10.3 還元公式

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) =$ 　　　　　　.

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. 角度 θ は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad})$ なので，

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\sin(-x) = \sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad}) = -\sin x \ .$$

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ． 任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad})$ なので,

$$\sin(-x) = \sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad}) = -\sin x \ .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \qquad\qquad$.

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ． 任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\sin(-x) = \sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad}) = -\sin x \ .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ． 角度 θ は度数法で表しても弧度法で表してもよい．

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\sin(-x) = \sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad}) = -\sin x \ .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\cos(-x\,\mathrm{rad}) = \cos(x\,\mathrm{rad})$ なので，

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad})$ なので,

$$\sin(-x) = \sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad}) = -\sin x \ .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\cos(-x\,\mathrm{rad}) = \cos(x\,\mathrm{rad})$ なので,

$$\cos(-x) = \cos(-x\,\mathrm{rad}) = \cos(x\,\mathrm{rad}) = \cos x \ .$$

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\sin(-x) = \sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad}) = -\sin x \ .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\cos(-x\,\mathrm{rad}) = \cos(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\cos(-x) = \cos(-x\,\mathrm{rad}) = \cos(x\,\mathrm{rad}) = \cos x \ .$$

$\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{rad} = 90^\circ$ の奇数倍でない任意の一般角 θ について $\tan(-\theta) =$ 　　　　．

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad})$ なので,

$$\sin(-x) = \sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad}) = -\sin x \ .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \cos\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\cos(-x\,\mathrm{rad}) = \cos(x\,\mathrm{rad})$ なので,

$$\cos(-x) = \cos(-x\,\mathrm{rad}) = \cos(x\,\mathrm{rad}) = \cos x \ .$$

$\dfrac{\pi}{2}\mathrm{rad} = 90^\circ$ の奇数倍でない任意の一般角 θ について $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.

角度 θ は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\sin(-x) = \sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad}) = -\sin x \ .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\cos(-x\,\mathrm{rad}) = \cos(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\cos(-x) = \cos(-x\,\mathrm{rad}) = \cos(x\,\mathrm{rad}) = \cos x \ .$$

$\dfrac{\pi}{2}\mathrm{rad} = 90^\circ$ の奇数倍でない任意の一般角 θ について $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ ．$\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\tan(-x\,\mathrm{rad}) = -\tan(x\,\mathrm{rad})$ なので，

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\sin(-x) = \sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad}) = -\sin x \ .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\cos(-x\,\mathrm{rad}) = \cos(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\cos(-x) = \cos(-x\,\mathrm{rad}) = \cos(x\,\mathrm{rad}) = \cos x \ .$$

$\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{rad} = 90^\circ$ の奇数倍でない任意の一般角 θ について $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ ．$\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\tan(-x\,\mathrm{rad}) = -\tan(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\tan(-x) = \tan(-x\,\mathrm{rad}) = -\tan(x\,\mathrm{rad}) = -\tan x \ .$$

定理　任意の実数 x について,

$$\sin(-x) = -\sin x \ , \qquad \cos(-x) = \cos x \ ,$$

$$x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき} \quad \tan(-x) = -\tan x \ .$$

正弦関数 $\sin x$ と正接関数 $\tan x$ とは　関数であり，余弦関数 $\cos x$ は　関数である.

定理　任意の実数 x について，

$$\sin(-x) = -\sin x \ , \qquad \cos(-x) = \cos x \ ,$$

$$x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき } \quad \tan(-x) = -\tan x \ .$$

正弦関数 $\sin x$ と正接関数 $\tan x$ とは奇関数であり，余弦関数 $\cos x$ は偶関数である．

任意の一般角 θ **について** $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right)=\sin(\theta+90^\circ)=\qquad\qquad.$

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right)=\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$. 角度 θ は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right) = \sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$ ． 任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin\left(x\,\mathrm{rad} + \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right) = \cos(x\,\mathrm{rad})$ なので，

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right)=\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$ ． 任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin\left(x\,\mathrm{rad}+\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right)=\cos(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x\,\mathrm{rad}+\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right) = \cos(x\,\mathrm{rad}) = \cos x \ .$$

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right)=\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$ ． 任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin\left(x\,\mathrm{rad}+\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right)=\cos(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x\,\mathrm{rad}+\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right) = \cos(x\,\mathrm{rad}) = \cos x \ .$$

任意の一般角 θ について $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right)=\cos(\theta+90^\circ)=\qquad\qquad$ ．

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right)=\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin\left(x\,\mathrm{rad}+\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right)=\cos(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x\,\mathrm{rad}+\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right) = \cos(x\,\mathrm{rad}) = \cos x \ .$$

任意の一般角 θ について $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right)=\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta$ ． 角度 θ は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right)=\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$ ． 任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin\left(x\,\mathrm{rad}+\dfrac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right)=\cos(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x\,\mathrm{rad}+\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right) = \cos(x\,\mathrm{rad}) = \cos x \ .$$

