9.7 対数関数との合成関数のグラフ

xy 座標平面において関数のグラフを考える．定数 a は実数で $a>0$ ，$a \neq 1$ とする．一般的に，関数 f について，

$y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと　　に関して対称である．

xy 座標平面において関数のグラフを考える．定数 a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする．一般的に，関数 f について，

$y = -f(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である．

xy 座標平面において関数のグラフを考える．定数 a は実数で $a>0$ ，$a \neq 1$ とする．一般的に，関数 f について，

$y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である．

ここで $f(x)=\log_a x$ とおく． $-f(x)=-\log_a x$ なので，

$y=-\log_a x$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフと x 軸に関して対称である．

xy 座標平面において関数のグラフを考える．定数 a は実数で $a>0$ ，$a \neq 1$ とする．一般的に，関数 f について，

$y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である．

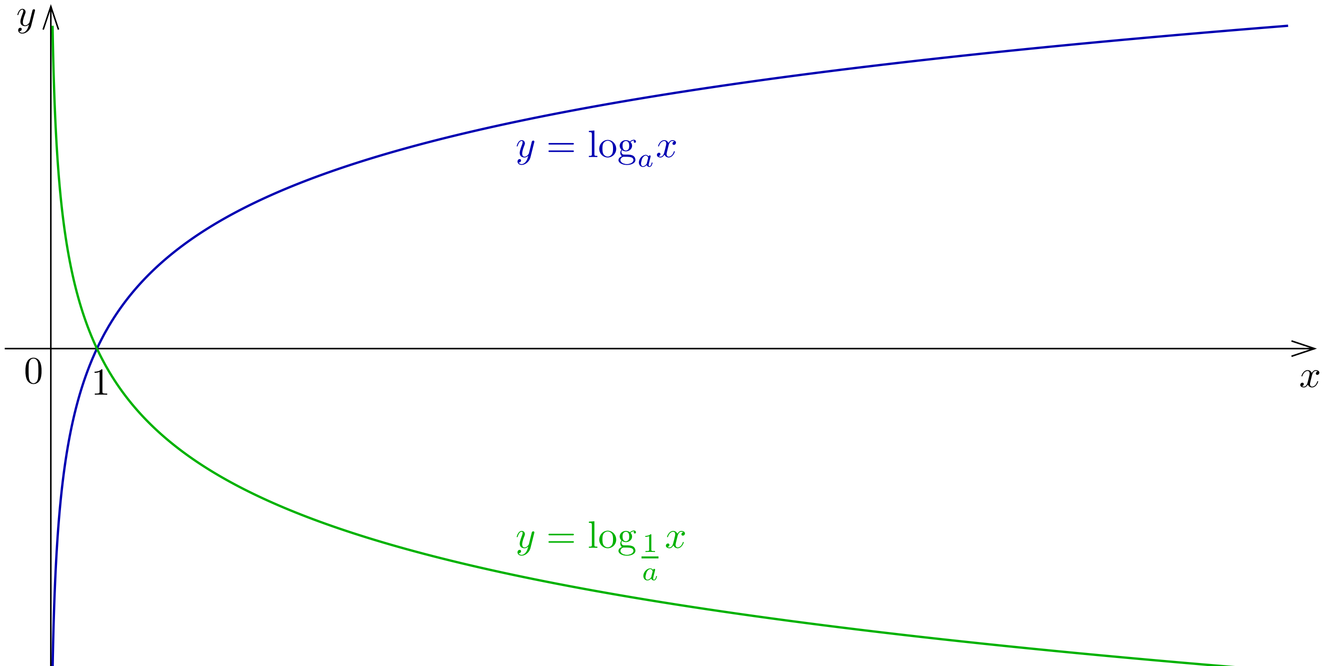
ここで $f(x)=\log_a x$ とおく． $-f(x)=-\log_a x$ なので，

$y=-\log_a x$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフと x 軸に関して対称である．

対数の底の変換公式より $\log_{\frac{1}{a}} x=\dfrac{\log_a x}{\log_a \dfrac{1}{a}}=\dfrac{\log_a x}{-1}=-\log_a x$ なので，

$y=\log_{\frac{1}{a}} x$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフと x 軸に関して対称である．

$y=\log_{\frac{1}{a}}x$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフと x 軸に関して対称である.
例えば $a>1$ のとき次のようになる.



