

9.9 冪関数

定数 p は実数とする．前節で述べたように，任意の正の実数 x に対して x の p 乗 x^p の値が唯一つ定まる．

定数 p は実数とする．前節で述べたように，任意の正の実数 x に対して x の p 乗 x^p の値が唯一つ定まる．従って，正の実数 x に x の冪 x^p を対応させると，この対応は関数になる．この関数 x^p を，指数が p である冪関数という．

定数 p は実数とする．前節で述べたように，任意の正の実数 x に対して x の p 乗 x^p の値が唯一つ定まる．従って，正の実数 x に x の冪 x^p を対応させると，この対応は関数になる．この関数 x^p を，指数が p である冪関数という．

例えば，変数 x について $x > 0$ のとき，

x の関数 x^{-5} は 指数が -5 である冪関数であり，

x の関数 $x^{\frac{16}{3}}$ は 指数が $\frac{16}{3}$ である冪関数であり，

x の関数 $x^{\sqrt{7}}$ は 指数が $\sqrt{7}$ である冪関数である．

例 定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 f の指数が $\frac{2}{3}$ であるとする.

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad .$$

例 定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 f の指数が $\frac{2}{3}$ であるとする.

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. 125 における f の値は

$$f(125) = 125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^2 = 25 .$$

例 定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 f の指数が $\frac{2}{3}$ であるとする.

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. 125 における f の値は

$$f(125) = 125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^2 = 25 .$$

$\frac{7}{8}$ における f の値は

$$f\left(\frac{7}{8}\right) = \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{7^{\frac{2}{3}}}{(2^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{7^{\frac{2}{3}}}{2^2} = \frac{7^{\frac{2}{3}}}{4} .$$

終

問9.9.1 関数 f は $\frac{3}{4}$ を指数とする冪関数であり、その定義域は区間 $[0, \infty)$ であるとする. 81 における f の値及び $\frac{11}{16}$ における f の値及び 49 における f の値を求めよ.

問9.9.1 関数 f は $\frac{3}{4}$ を指数とする冪関数であり、その定義域は区間 $[0, \infty)$ であるとする. 81 における f の値及び $\frac{11}{16}$ における f の値及び 49 における f の値を求めよ.

$$f(81) = 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27 .$$

問9.9.1 関数 f は $\frac{3}{4}$ を指数とする冪関数であり、その定義域は区間 $[0, \infty)$ であるとする. 81 における f の値及び $\frac{11}{16}$ における f の値及び 49 における f の値を求めよ.

$$f(81) = 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27 .$$

$$f\left(\frac{11}{16}\right) = \left(\frac{11}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{11^{\frac{3}{4}}}{(2^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{11^{\frac{3}{4}}}{2^3} = \frac{11^{\frac{3}{4}}}{8} .$$

問9.9.1 関数 f は $\frac{3}{4}$ を指数とする冪関数であり、その定義域は区間 $[0, \infty)$ であるとする. 81 における f の値及び $\frac{11}{16}$ における f の値及び 49 における f の値を求めよ.

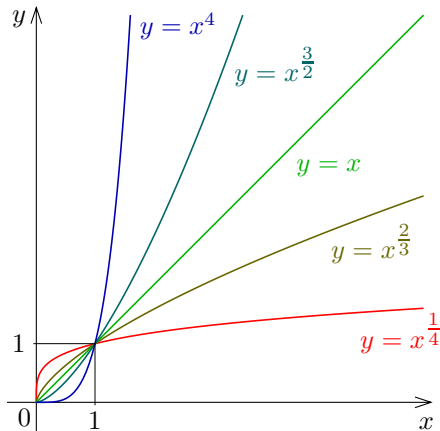
$$f(81) = 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27 .$$

$$f\left(\frac{11}{16}\right) = \left(\frac{11}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{11^{\frac{3}{4}}}{(2^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{11^{\frac{3}{4}}}{2^3} = \frac{11^{\frac{3}{4}}}{8} .$$

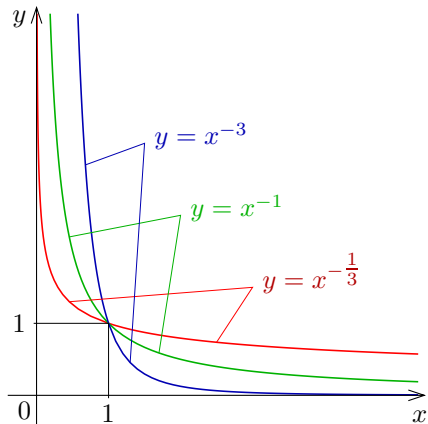
$$f(49) = 49^{\frac{3}{4}} = (7^2)^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{3}{2}} = 7\sqrt{7} .$$

終

定数 p は実数で $p \neq 0$ とする. $p > 0$ のときの幂関数 x^p ($x \geq 0$) のグラフと $p < 0$ のときの幂関数 x^p ($x > 0$) のグラフとは次のようになる.



$p > 0$ のときの $y = x^p$ のグラフ



$p < 0$ のときの $y = x^p$ のグラフ

グラフから分かるように次の定理が成り立つ.

[定理 9.9.1] 定数 p は実数で $p \neq 0$ とする.

$p > 0$ のとき, 定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 x^p は単調増加である.

$p < 0$ のとき, 定義域が区間 $(0, \infty)$ である冪関数 x^p は単調減少である.

0 以上の実数 x について, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. 従って, 定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ などは単調増加である.

[定理 8.6.4] 関数 g の定義域が関数 f の値域であり, f の定義域の各要素 x について $g(f(x)) = x$ ならば, g は f の逆関数である.

[定理 8.6.4] 関数 g の定義域が関数 f の値域であり, f の定義域の各要素 x について $g(f(x)) = x$ ならば, g は f の逆関数である.