任意の一般角 θ について $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right)=\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta$ ． 任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\cos\left(x\,\mathrm{rad}+\dfrac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right)=-\sin(x\,\mathrm{rad})$ なので，

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right)=\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\sin\left(x\,\mathrm{rad}+\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right)=\cos(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\;=\;\sin\left(x\,\mathrm{rad}+\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right)\;=\;\cos(x\,\mathrm{rad})\;=\;\cos x\;\;.$$

任意の一般角 θ について $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right)=\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ について $\cos\left(x\,\mathrm{rad}+\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right)=-\sin(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\;=\;\cos\left(x\,\mathrm{rad}+\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right)\;=\;-\sin(x\,\mathrm{rad})\;=\;-\sin x\;\;.$$

任意の実数 x に対して $y = x - \dfrac{\pi}{2}$ とおく.

任意の実数 x に対して $y = x - \frac{\pi}{2}$ とおく. $\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos y$ つまり $\cos y = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$ なので,

任意の実数 x に対して $y = x - \dfrac{\pi}{2}$ とおく． $\sin\left(y + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos y$ つまり $\cos y = \sin\left(y + \dfrac{\pi}{2}\right)$ なので，

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos y = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin x \ .$$

任意の実数 x に対して $y = x - \dfrac{\pi}{2}$ とおく. $\sin\left(y + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos y$ つまり $\cos y = \sin\left(y + \dfrac{\pi}{2}\right)$ なので,

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos y = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin x \ .$$

$\cos\left(y + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin y$ よって $\sin y = -\cos\left(y + \dfrac{\pi}{2}\right)$ なので,

任意の実数 x に対して $y=x-\dfrac{\pi}{2}$ とおく． $\sin\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos y$ つまり $\cos y=\sin\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)$ なので，

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos y=\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left\{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}=\sin x\ .$$

$\cos\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin y$ よって $\sin y=-\cos\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)$ なので，

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin y=-\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left\{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}=-\cos x\ .$$

任意の実数 x に対して $y = x - \frac{\pi}{2}$ とおく． $\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos y$ つまり $\cos y = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$ なので，

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos y = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin x \ .$$

$\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin y$ よって $\sin y = -\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$ なので，

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin y = -\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = -\cos x \ .$$

定理　任意の実数 x について，

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos x \quad \text{（複号同順）},$$

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin x \quad \text{（複号同順）}.$$

任意の実数 x に対して $y = x + \frac{\pi}{2}$ とおく.

任意の実数 x に対して $y = x + \frac{\pi}{2}$ とおく.

$$
\begin{aligned}
\sin(x+\pi) &= \sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\sin x \ .
\end{aligned}
$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

任意の実数 x に対して $y = x + \dfrac{\pi}{2}$ とおく.

$$
\begin{aligned}
\sin(x+\pi) &= \sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\sin x \ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(x+\pi) &= \cos\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\sin y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \\
&= -\cos x \ . \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x
\end{aligned}
$$

任意の実数 x に対して $z = x - \dfrac{\pi}{2}$ とおく.

任意の実数 x に対して $z = x - \dfrac{\pi}{2}$ とおく.

$$\begin{aligned} \sin(x-\pi) &= \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos z = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x \ . \end{aligned}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

任意の実数 x に対して $z = x - \dfrac{\pi}{2}$ とおく.

$$\begin{aligned}\sin(x-\pi) &= \sin\left\{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\cos z = -\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\sin x \ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x-\pi) &= \cos\left\{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right\} = \cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sin z = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\cos x \ .\end{aligned}$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$

定理　任意の実数 x について,

$$\sin(x \pm \pi) = -\sin x \ , \qquad \cos(x \pm \pi) = -\cos x \ .$$

任意の実数 x に対して $y = x + \pi$ とおく.

任意の実数 x に対して $y = x + \pi$ とおく.

$$\begin{aligned} \sin(x+2\pi) &= \sin\{(x+\pi)+\pi\} = \sin(y+\pi) \\ &= -\sin y = -\sin(x+\pi) = -(-\sin x) \\ &= \sin x \ . \end{aligned}$$

任意の実数 x に対して $y = x + \pi$ とおく.

$$
\begin{aligned}
\sin(x+2\pi) &= \sin\{(x+\pi)+\pi\} = \sin(y+\pi) \\
&= -\sin y = -\sin(x+\pi) = -(-\sin x) \\
&= \sin x \ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(x+2\pi) &= \cos\{(x+\pi)+\pi\} = \cos(y+\pi) \\
&= -\cos y = -\cos(x+\pi) = -(-\cos x) \\
&= \cos x \ .
\end{aligned}
$$

任意の実数 x に対して $y = x + \pi$ とおく.