対数関数との合成関数のグラフを考える.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $y=\log_2(4x-12)$ のグラフを描く；またその漸近線を表す方程式を求める.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(3, \infty)$ である関数 $y = \log_2(4x - 12)$ のグラフを描く；またその漸近線を表す方程式を求める.

変数 t を $t = 4x - 12$ とおく.

$$x = \frac{t + 12}{4} = \frac{t}{4} + 3 \ .$$

例 xy 座標平面において定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $y=\log_2(4x-12)$ のグラフを描く；またその漸近線を表す方程式を求める.

変数 t を $t=4x-12$ とおく.

$x=\dfrac{t+12}{4}=\dfrac{t}{4}+3$.　$y=\log_2(4x-12)$

つまり $y=\log_2 t$ より $t=2^y$.

例 xy 座標平面において定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $y=\log_2(4x-12)$ のグラフを描く；またその漸近線を表す方程式を求める.

変数 t を $t=4x-12$ とおく.

$x=\dfrac{t+12}{4}=\dfrac{t}{4}+3$ ． $y=\log_2(4x-12)$ つまり $y=\log_2 t$ より $t=2^y$ ． y の値に対する $t=2^y$ の値と $x=\dfrac{t}{4}+3$ の値との対応を調べると

y	$t=2^y$	$x=\dfrac{t}{4}+3$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

$\boxed{例}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(3, \infty)$ である関数 $y = \log_2(4x-12)$ のグラフを描く；またその漸近線を表す方程式を求める.

変数 t を $t = 4x - 12$ とおく.

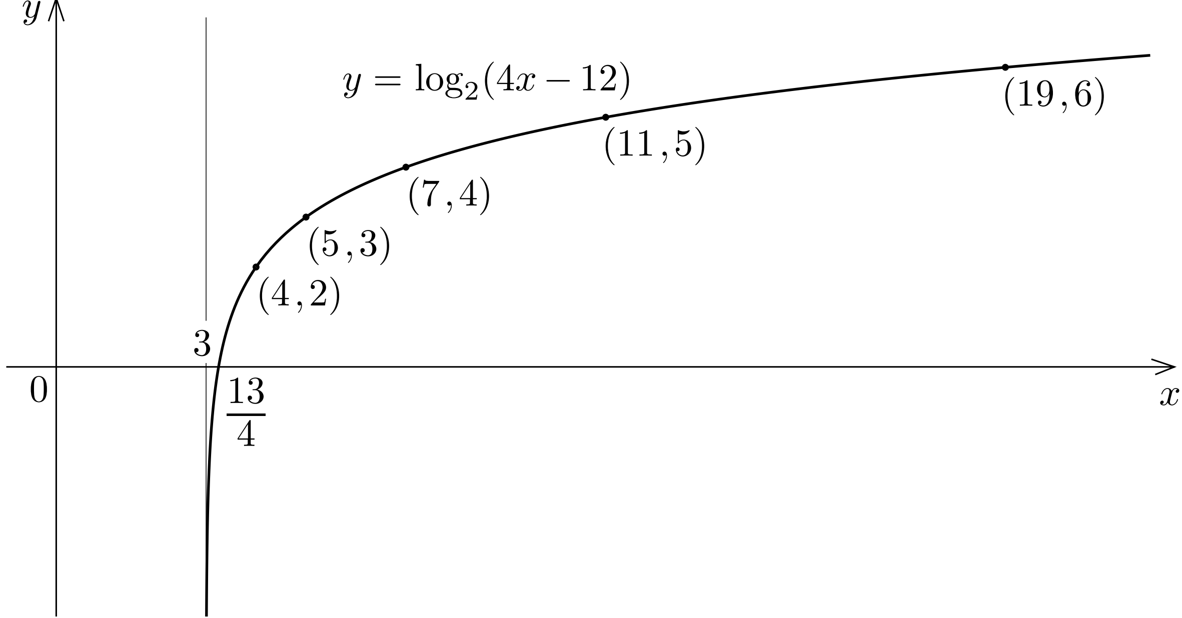
$x = \dfrac{t+12}{4} = \dfrac{t}{4} + 3$.　$y = \log_2(4x-12)$ つまり $y = \log_2 t$ より $t = 2^y$.　y の値に対する $t = 2^y$ の値と $x = \dfrac{t}{4} + 3$ の値との対応を調べると右の表のようになる.

