9.8 常用対数

対数を表す式 $\log_a r$ の底 a は $a>0$ ，$a \neq 1$ であればよいので，対数の底にできる実数はいくらでもある．

対数を表す式 $\log_a r$ の底 a は $a > 0$ ，$a \neq 1$ であればよいので，対数の底にできる実数はいくらでもある．その中で，10 を底とする対数を一つの標準とすることがある．10 を底とする対数のことを常用対数という．

対数を表す式 $\log_a r$ の底 a は $a>0$ ，$a \neq 1$ であればよいので，対数の底にできる実数はいくらでもある．その中で，10 を底とする対数を一つの標準とすることがある．10 を底とする対数のことを常用対数という．例えば 2 及び 3 の常用対数の近似値は各々次のようになる：

$$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010 \ , \qquad \log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771 \ .$$

対数を表す式 $\log_a r$ の底 a は $a > 0$ ，$a \neq 1$ であればよいので，対数の底にできる実数はいくらでもある．その中で，10 を底とする対数を一つの標準とすることがある．10 を底とする対数のことを常用対数という．例えば 2 及び 3 の常用対数の近似値は各々次のようになる：

$$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010 \ , \qquad \log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771 \ .$$

工学で用いられる対数は多くの場合常用対数である．それで，関数電卓では，“$\log$” は通常は常用対数を意味する；つまり “$\log$” は “$\log_{10}$” のことである．

常用対数が計算できるとき，常用対数以外の対数の値を求めるためには底の変換公式を用いる：実数 a, b について，$a > 0$ ，$a \neq 1$ ，$b > 0$ のとき

$$\log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} \ .$$

常用対数が計算できるとき，常用対数以外の対数の値を求めるためには底の変換公式を用いる：実数 a, b について，$a > 0$ ，$a \neq 1$ ，$b > 0$ のとき

$$\log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} \ .$$

例えば，$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$ と $\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.4771$ とより，

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \fallingdotseq \frac{0.4771}{0.3010} \fallingdotseq 1.585 \ .$$

例 $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ であることを用いて $\log_{10}800$ の近似値を求める.

$\boxed{\text{例}}$ $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ であることを用いて $\log_{10}800$ の近似値を求める.

$$\begin{aligned}\log_{10}800 &= \log_{10}(2^3 \times 10^2) = \log_{10}2^3 + \log_{10}10^2 \\ &= 3\log_{10}2 + 2 \fallingdotseq 3 \times 0.3010 + 2 \\ &= 2.9030 \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}9.8.1}$ $\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$ であることを用いて $\log_{10}9000$ の近似値を求めよ.

問9.8.1 $\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$ であることを用いて $\log_{10}9000$ の近似値を求めよ.

$$\begin{aligned}\log_{10}9000 &= \log_{10}(3^2 \times 10^3) = \log_{10}3^2 + \log_{10}10^3 \\ &= 2\log_{10}3 + 3 \fallingdotseq 2 \times 0.4771 + 3 \\ &= 3.9542 \ .\end{aligned}$$

終

例 $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ であることを用いて $\log_{10}50$ の近似値を求める.

$$\begin{aligned}\log_{10}50 &= \log_{10}\frac{100}{2} = \log_{10}10^2 - \log_{10}2 \fallingdotseq 2 - 0.3010 \\ &= 1.6990\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問9.8.2}$ $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ であることを用いて $\log_{10}250$ の近似値を求めよ.

$\boxed{問 9.8.2}$ $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ であることを用いて $\log_{10}250$ の近似値を求めよ.

$$\log_{10}250 = \log_{10}\frac{1000}{4} = \log_{10}10^3 - \log_{10}2^2 \fallingdotseq 3 - 2 \times 0.3010$$
$$= 2.3980 \ .$$

$\boxed{終}$

例 $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ ， $\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$ であることを用いて $\log_{10}120$ の近似値を求める.

$\boxed{\text{例}}$ $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$, $\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$ であることを用いて $\log_{10}120$ の近似値を求める.

$$
\begin{aligned}
\log_{10}120 &= \log_{10}(2^2 \times 3 \times 10) = 2\log_{10}2 + \log_{10}3 + \log_{10}10 \\
&\fallingdotseq 2 \times 0.3010 + 0.4771 + 1 \\
&= 2.0791 \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問9.8.3}$ $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ ， $\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$ であることを用いて $\log_{10}15$ の近似値を求めよ.

$\boxed{問9.8.3}$ $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ ， $\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$ であることを用いて $\log_{10}15$ の近似値を求めよ．

$$\begin{aligned}\log_{10}15 &= \log_{10}\frac{3\times 10}{2} = \log_{10}3 + \log_{10}10 - \log_{10}2 \fallingdotseq 0.4771 + 1 - 0.3010 \\ &= 1.1761 \ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 2 の常用対数を $\dfrac{3}{10}$ で近似し，3 の常用対数を $\dfrac{19}{40}$ で近似するとき，$\log_3 200$ を近似する既約分数を求める．

例 2 の常用対数を $\dfrac{3}{10}$ で近似し，3 の常用対数を $\dfrac{19}{40}$ で近似するとき，$\log_3 200$ を近似する既約分数を求める.