$$\begin{aligned}\sin(x+2\pi) &= \sin\{(x+\pi)+\pi\} = \sin(y+\pi)\\ &= -\sin y = -\sin(x+\pi) = -(-\sin x)\\ &= \sin x \ .\end{aligned}$$

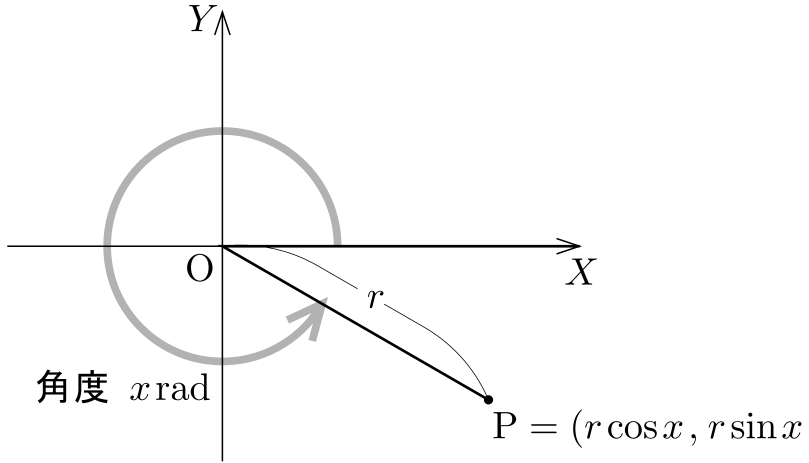
$$\begin{aligned}\cos(x+2\pi) &= \cos\{(x+\pi)+\pi\} = \cos(y+\pi)\\ &= -\cos y = -\cos(x+\pi) = -(-\cos x)\\ &= \cos x \ .\end{aligned}$$

こうして次のことが分かる : 任意の実数 x について,

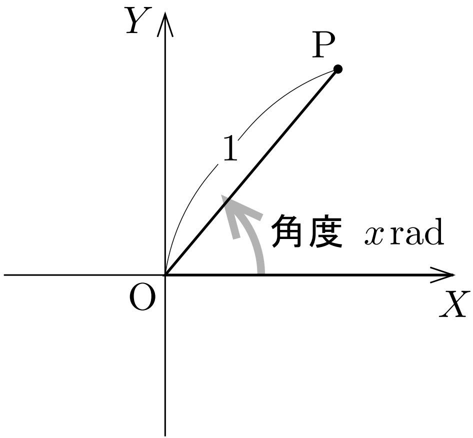
$$\sin(x+2\pi) = \sin x \ , \qquad \cos(x+2\pi) = \cos x \ .$$

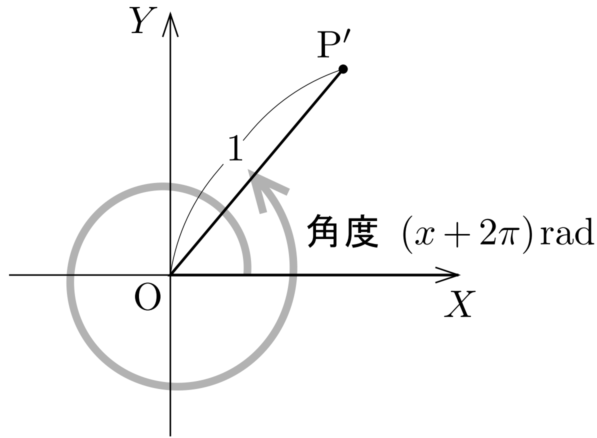
このことは図で考えても分かる．次のことを用いる：実数 x に対して，XY 座標平面において原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する角度が $x\,\mathrm{rad}$ である動径に属する点 P について $\overline{\mathrm{OP}} = r$ とおくと

$$\mathrm{P} = (r\cos x\,, r\sin x)\ .$$



実数 x に対して，XY 座標平面において原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\,\mathrm{rad}$ の動径に属し $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点 P と，始線 OX に対する角度 $(x+2\pi)\,\mathrm{rad}$ の動径に属し $\overline{\mathrm{OP'}}=1$ である点 P$'$ とをとる．