y	$t = 2^y$	$x = \dfrac{t}{4} + 3$
0	1	$\dfrac{13}{4}$
1	2	$\dfrac{7}{2}$
2	4	4
3	8	5
4	16	7
5	32	11
6	64	19

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $y=\log_2(4x-12)$ のグラフを描く；またその漸近線を表す方程式を求める.

変数 t を $t=4x-12$ とおく.
$x=\dfrac{t+12}{4}=\dfrac{t}{4}+3$. $y=\log_2(4x-12)$ つまり $y=\log_2 t$ より $t=2^y$. y の値に対する $t=2^y$ の値と $x=\dfrac{t}{4}+3$ の値との対応を調べると右の表のようになる. 定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $y=\log_2(4x-12)$ のグラフは次のようになる.

y	$t=2^y$	$x=\dfrac{t}{4}+3$
0	1	$\dfrac{13}{4}$
1	2	$\dfrac{7}{2}$
2	4	4
3	8	5
4	16	7
5	32	11
6	64	19



定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $y=\log_2(4x-12)$ のグラフの漸近線は方程式 $x=3$ で表される直線である. 終

$\boxed{\text{問}9.7.1}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(-2,\infty)$ である関数 $y=\log_3(9x+18)$ のグラフを描け；またその漸近線を表す方程式を求めよ．

変数 t を $t=$ とおく．

$x=$ $=$ ． $y=\log_3(9x+18)$ より $y=\log_3 t$ なので $t=$ ． y の値に対する $t=$ の値と $x=$ の値との対応は右の表のようになる．この表より関数 $y=\log_3(9x+18)$ のグラフは以下のようになる．漸近線を表す方程式は， $t=0$ つまり $=0$ なので， $x=$ である．

y	$t=$	$x=$
0		
1		
2		
3		
4		
5		

問9.7.1 xy 座標平面において定義域が区間 $(-2,\infty)$ である関数 $y=\log_3(9x+18)$ のグラフを描け；またその漸近線を表す方程式を求めよ.