底の変換公式を用いて $\log_3 200$ を常用対数で表す.

$$\log_3 200 = \frac{\log_{10} 200}{\log_{10} 3} = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 100}{\log_{10} 3} \fallingdotseq \frac{\dfrac{3}{10} + 2}{\dfrac{19}{40}}$$

$$= \frac{92}{19} .$$

終

$\boxed{\text{問}9.8.4}$ 2 の常用対数の値を $\dfrac{3}{10}$ で近似し，3 の常用対数の値を $\dfrac{19}{40}$ で近似するとき，$\log_2 9000$ を近似する既約分数を求めよ．

$\boxed{\text{問}9.8.4}$ 2 の常用対数の値を $\dfrac{3}{10}$ で近似し，3 の常用対数の値を $\dfrac{19}{40}$ で近似するとき，$\log_2 9000$ を近似する既約分数を求めよ．

$$\begin{aligned}\log_2 9000 &= \frac{\log_{10} 9000}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 3^2 + \log_{10} 10^3}{\log_{10} 2} \\ &= \frac{2\log_{10} 3 + 3}{\log_{10} 2} \fallingdotseq \frac{2\cdot\dfrac{19}{40} + 3}{\dfrac{3}{10}} = \frac{38 + 120}{12} \\ &= \frac{79}{6} \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

正の実数 r について，r の整数部分とは，r 以下である最大の整数のことである．言い替えると，r の整数部分とは，r を小数で表して小数点以下を切り捨てて得られる整数のことである．

正の実数 r について，r の整数部分とは，r 以下である最大の整数のことである．言い替えると，r の整数部分とは，r を小数で表して小数点以下を切り捨てて得られる整数のことである．例えば，

7 の各々の整数部分は 7 であり，

6.34 の各々の整数部分は 6 であり，

$\dfrac{43}{5}$ の整数部分は 8 であり，

$\sqrt{82}$ の整数部分は 9 である．

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数 r の整数部分が 4 桁であることは，r が 1000 以上 10000 未満ということである：

$$
\begin{aligned}
r \text{ の整数部分が } 4 \text{ 桁である} \quad &\iff \quad 1000 \leq r < 10000 \\
&\iff \quad 10^3 \leq r < 10^4 \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数 r の整数部分が 4 桁であることは, r が 1000 以上 10000 未満ということである:

$$r\text{ の整数部分が }4\text{ 桁である} \iff 1000 \leq r < 10000$$
$$\iff 10^3 \leq r < 10^4 \ .$$

ここで各辺の常用対数をとる.

$$10^3 \leq r < 10^4 \iff \log_{10}10^3 \leq \log_{10}r < \log_{10}10^4 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数 r の整数部分が 4 桁であることは，r が 1000 以上 10000 未満ということである：

$$r \text{ の整数部分が } 4 \text{ 桁である} \iff 1000 \leq r < 10000$$
$$\iff 10^3 \leq r < 10^4 \ .$$

ここで各辺の常用対数をとる.

$$10^3 \leq r < 10^4 \iff \log_{10}10^3 \leq \log_{10}r < \log_{10}10^4 \ .$$

$\log_{10}10^3 = 3$ ，$\log_{10}10^4 = 4$ なので，

$$10^3 \leq r < 10^4 \iff 3 \leq \log_{10}r < 4 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数 r の整数部分が 4 桁であることは, r が 1000 以上 10000 未満ということである：

$$\begin{aligned} r \text{ の整数部分が } 4 \text{ 桁である} \quad &\Longleftrightarrow \quad 1000 \leq r < 10000 \\ &\Longleftrightarrow \quad 10^3 \leq r < 10^4 \ . \end{aligned}$$

ここで各辺の常用対数をとる.

$$10^3 \leq r < 10^4 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_{10} 10^3 \leq \log_{10} r < \log_{10} 10^4 \ .$$

$\log_{10} 10^3 = 3$, $\log_{10} 10^4 = 4$ なので,

$$10^3 \leq r < 10^4 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 \leq \log_{10} r < 4 \ .$$

こうして次のことが分かる：正の実数 r について,

$$r \text{ の整数部分が } 4 \text{ 桁である} \quad \Longleftrightarrow \quad 3 \leq \log_{10} r < 4 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