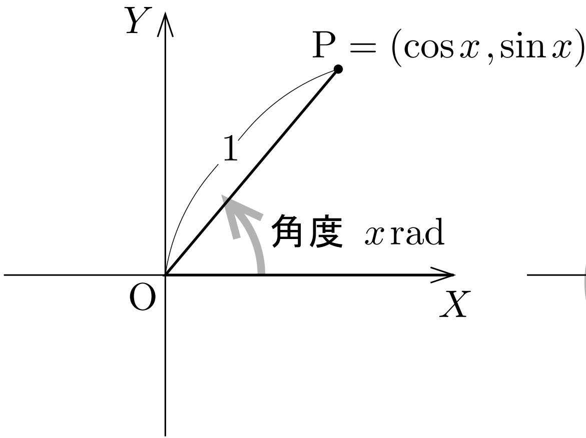


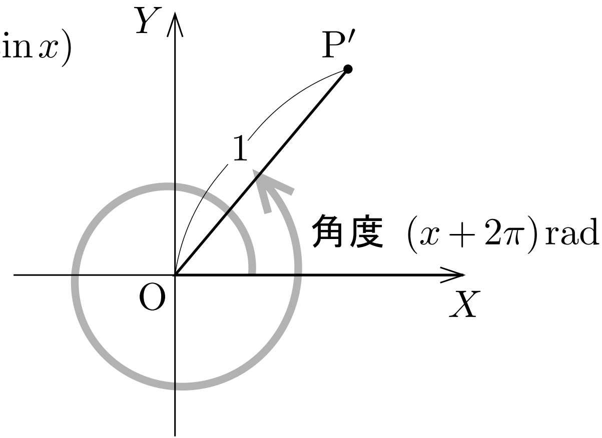


このとき，

$$\mathrm{P}=(\qquad,\qquad),\qquad\qquad \mathrm{P'}=(\qquad\qquad,\qquad\qquad).$$

実数 x に対して，XY 座標平面において原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\,\mathrm{rad}$ の動径に属し $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点 P と，始線 OX に対する角度 $(x+2\pi)\,\mathrm{rad}$ の動径に属し $\overline{\mathrm{OP'}}=1$ である点 P$'$ とをとる．

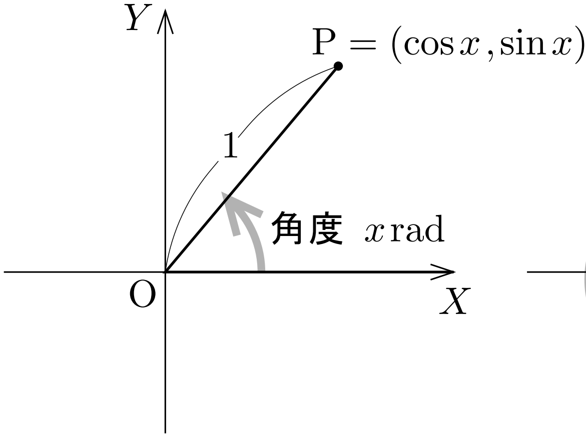


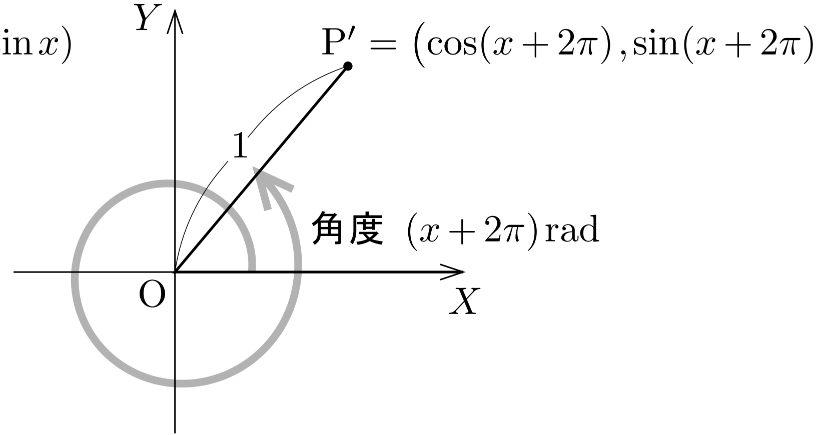


このとき，

$$\mathrm{P}=(\cos x\,,\sin x)\ ,\qquad \mathrm{P'}=(\qquad\qquad,\qquad\qquad)\ .$$

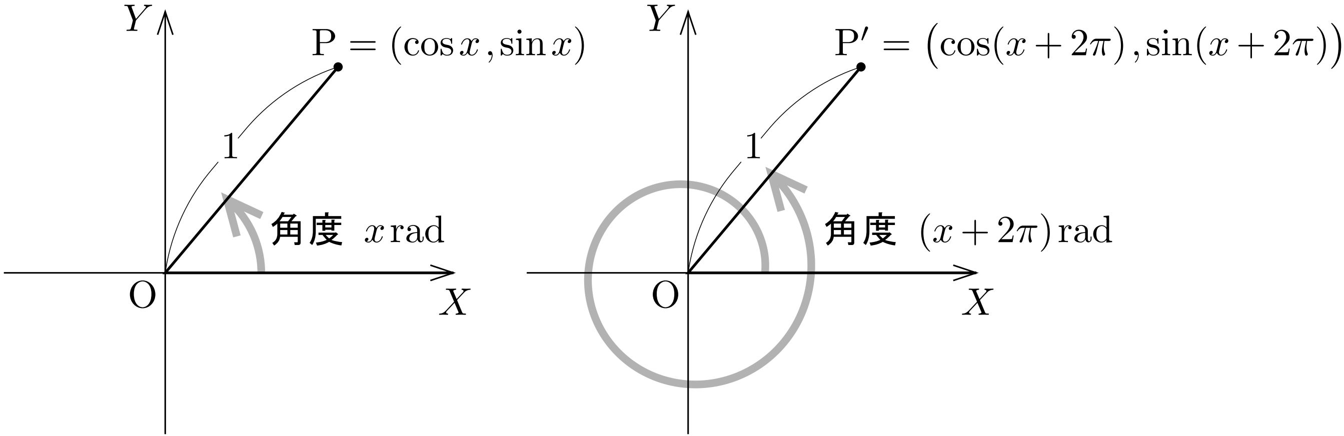
実数 x に対して，XY 座標平面において原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\,\mathrm{rad}$ の動径に属し $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点 P と，始線 OX に対する角度 $(x+2\pi)\,\mathrm{rad}$ の動径に属し $\overline{\mathrm{OP'}}=1$ である点 P′ とをとる．