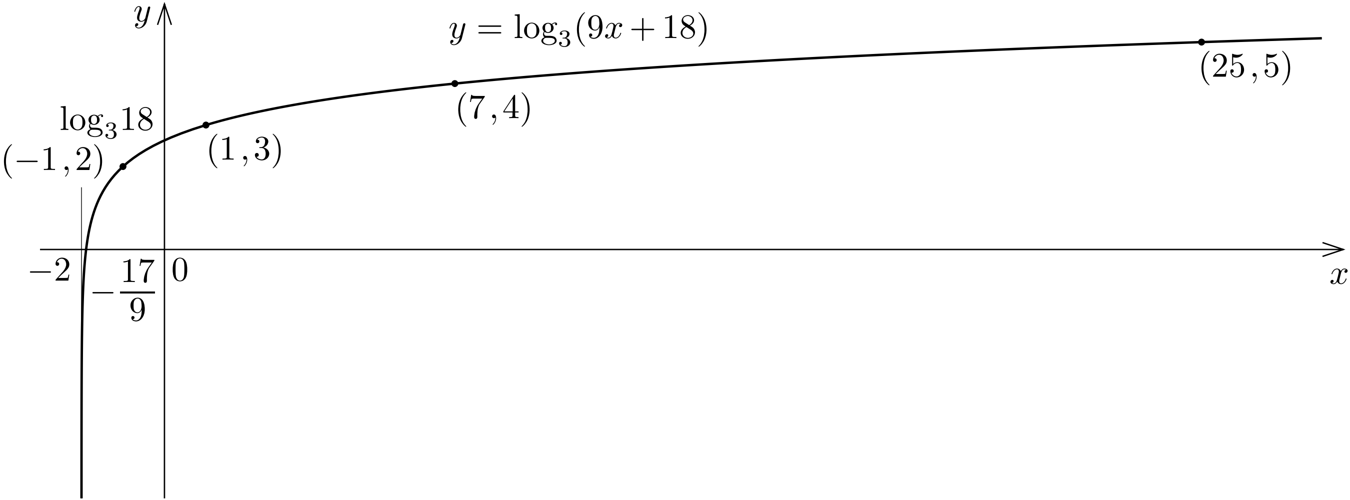
変数 t を $t=9x+18$ とおく.
$x=\dfrac{t-18}{9}=\dfrac{t}{9}-2$ ． $y=\log_3(9x+18)$ より $y=\log_3 t$ なので $t=3^y$ ． y の値に対する $t=3^y$ の値と $x=\dfrac{t}{9}-2$ の値との対応は右の表のようになる．この表より関数 $y=\log_3(9x+18)$ のグラフは以下のようになる．漸近線を表す方程式は， $t=0$ つまり $=0$ なので， $x=$ である.

y	$t=3^y$	$x=\dfrac{t}{9}-2$
0		
1		
2		
3		
4		
5		

$\boxed{\text{問}9.7.1}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(-2,\infty)$ である関数 $y=\log_3(9x+18)$ のグラフを描け；またその漸近線を表す方程式を求めよ.

変数 t を $t=9x+18$ とおく. $x=\dfrac{t-18}{9}=\dfrac{t}{9}-2$. $y=\log_3(9x+18)$ より $y=\log_3 t$ なので $t=3^y$. y の値に対する $t=3^y$ の値と $x=\dfrac{t}{9}-2$ の値との対応は右の表のようになる. この表より関数 $y=\log_3(9x+18)$ のグラフは以下のようになる. 漸近線を表す方程式は, $t=0$ つまり $9x+18=0$ なので, $x=-2$ である.

y	$t=3^y$	$x=\dfrac{t}{9}-2$
0	1	$-\dfrac{17}{9}$
1	3	$-\dfrac{5}{3}$
2	9	-1
3	3^3	1
4	3^4	7
5	3^5	25


$y = \log_3(9x+18)$
y
x
$(25\,,5)$
$(7\,,4)$
$\log_3 18$
$(1\,,3)$
$(-1\,,2)$
-2
$-\frac{17}{9}$
0

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{80}{9}, 18\right]$ である関数 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4$ のグラフを描く.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{80}{9}, 18\right]$ である関数
$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+9) + 4$ のグラフを描く.

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+9) + 4 = \frac{\log_3(x+9)}{\log_3 \dfrac{1}{3}} + 4 = 4 - \log_3(x+9) \ .$$

$\boxed{例}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{80}{9}, 18\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4$ のグラフを描く.

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4 = \frac{\log_3(x+9)}{\log_3 \dfrac{1}{3}}+4 = 4-\log_3(x+9) \ .$$

これより, $\log_3(x+9)=4-y=\log_3 3^{4-y}$,

$x+9=3^{4-y}$, $x=3^{4-y}-9$.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{80}{9}, 18\right]$ である関数 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4$ のグラフを描く.