定数 p について $p > 0$ とする. 定義域が区間 $[0, \infty)$ である幂関数 f と g とを次のように定める:

$$f(x) = x^p \quad (x \geq 0), \quad g(x) = x^{\frac{1}{p}} \quad (x \geq 0)$$

[定理 8.6.4] 関数 g の定義域が関数 f の値域であり, f の定義域の各要素 x について $g(f(x)) = x$ ならば, g は f の逆関数である.

定数 p について $p > 0$ とする. 定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 f と g とを次のように定める:

$$f(x) = x^p \quad (x \geq 0), \quad g(x) = x^{\frac{1}{p}} \quad (x \geq 0)$$

f の値域は区間 $[0, \infty)$ であり, g の定義域と一致する. また, 区間 $[0, \infty)$ の任意の実数 x について, 指数法則より,

$$g(f(x)) = g(x^p) = (x^p)^{\frac{1}{p}} = x^{p \frac{1}{p}} = x^1 = x.$$

故に定理 8.6.4 により関数 g は関数 f の逆関数である.

[定理 8.6.4] 関数 g の定義域が関数 f の値域であり, f の定義域の各要素 x について $g(f(x)) = x$ ならば, g は f の逆関数である.

[定理 8.6.4] 関数 g の定義域が関数 f の値域であり, f の定義域の各要素 x について $g(f(x)) = x$ ならば, g は f の逆関数である.

定数 p について $p < 0$ とする. 定義域が区間 $(0, \infty)$ である幂関数 f と g とを次のように定める:

$$f(x) = x^p \quad (x > 0), \quad g(x) = x^{\frac{1}{p}} \quad (x > 0)$$

[定理 8.6.4] 関数 g の定義域が関数 f の値域であり, f の定義域の各要素 x について $g(f(x)) = x$ ならば, g は f の逆関数である.

定数 p について $p < 0$ とする. 定義域が区間 $(0, \infty)$ である冪関数 f と g とを次のように定める:

$$f(x) = x^p \quad (x > 0), \quad g(x) = x^{\frac{1}{p}} \quad (x > 0)$$

f の値域は区間 $(0, \infty)$ であり, g の定義域と一致する. また, 区間 $(0, \infty)$ の任意の実数 x について, 指数法則より,

$$g(f(x)) = g(x^p) = (x^p)^{\frac{1}{p}} = x^{p \frac{1}{p}} = x^1 = x.$$

故に定理 8.6.4 により g は関数 f の逆関数である.

[定理 9.9.2] 定数 p は実数で $p \neq 0$ とする.

(1) $p > 0$ のとき, 定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 x^p の逆関数は, 定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である.

(2) $p < 0$ のとき, 定義域が区間 $(0, \infty)$ である冪関数 x^p の逆関数は, 定義域が区間 $(0, \infty)$ である冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である.

[定理 9.9.2] 定数 p は実数で $p \neq 0$ とする.

(1) $p > 0$ のとき, 定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 x^p の逆関数は, 定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である.

(2) $p < 0$ のとき, 定義域が区間 $(0, \infty)$ である冪関数 x^p の逆関数は, 定義域が区間 $(0, \infty)$ である冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である.

このように, 冪関数の逆関数はやはり冪関数である.

変数が現れる式を底とする冪の式を含む方程式を考える. そのような方程式に現れる変数は実数を表すものとする.

例 変数 x について $x \geq -\frac{9}{5}$ とする. x に関する方程式 $(5x+9)^{\frac{3}{4}} = 7$ を解く.

例 変数 x について $x \geq -\frac{9}{5}$ とする. x に関する方程式 $(5x+9)^{\frac{3}{4}} = 7$ を解く. $x \geq -\frac{9}{5}$ より $5x+9 \geq 0$ なので,

$$\left\{ (5x+9)^{\frac{3}{4}} \right\}^{\frac{4}{3}} = (5x+9)^1 = 5x+9 .$$

例 変数 x について $x \geq -\frac{9}{5}$ とする. x に関する方程式 $(5x+9)^{\frac{3}{4}} = 7$ を解く. $x \geq -\frac{9}{5}$ より $5x+9 \geq 0$ なので,

$$\left\{ (5x+9)^{\frac{3}{4}} \right\}^{\frac{4}{3}} = (5x+9)^1 = 5x+9 .$$

方程式 $(5x+9)^{\frac{3}{4}} = 7$ の両辺を $\frac{4}{3}$ 乗する :

$$\begin{aligned} \left\{ (5x+9)^{\frac{3}{4}} \right\}^{\frac{4}{3}} &= 7^{\frac{4}{3}} , \\ 5x+9 &= 7^{\frac{4}{3}} , \end{aligned}$$

故に $x = \frac{7^{\frac{4}{3}} - 9}{5} .$

終

問9.9.2 変数 x について $x \geq \frac{3}{4}$ とする. x に関する方程式 $(4x-3)^{\frac{7}{5}} = 9$ を解け.

$x \geq \frac{3}{4}$ より $4x-3 \geq 0$ なので, 方程式 $(4x-3)^{\frac{7}{5}} = 9$ より,

問9.9.2 変数 x について $x \geq \frac{3}{4}$ とする. x に関する方程式 $(4x-3)^{\frac{7}{5}} = 9$ を解け.

$x \geq \frac{3}{4}$ より $4x-3 \geq 0$ なので, 方程式 $(4x-3)^{\frac{7}{5}} = 9$ より,

$$\left\{ (4x-3)^{\frac{7}{5}} \right\}^{\frac{5}{7}} = 9^{\frac{5}{7}}, \quad 4x-3 = 9^{\frac{5}{7}}, \quad \text{故に} \quad x = \frac{9^{\frac{5}{7}} + 3}{4}.$$

終