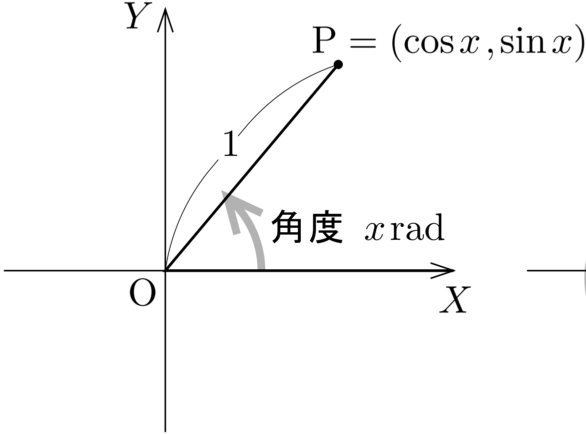
このとき，

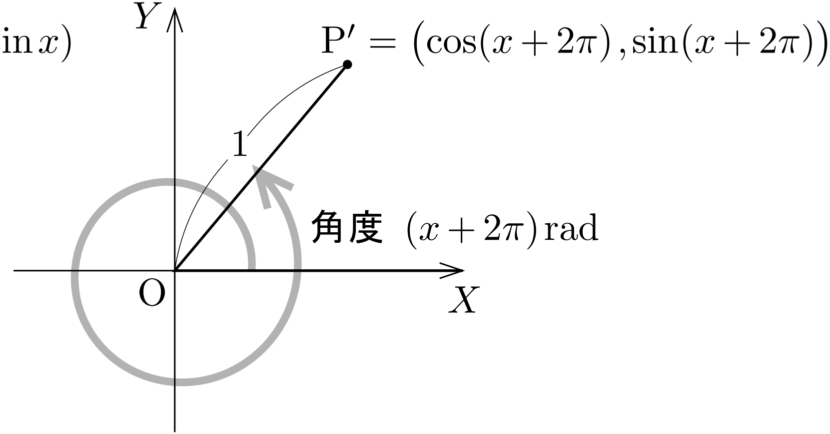
$$\mathrm{P}=(\cos x, \sin x)\ , \qquad \mathrm{P'}=\bigl(\cos(x+2\pi), \sin(x+2\pi)\bigr)\ .$$



$$\mathrm{P} = (\cos x, \sin x)\ , \qquad \mathrm{P}' = \bigl(\cos(x+2\pi), \sin(x+2\pi)\bigr)\ .$$

線分 OP$'$ は線分 OP を更に 1 回転させたものなので，点 P$'$ は点 P と一致する： P$'$ = P .





$$\mathrm{P} = (\cos x\,, \sin x) \;, \qquad \mathrm{P}' = \big(\cos(x+2\pi)\,, \sin(x+2\pi)\big) \;.$$

線分 OP' は線分 OP を更に 1 回転させたものなので，点 P' は点 P と一致する： $\mathrm{P}' = \mathrm{P}$ ． 従って $\big(\cos(x+2\pi)\,, \sin(x+2\pi)\big) = (\cos x\,, \sin x)$ なので，

$$\cos(x+2\pi) = \cos x \;, \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x \;.$$

x は任意の実数とする.

x は任意の実数とする．任意の実数 X について $\sin X = \sin(X + 2\pi)$ なので，

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(x + 2\pi) = \sin\{(x + 2\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 4\pi) = \sin\{(x + 4\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 6\pi) = \sin\{(x + 6\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 8\pi) = \cdots \quad .\end{aligned}$$

x は任意の実数とする．任意の実数 X について $\sin X = \sin(X+2\pi)$ なので，

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sin(x+2\pi) = \sin\{(x+2\pi)+2\pi\} \\
&= \sin(x+4\pi) = \sin\{(x+4\pi)+2\pi\} \\
&= \sin(x+6\pi) = \sin\{(x+6\pi)+2\pi\} \\
&= \sin(x+8\pi) = \cdots \quad .
\end{aligned}
$$