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4 = \frac{\log_3(x+9)}{\log_3 \dfrac{1}{3}} + 4 = 4 - \log_3(x+9) \ .$$

これより, $\log_3(x+9) = 4-y = \log_3 3^{4-y}$,

$x+9 = 3^{4-y}$, $x = 3^{4-y}-9$. 変数 t を

$t = 4-y$ とおく. $y = 4-t$. $x = 3^t - 9$.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{80}{9}, 18\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4$ のグラフを描く.

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4 = \frac{\log_3(x+9)}{\log_3 \dfrac{1}{3}}+4 = 4-\log_3(x+9) \ .$$

これより, $\log_3(x+9)=4-y=\log_3 3^{4-y}$,

$x+9=3^{4-y}$, $x=3^{4-y}-9$. 変数 t を

$t=4-y$ とおく. $y=4-t$. $x=3^t-9$.

$-\dfrac{80}{9} \leq x \leq 18$ より, $-\dfrac{80}{9} \leq 3^t-9 \leq 18$,

$\dfrac{1}{9} \leq 3^t \leq 27$, $\log_3 \dfrac{1}{9} \leq \log_3 3^t \leq \log_3 27$,

$-2 \leq t \leq 3$.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\frac{80}{9}, 18\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4$ のグラフを描く.

$$y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4=\frac{\log_3(x+9)}{\log_3\frac{1}{3}}+4=4-\log_3(x+9)\ .$$

これより，$\log_3(x+9)=4-y=\log_3 3^{4-y}$ ，$x+9=3^{4-y}$ ，$x=3^{4-y}-9$ ．変数 t を $t=4-y$ とおく．$y=4-t$ ．$x=3^t-9$ ．$-\frac{80}{9}\leq x\leq 18$ より，$-\frac{80}{9}\leq 3^t-9\leq 18$ ，$\frac{1}{9}\leq 3^t\leq 27$ ，$\log_3\frac{1}{9}\leq \log_3 3^t\leq \log_3 27$ ，$-2\leq t\leq 3$ ．この範囲で，t の値に対する $x=3^t-9$ の値と $y=4-t$ の値との対応を調べる

t	$x=3^t-9$	$y=4-t$
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

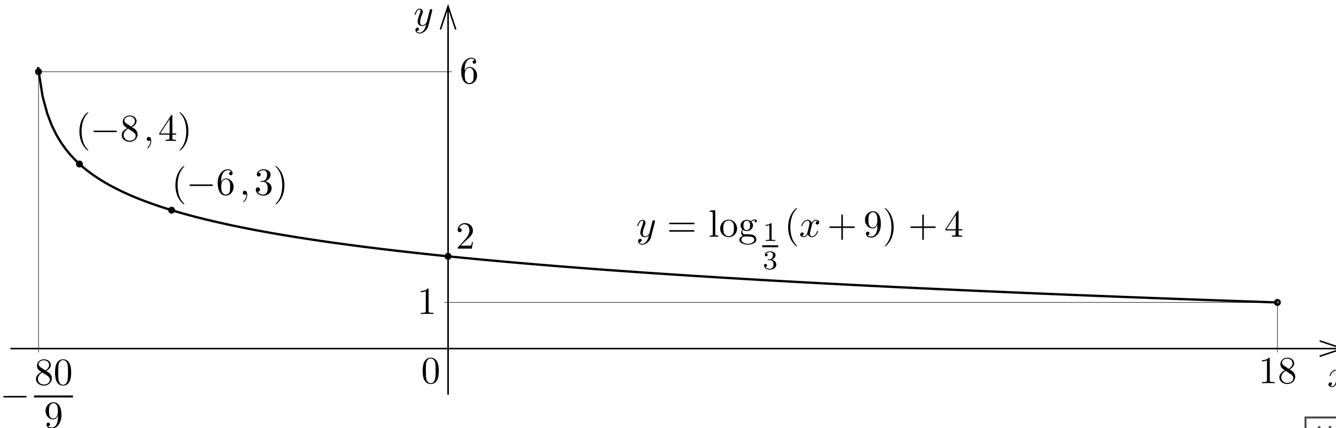
例 xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{80}{9}, 18\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4$ のグラフを描く.