一般的に次のようになる：正の自然数 n 及び正の実数 r について，

$$
\begin{aligned}
r \text{ の整数部分が } n \text{ 桁である} \quad &\Longleftrightarrow \quad 10^{n-1} \leq r < 10^n \\
&\Longleftrightarrow \quad \log_{10} 10^{n-1} \leq \log_{10} r < \log_{10} 10^n \\
&\Longleftrightarrow \quad n-1 \leq \log_{10} r < n \ .
\end{aligned}
$$

一般的に次のようになる：正の自然数 n 及び正の実数 r について，

$$\begin{aligned} r\text{ の整数部分が }n\text{ 桁である} &\iff 10^{n-1} \leq r < 10^n \\ &\iff \log_{10}10^{n-1} \leq \log_{10}r < \log_{10}10^n \\ &\iff n-1 \leq \log_{10}r < n\ . \end{aligned}$$

このように，常用対数を用いて正の実数の整数部分の桁数を求めることができる．

$\boxed{\text{例}}$ $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$ であることを用いて，自然数 2^{100} の桁数を求める．

例 $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ であることを用いて，自然数 2^{100} の桁数を求める．

$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ より，

$$\log_{10}2^{100} = 100 \times \log_{10}2 \fallingdotseq 100 \times 0.3010 = 30.10 \ .$$

例 $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ であることを用いて，自然数 2^{100} の桁数を求める．

$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ より，

$$\log_{10}2^{100} = 100 \times \log_{10}2 \fallingdotseq 100 \times 0.3010 = 30.10 \ .$$

よって $30 \leq \log_{10}2^{100} < 31$ なので，

$$10^{30} \leq 10^{\log_{10}2^{100}} < 10^{31} \ .$$

例 $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ であることを用いて，自然数 2^{100} の桁数を求める．

$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ より，

$$\log_{10}2^{100} = 100 \times \log_{10}2 \fallingdotseq 100 \times 0.3010 = 30.10 \ .$$

よって $30 \leq \log_{10}2^{100} < 31$ なので，

$$10^{30} \leq 10^{\log_{10}2^{100}} < 10^{31} \ .$$

$10^{\log_{10}2^{100}} = 2^{100}$ なので， $10^{30} \leq 2^{100} < 10^{31}$ ．故に 2^{100} は 31 桁の自然数である． 終

$\boxed{問 9.8.5}$ $\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$ であることを用いて，自然数 3^{20} の桁数を求めよ．

$$\log_{10}3^{20} = \qquad\qquad \fallingdotseq \qquad\qquad = \qquad .$$

よって $\quad \leq \log_{10}3^{20} < \quad$ なので，$\quad \leq 3^{20} < \quad$，従って 3^{20} は　桁の自然数である．

$\boxed{問 9.8.5}$ $\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$ であることを用いて，自然数 3^{20} の桁数を求めよ．

$$\log_{10}3^{20} = 20\log_{10}3 \fallingdotseq 20 \times 0.4771 = 9.542 \ .$$

よって $\quad \leq \log_{10}3^{20} < \quad$ なので， $\quad \leq 3^{20} < \quad$ ，従って 3^{20} は $\quad$ 桁の自然数である．

$\boxed{問 9.8.5}$ $\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$ であることを用いて，自然数 3^{20} の桁数を求めよ．

$$\log_{10}3^{20} = 20\log_{10}3 \fallingdotseq 20 \times 0.4771 = 9.542 \ .$$

よって $9 \leq \log_{10}3^{20} < 10$ なので， $10^9 \leq 3^{20} < 10^{10}$ ， 従って 3^{20} は 10 桁の自然数である． $\boxed{終}$

$\boxed{問9.8.6}$ $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ であることを用いて，自然数 20^{10} の桁数を求めよ．

$$\log_{10}20^{10} = \qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad\qquad \fallingdotseq$$

$$= \qquad\qquad .$$

よって $\quad \leq \log_{10}20^{10} < \quad$ なので，$\quad \leq 20^{10} < \quad$，従って 20^{10} は 桁の自然数である．

問9.8.6 $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ であることを用いて，自然数 20^{10} の桁数を求めよ．

$$\log_{10}20^{10} = 10\log_{10}20 = 10(\log_{10}10 + \log_{10}2) \fallingdotseq 10 \times (1 + 0.3010)$$
$$= 13.010 \ .$$

よって $\qquad \leq \log_{10}20^{10} < \qquad$ なので，$\qquad \leq 20^{10} < \qquad$，従って 20^{10} は 桁の自然数である．

問9.8.6 $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ であることを用いて，自然数 20^{10} の桁数を求めよ．

$$\begin{aligned}\log_{10}20^{10} &= 10\log_{10}20 = 10(\log_{10}10 + \log_{10}2) \fallingdotseq 10 \times (1 + 0.3010) \\ &= 13.010 \ .\end{aligned}$$

よって $13 \leq \log_{10}20^{10} < 14$ なので， $10^{13} \leq 20^{10} < 10^{14}$ ，従って 20^{10} は 14 桁の自然数である． 終