任意の実数 X について $\sin X = \sin\{(X-2\pi)+2\pi\} = \sin(X-2\pi)$ なので，

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sin(x-2\pi) = \sin\{(x-2\pi)-2\pi\} \\
&= \sin(x-4\pi) = \sin\{(x-4\pi)-2\pi\} \\
&= \sin(x-6\pi) = \sin\{(x-6\pi)-2\pi\} \\
&= \sin(x-8\pi) = \cdots \quad .
\end{aligned}
$$

余弦関数 $\cos x$ についても同様のことが成り立つ：

$$\cos x = \cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi) = \cos(x+6\pi) = \cos(x+8\pi) = \cdots \ ,$$

$$\cos x = \cos(x-2\pi) = \cos(x-4\pi) = \cos(x-6\pi) = \cos(x-8\pi) = \cdots \ .$$

余弦関数 $\cos x$ についても同様のことが成り立つ：

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \cos(x + 6\pi) = \cos(x + 8\pi) = \cdots \ ,$$

$$\cos x = \cos(x - 2\pi) = \cos(x - 4\pi) = \cos(x - 6\pi) = \cos(x - 8\pi) = \cdots \ .$$

つまり次のようになる：

$$\sin\big(x \pm (\,\pi \text{ の偶数倍})\big) = \sin x \ , \qquad \cos\big(x \pm (\,\pi \text{ の偶数倍})\big) = \cos x \ .$$

余弦関数 $\cos x$ についても同様のことが成り立つ：

$$\cos x = \cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi) = \cos(x+6\pi) = \cos(x+8\pi) = \cdots \ ,$$

$$\cos x = \cos(x-2\pi) = \cos(x-4\pi) = \cos(x-6\pi) = \cos(x-8\pi) = \cdots \ .$$

つまり次のようになる：

$$\sin\bigl(x \pm (\,\pi\ \text{の偶数倍})\bigr) = \sin x \ , \qquad \cos\bigl(x \pm (\,\pi\ \text{の偶数倍})\bigr) = \cos x \ .$$

定理　任意の整数 n 及び任意の実数 x について,

$$\sin(x \pm 2n\pi) = \sin x \ , \qquad \cos(x \pm 2n\pi) = \cos x \ .$$

$\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 X について，$\sin(X+\pi) = -\sin X$ ，$\cos(X+\pi) = -\cos X$ なので，

$\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 X について， $\sin(X+\pi) = -\sin X$ ，
$\cos(X+\pi) = -\cos X$ なので，

$$\tan(X+\pi) = \frac{\sin(X+\pi)}{\cos(X+\pi)} = \frac{-\sin X}{-\cos X} = \frac{\sin X}{\cos X} = \tan X \ ,$$

つまり $\tan X = \tan(X+\pi)$ ．

$\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 X について， $\sin(X+\pi) = -\sin X$ ， $\cos(X+\pi) = -\cos X$ なので，

$$\tan(X+\pi) = \frac{\sin(X+\pi)}{\cos(X+\pi)} = \frac{-\sin X}{-\cos X} = \frac{\sin X}{\cos X} = \tan X \ ,$$

つまり $\tan X = \tan(X+\pi)$ ．これより， $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について，

$$\begin{aligned} \tan x &= \tan(x+\pi) = \tan\{(x+\pi)+\pi\} \\ &= \tan(x+2\pi) = \tan\{(x+2\pi)+\pi\} \\ &= \tan(x+3\pi) = \tan\{(x+3\pi)+\pi\} \\ &= \tan(x+4\pi) = \cdots \ . \end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 X について

$$\tan X = \tan\{(X-\pi)+\pi\} = \tan(X-\pi) \ .$$

$\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 X について

$$\tan X = \tan\{(X-\pi)+\pi\} = \tan(X-\pi) \ .$$

これより，$\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について，

$$\begin{aligned}\tan x &= \tan(x-\pi) = \tan\{(x-\pi)-\pi\} \\ &= \tan(x-2\pi) = \tan\{(x-2\pi)-\pi\} \\ &= \tan(x-3\pi) = \tan\{(x-3\pi)-\pi\} \\ &= \tan(x-4\pi) = \cdots \ .\end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 X について

$$\tan X = \tan\{(X-\pi)+\pi\} = \tan(X-\pi) \ .$$

これより，$\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について，

$$\begin{aligned}\tan x = \tan(x-\pi) &= \tan\{(x-\pi)-\pi\} \\ &= \tan(x-2\pi) = \tan\{(x-2\pi)-\pi\} \\ &= \tan(x-3\pi) = \tan\{(x-3\pi)-\pi\} \\ &= \tan(x-4\pi) = \cdots \ .\end{aligned}$$

定理　任意の整数 n 及び任意の実数 x について，

x が $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき　$\tan(x \pm n\pi) = \tan x$.

