$.

与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ について, 左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\} ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので,

$$\log_3\{(x+1)(x-7)\}\leq \log_3 9 ,$$

例 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ を解く．

　対数の式の真数は正なので， $x+1>0$ かつ $x-7>0$ ，よって $x>7$ ．

与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ について，左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\} \ ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\log_3\{(x+1)(x-7)\} \leq \log_3 9 \ ,$$

$$(x+1)(x-7) \leq 9 \ ,$$

$a>1$ のとき， $\log_a r \leq \log_a s \iff r \leq s$ ．

例 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $x+1>0$ かつ $x-7>0$, よって $x>7$.

与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ について, 左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\} ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので,

$$\log_3\{(x+1)(x-7)\}\leq \log_3 9 ,$$

$$(x+1)(x-7)\leq 9 ,$$

$$x^2-6x-16\leq 0 ,$$

例 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $x+1>0$ かつ $x-7>0$, よって $x>7$.

与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ について, 左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\} ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので,

$$\log_3\{(x+1)(x-7)\}\leq \log_3 9 ,$$

$$(x+1)(x-7)\leq 9 ,$$

$$x^2-6x-16\leq 0 ,$$

$$(x+2)(x-8)\leq 0 ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $x+1>0$ かつ $x-7>0$, よって $x>7$.

与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ について, 左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\}\ ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので,

$$\log_3\{(x+1)(x-7)\}\leq\log_3 9\ ,$$

$$(x+1)(x-7)\leq 9\ ,$$

$$x^2-6x-16\leq 0\ ,$$

$$(x+2)(x-8)\leq 0\ ,$$

$$-2\leq x\leq 8\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ を解く.

対数の式の真数は正なので, $x+1>0$ かつ $x-7>0$, よって $x>7$.
与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ について, 左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\} ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので,

$$\log_3\{(x+1)(x-7)\} \leq \log_3 9 ,$$

$$(x+1)(x-7) \leq 9 ,$$

$$x^2-6x-16 \leq 0 ,$$

$$(x+2)(x-8) \leq 0 ,$$

$$-2 \leq x \leq 8 .$$

与えられた不等式を解くと, $x>7$ かつ $-2 \leq x \leq 8$ なので, $7<x \leq 8$.

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 9.5.5}$ 変数 x に関する不等式 $\log_2(x+1)+\log_2(x-3) \leq 5$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $\qquad > 0$ かつ $\qquad > 0$, よって $x > \qquad$.

与えられた不等式 $\log_2(x+1)+\log_2(x-3) \leq 5$ より,

$$\log_2\{ \qquad\qquad \} \leq \log_2 \quad = \log_2 \quad ,$$

$\boxed{問9.5.5}$ 変数 x に関する不等式 $\log_2(x+1)+\log_2(x-3) \leq 5$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $x+1>0$ かつ $x-3>0$, よって $x>3$.
与えられた不等式 $\log_2(x+1)+\log_2(x-3) \leq 5$ より,

$$\log_2\{(x+1)(x-3)\} \leq \log_2 2^5 = \log_2 32 \ ,$$

$$(x+1)(x-3) \leq 32 \ ,$$

$$x^2-2x-35 \leq 0 \ ,$$

$$(x+5)(x-7) \leq 0 \ ,$$

$$-5 \leq x \leq 7 \ .$$

$\boxed{\text{問}9.5.5}$ 変数 x に関する不等式 $\log_2(x+1)+\log_2(x-3)\leq 5$ を解け.

　対数の式の真数は正なので, $x+1>0$ かつ $x-3>0$, よって $x>3$.

与えられた不等式 $\log_2(x+1)+\log_2(x-3)\leq 5$ より,

$$\log_2\{(x+1)(x-3)\}\leq \log_2 2^5=\log_2 32\ ,$$

$$(x+1)(x-3)\leq 32\ ,$$

$$x^2-2x-35\leq 0\ ,$$

$$(x+5)(x-7)\leq 0\ ,$$

$$-5\leq x\leq 7\ .$$

与えられた不等式を解くと, $x>3$ かつ $-5\leq x\leq 7$ なので, $3<x\leq 7$.

$\boxed{\text{終}}$