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4 = \frac{\log_3(x+9)}{\log_3 \frac{1}{3}} + 4 = 4 - \log_3(x+9) \ .$$

これより, $\log_3(x+9) = 4-y = \log_3 3^{4-y}$, $x+9 = 3^{4-y}$, $x = 3^{4-y}-9$. 変数 t を $t=4-y$ とおく. $y=4-t$. $x=3^t-9$. $-\dfrac{80}{9} \leq x \leq 18$ より, $-\dfrac{80}{9} \leq 3^t - 9 \leq 18$, $\dfrac{1}{9} \leq 3^t \leq 27$, $\log_3 \dfrac{1}{9} \leq \log_3 3^t \leq \log_3 27$, $-2 \leq t \leq 3$. この範囲で, t の値に対する $x=3^t-9$ の値と $y=4-t$ の値との対応を調べると右の表のようになる.

t	$x=3^t-9$	$y=4-t$
-2	$\dfrac{1}{9}-9=-\dfrac{80}{9}$	6
-1	$\dfrac{1}{3}-9-\dfrac{26}{3}$	5
0	$1-9=-8$	4
1	$3-9=-6$	3
2	$9-9=0$	2
3	$27-9=18$	1

定義域区間 $\left[-\dfrac{80}{9}, 18\right]$ である関数 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+9)+2$ のグラフは次のようになる.



終

$\boxed{\text{問}9.7.2}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[\dfrac{33}{8}, 20\right]$ である関数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフを描け.

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1 = \frac{\log_2(\qquad)}{\log_2 \quad} + 1 = \qquad\qquad .$$

これより, $\log_2(x-4) = \qquad = \log_2 \qquad$, $x-4 = \qquad$, $x = \qquad$. 変数 t を $t = \qquad$ とおく. $y = \qquad$. $x = \qquad$. $\dfrac{33}{8} \leq x \leq 20$ より, $\dfrac{33}{8} \leq \qquad \leq 20$,

$\quad \leq 2^t \leq \quad$, $\log_2 \quad \leq \log_2 2^t \leq \log_2 \quad$,

$\quad \leq t \leq \quad$. この範囲で, t の値に対する $x = \qquad$ の値と $y = \qquad$ の値との対応を調べると右の表のようになる.

t	$x = 2^t + 4$	$y = 1 - t$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		

$\boxed{問 9.7.2}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[\frac{33}{8}, 20\right]$ である関数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフを描け.

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1 = \frac{\log_2(x-4)}{\log_2\frac{1}{2}}+1 = 1-\log_2(x-4) \ .$$

これより, $\log_2(x-4) = \qquad = \log_2 \qquad$,

$x-4 = \qquad$, $x = \qquad$. 変数 t を

$t = \qquad$ とおく. $y = \qquad$. $x = \qquad$.

$\frac{33}{8} \leq x \leq 20$ より, $\frac{33}{8} \leq \qquad \leq 20$,

$\qquad \leq 2^t \leq \qquad$, $\log_2 \qquad \leq \log_2 2^t \leq \log_2 \qquad$,

$\qquad \leq t \leq \qquad$. この範囲で, t の値に対する $x = \qquad$ の値と $y = \qquad$ の値との対応を調べると右の表のようになる.

t	$x = 2^t+4$	$y = 1-t$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		

問9.7.2 xy 座標平面において定義域が区間 $\left[\frac{33}{8}, 20\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフを描け.

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1 = \frac{\log_2(x-4)}{\log_2\frac{1}{2}}+1 = 1-\log_2(x-4) \ .$$

これより, $\log_2(x-4) = 1-y = \log_2 2^{1-y}$,

$x-4=2^{1-y}$, $x=2^{1-y}+4$. 変数 t を

$t=$ 　　　 とおく. $y=$ 　　　 . $x=$ 　　　 .