$\boxed{例}$ 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$.

例 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$.

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - \qquad\right)$$

整数 n に対して $\cos x = \cos(x + 2n\pi)$

例 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$.

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right)$$

整数 n に対して $\cos x = \cos(x + 2n\pi)$

例 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$ ．

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$ ．

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$ ．

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$.

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi\right)$$

整数 n に対して $\cos x = \cos(x + 2n\pi)$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$ ．

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{3}$$

$\boxed{例}$ 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$ ．

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\ .$$

次のようにも計算できる：

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(\qquad + \pi\right)$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$ ．

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right)$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$.

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right)$$

$$= -\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x$$

例 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$ ．

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\cos\frac{29\pi}{3} &= \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right) \\ &= -\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\left(\quad\ + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

例 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$.

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right)$$

$$= -\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$.

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\cos\frac{29\pi}{3} &= \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right) \\ &= -\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\cos\dfrac{29\pi}{3}$ ．

$$\cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\cos\frac{29\pi}{3} &= \cos\left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right) \\ &= -\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + \quad\right)$$

整数 n に対して $\sin x = \sin(x + 2n\pi)$

$\boxed{例}$ 次の式を計算する：$\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right)$$

整数 n に対して $\sin x = \sin(x + 2n\pi)$

例 **次の式を計算する**：$\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6}$$

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**：$\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\quad + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**：$\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6}+4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**：$\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6}+4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

例 **次の式を計算する**：$\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6}+4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

$\boxed{例}$ 次の式を計算する：$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6}+4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = -\sin\frac{19\pi}{6}$$

$$\sin(-x) = -\sin$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6}+4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = -\sin\frac{19\pi}{6}$$

整数 n に対して $\sin x = \sin(x+2n\pi)$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6}+4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = -\sin\frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6}-2\pi\right)$$

整数 n に対して $\sin x = \sin(x+2n\pi)$

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**：$\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$ ．

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6}+4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = -\sin\frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6}-2\pi\right) = -\sin\frac{7\pi}{6}$$

$\boxed{例}$ **次の式を計算する：** $\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6}+4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = -\sin\frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6}-2\pi\right) = -\sin\frac{7\pi}{6}$$

$$= -\sin\left(\quad +\pi\right)$$

$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$

例 次の式を計算する：$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6}+4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = -\sin\frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6}-2\pi\right) = -\sin\frac{7\pi}{6}$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)$$

$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6}+4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = -\sin\frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6}-2\pi\right) = -\sin\frac{7\pi}{6}$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right) = -\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**：$\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6}+4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) &= -\sin\frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6}-2\pi\right) = -\sin\frac{7\pi}{6} \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right) = -\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} \ .\end{aligned}$$

$\boxed{問10.3.1}$ 次の式を計算せよ：$\cos \dfrac{35\pi}{6}$.

$\boxed{\text{問}\,10.3.1}$ **次の式を計算せよ**：$\cos\dfrac{35\pi}{6}$.

$$\cos\frac{35\pi}{6} = \cos\left(\frac{35\pi}{6} - 6\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

$$\cos\frac{35\pi}{6} = \cos\left(\frac{35\pi}{3} - 4\pi\right) = \cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \pi\right)$$
$$= -\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

$\boxed{\text{問}\, 10.3.2}$ 次の式を計算せよ：$\cos\left(-\dfrac{22\pi}{3}\right)$.

$\boxed{問10.3.2}$ **次の式を計算せよ：** $\cos\left(-\dfrac{22\pi}{3}\right)$.

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right) &= \cos\frac{22\pi}{3} = \cos\left(\frac{22\pi}{3} - 6\pi\right) \\ &= \cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2} \ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right) &= \cos\left(-\frac{22\pi}{3} + 8\pi\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{1}{2} \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\tan\dfrac{20\pi}{3}$.

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する：** $\tan\dfrac{20\pi}{3}$.

$$\tan\frac{20\pi}{3} = \tan\left(\frac{20\pi}{3} - \qquad\right)$$

整数 n に対して $\tan x = \tan(x + n\pi)$

例 次の式を計算する：$\tan\dfrac{20\pi}{3}$.

$$\tan\frac{20\pi}{3} = \tan\left(\frac{20\pi}{3} - 7\pi\right)$$

整数 n に対して $\tan x = \tan(x + n\pi)$

$\boxed{例}$ **次の式を計算する**：$\tan\dfrac{20\pi}{3}$ ．

$$\tan\frac{20\pi}{3} = \tan\left(\frac{20\pi}{3} - 7\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$\boxed{例}$ **次の式を計算する**：$\tan\dfrac{20\pi}{3}$ ．

$$\tan\frac{20\pi}{3} = \tan\left(\frac{20\pi}{3} - 7\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3}$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$\boxed{例}$ **次の式を計算する**：$\tan\dfrac{20\pi}{3}$.

$$\tan\frac{20\pi}{3} = \tan\left(\frac{20\pi}{3} - 7\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} .$$

$\boxed{\text{問 } 10.3.3}$ 次の式を計算せよ：$\tan \dfrac{17\pi}{6}$.

$\boxed{問 10.3.3}$ **次の式を計算せよ：** $\tan\dfrac{17\pi}{6}$ ．

$$\tan\frac{17\pi}{6} = \tan\left(\frac{17\pi}{6} - 3\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\ .$$

$\boxed{\text{問}\,10.3.4}$ **次の式を計算せよ**：$\tan\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$.

$\boxed{問\ 10.3.4}$ **次の式を計算せよ**：$\tan\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$.

$$\tan\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{19\pi}{6} + 3\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

例 変数 x を含む式 $\cos\left(x+\frac{15\pi}{2}\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

$\boxed{例}$ 変数 x を含む式 $\cos\left(x+\dfrac{15\pi}{2}\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

$$\cos\left(x+\frac{15\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{15\pi}{2}-8\pi\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x を含む式 $\cos\left(x+\dfrac{15\pi}{2}\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

$$\cos\left(x+\frac{15\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{15\pi}{2}-8\pi\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\cos\left(x+\frac{15\pi}{2}\right) &= \cos\left(x+\frac{15\pi}{2}-6\pi\right) = \cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\pi\right) = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -(-\sin x) \\ &= \sin x \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x を含む式 $\sin\left(x-\dfrac{17\pi}{2}\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する．

例 変数 x を含む式 $\sin\left(x-\frac{17\pi}{2}\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する．

$$\sin\left(x-\frac{17\pi}{2}\right)=\sin\left(x-\frac{17\pi}{2}+8\pi\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x を含む式 $\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する．

$$\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{17\pi}{2} + 8\pi\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right) &= \sin\left(x - \frac{17\pi}{2} + 10\pi\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos x \ .\end{aligned}$$

$\boxed{問 10.3.5}$ 変数 x を含む式 $\sin\left(x+\dfrac{23\pi}{2}\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形せよ．

$\boxed{\text{問 } 10.3.5}$ 変数 x を含む式 $\sin\left(x+\dfrac{23\pi}{2}\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形せよ.

$$\sin\left(x+\frac{23\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{23\pi}{2}-12\pi\right) = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\sin\left(x+\frac{23\pi}{2}\right) &= \sin\left(x+\frac{23\pi}{2}-10\pi\right) = \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\\ &= \sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\pi\right) = -\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\cos x \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問}10.3.6}$ 変数 x を含む式 $\cos\left(x-\dfrac{21\pi}{2}\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形せよ．

$\boxed{問 10.3.6}$ 変数 x を含む式 $\cos\left(x - \frac{21\pi}{2}\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形せよ.

$$\cos\left(x - \frac{21\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{21\pi}{2} + 10\pi\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \ .$$

$$\begin{aligned}\cos\left(x - \frac{21\pi}{2}\right) &= \cos\left(x - \frac{21\pi}{2} + 12\pi\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -(-\sin x) \\ &= \sin x \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x を含む式 $\cos\left(\dfrac{15\pi}{2}-x\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x を含む式 $\cos\left(\dfrac{15\pi}{2}-x\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{15\pi}{2}-x\right) &= \cos\left\{-\left(x-\frac{15\pi}{2}\right)\right\} = \cos\left(x-\frac{15\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x-\frac{15\pi}{2}+8\pi\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x を含む式 $\cos\left(\frac{15\pi}{2}-x\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{15\pi}{2}-x\right) &= \cos\left\{-\left(x-\frac{15\pi}{2}\right)\right\} = \cos\left(x-\frac{15\pi}{2}\right)\\ &= \cos\left(x-\frac{15\pi}{2}+8\pi\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\sin x\ .\end{aligned}$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{15\pi}{2}-x\right) &= \cos\left(\frac{15\pi}{2}-x-8\pi\right) = \cos\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos\left\{-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\sin x\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問}10.3.7}$ 変数 x を含む式 $\sin\left(\dfrac{25\pi}{2} - x\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形せよ．

$\boxed{問10.3.7}$ 変数 x を含む式 $\sin\left(\dfrac{25\pi}{2}-x\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形せよ.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{25\pi}{2}-x\right) &= \sin\left(\frac{25\pi}{2}-x-12\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &= \sin\left(-x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(-x)\\ &= \cos x \ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{25\pi}{2}-x\right) &= -\sin\left(x-\frac{25\pi}{2}\right) = -\sin\left(x-\frac{25\pi}{2}+12\pi\right)\\ &= -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -(-\cos x)\\ &= \cos x \ .\end{aligned}$$