$\frac{33}{8} \leq x \leq 20$ より, $\frac{33}{8} \leq$ 　　　 ≤ 20 ,

　 $\leq 2^t \leq$ 　 , $\log_2$ 　 $\leq \log_2 2^t \leq \log_2$ 　 ,

　 $\leq t \leq$ 　 . この範囲で, t の値に対する

$x=$ 　　　 の値と $y=$ 　　　 の値との対応

を調べると右の表のようになる.

t	$x=2^t+4$	$y=1-t$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		

$\boxed{\text{問}9.7.2}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[\frac{33}{8},20\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフを描け.

$$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1=\frac{\log_2(x-4)}{\log_2\frac{1}{2}}+1=1-\log_2(x-4)\ .$$

これより, $\log_2(x-4)=1-y=\log_2 2^{1-y}$,

$x-4=2^{1-y}$, $x=2^{1-y}+4$. 変数 t を

$t=1-y$ とおく. $y=1-t$. $x=2^t+4$.

$\frac{33}{8}\leq x\leq 20$ より, $\frac{33}{8}\leq \qquad \leq 20$,

$\quad\leq 2^t\leq \quad$, $\log_2 \quad \leq\log_2 2^t\leq\log_2 \quad$,

$\quad\leq t\leq \quad$. この範囲で, t の値に対する

$x=$ の値と $y=$ の値との対応

を調べると右の表のようになる.

t	$x=2^t+4$	$y=1-t$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		

$\boxed{\text{問}9.7.2}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[\dfrac{33}{8}, 20\right]$ である関数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフを描け.

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1 = \frac{\log_2(x-4)}{\log_2\dfrac{1}{2}}+1 = 1-\log_2(x-4) \ .$$

これより, $\log_2(x-4) = 1-y = \log_2 2^{1-y}$, $x-4 = 2^{1-y}$, $x = 2^{1-y}+4$. 変数 t を $t = 1-y$ とおく. $y = 1-t$. $x = 2^t+4$. $\dfrac{33}{8} \leq x \leq 20$ より, $\dfrac{33}{8} \leq 2^t+4 \leq 20$, $\dfrac{1}{8} \leq 2^t \leq 16$, $\log_2\dfrac{1}{8} \leq \log_2 2^t \leq \log_2 16$, $-3 \leq t \leq 4$. この範囲で, t の値に対する $x =$ 　　　　の値と $y =$ 　　　　の値との対応を調べると右の表のようになる.

t	$x = 2^t+4$	$y = 1-t$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		

$\boxed{\text{問}9.7.2}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[\dfrac{33}{8}, 20\right]$ である関数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフを描け.

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1 = \frac{\log_2(x-4)}{\log_2\frac{1}{2}}+1 = 1-\log_2(x-4) \ .$$

これより, $\log_2(x-4) = 1-y = \log_2 2^{1-y}$, $x-4 = 2^{1-y}$, $x = 2^{1-y}+4$. 変数 t を $t = 1-y$ とおく. $y = 1-t$. $x = 2^t+4$. $\dfrac{33}{8} \leq x \leq 20$ より, $\dfrac{33}{8} \leq 2^t+4 \leq 20$, $\dfrac{1}{8} \leq 2^t \leq 16$, $\log_2\dfrac{1}{8} \leq \log_2 2^t \leq \log_2 16$, $-3 \leq t \leq 4$. この範囲で, t の値に対する $x = 2^t+4$ の値と $y = 1-t$ の値との対応を調べると右の表のようになる.

t	$x = 2^t+4$	$y = 1-t$
-3	$\dfrac{1}{8}+4 = \dfrac{33}{8}$	4
-2	$\dfrac{1}{4}+4 = \dfrac{17}{4}$	3
-1	$\dfrac{1}{2}+4 = \dfrac{9}{2}$	2
0	$1+4 = 5$	1
1	$2+4 = 6$	0
2	$4+4 = 8$	-1
3	$8+4 = 12$	-2
4	$16+4 = 20$	-3

定義域が区間 $\left[\dfrac{33}{8}, 20\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフは次のようになる.