10.5　三角関数の周期

定義　関数 f 及び 0 でない定数 p について,

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について} \quad f(x+p)=f(x)$$

となるとき, 定数 p を f の周期という. 関数 f の周期があるとき, f を周期関数という. 但し定数関数は普通は周期関数とは考えない. 周期関数の正の周期の中で最小のものを f の基本周期という.

任意の実数 x について，

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x \ , \quad \sin(x \pm 4\pi) = \sin x \ , \quad \sin(x \pm 6\pi) = \sin x \ , \quad \cdots \ .$$

任意の実数 x について,

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x \ , \quad \sin(x \pm 4\pi) = \sin x \ , \quad \sin(x \pm 6\pi) = \sin x \ , \quad \cdots \ .$$

よって, $\pm 2\pi\,, \pm 4\pi\,, \pm 6\pi\,, \pm 8\pi\,, \ldots$ は正弦関数 $\sin x$ の周期である.

任意の実数 x について,

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x \ , \quad \sin(x \pm 4\pi) = \sin x \ , \quad \sin(x \pm 6\pi) = \sin x \ , \quad \cdots \ .$$

よって, $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \ldots$ は正弦関数 $\sin x$ の周期である. 正弦関数 $\sin x$ の正の周期は $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, \ldots$ であり, このうち最小の周期は 2π である. よって正弦関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である.

任意の実数 x について，

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x \ , \quad \sin(x \pm 4\pi) = \sin x \ , \quad \sin(x \pm 6\pi) = \sin x \ , \quad \cdots \ .$$

よって，$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \ldots$ は正弦関数 $\sin x$ の周期である．正弦関数 $\sin x$ の正の周期は $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, \ldots$ であり，このうち最小の周期は 2π である．よって正弦関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である．

任意の実数 x について，

$$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x \ , \quad \cos(x \pm 4\pi) = \cos x \ , \quad \cos(x \pm 6\pi) = \cos x \ , \quad \cdots \ .$$

任意の実数 x について，

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x \ , \quad \sin(x \pm 4\pi) = \sin x \ , \quad \sin(x \pm 6\pi) = \sin x \ , \quad \cdots \ .$$

よって，$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \ldots$ は正弦関数 $\sin x$ の周期である．正弦関数 $\sin x$ の正の周期は $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, \ldots$ であり，このうち最小の周期は 2π である．よって正弦関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である．

任意の実数 x について，

$$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x \ , \quad \cos(x \pm 4\pi) = \cos x \ , \quad \cos(x \pm 6\pi) = \cos x \ , \quad \cdots \ .$$

よって，$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \ldots$ は余弦関数 $\cos x$ の周期である．

任意の実数 x について，

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x \ , \quad \sin(x \pm 4\pi) = \sin x \ , \quad \sin(x \pm 6\pi) = \sin x \ , \quad \cdots \ .$$

よって，$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \ldots$ は正弦関数 $\sin x$ の周期である．正弦関数 $\sin x$ の正の周期は $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, \ldots$ であり，このうち最小の周期は 2π である．よって正弦関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である．

任意の実数 x について，

$$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x \ , \quad \cos(x \pm 4\pi) = \cos x \ , \quad \cos(x \pm 6\pi) = \cos x \ , \quad \cdots \ .$$

よって，$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \ldots$ は余弦関数 $\cos x$ の周期である．余弦関数 $\cos x$ の正の周期は $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, \ldots$ であり，このうち最小の周期は 2π である．よって余弦関数 $\cos x$ の基本周期は 2π である．

$\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について，

$$\tan(x \pm \pi) = \tan x \ , \quad \tan(x \pm 2\pi) = \tan x \ , \quad \tan(x \pm 3\pi) = \tan x \ , \quad \cdots \ .$$

$\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について,

$$\tan(x \pm \pi) = \tan x \ , \quad \tan(x \pm 2\pi) = \tan x \ , \quad \tan(x \pm 3\pi) = \tan x \ , \quad \cdots \ .$$

よって, $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \ldots$ は正接関数 $\tan x$ の周期である.

$\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について,

$$\tan(x \pm \pi) = \tan x \ , \quad \tan(x \pm 2\pi) = \tan x \ , \quad \tan(x \pm 3\pi) = \tan x \ , \quad \cdots \ .$$

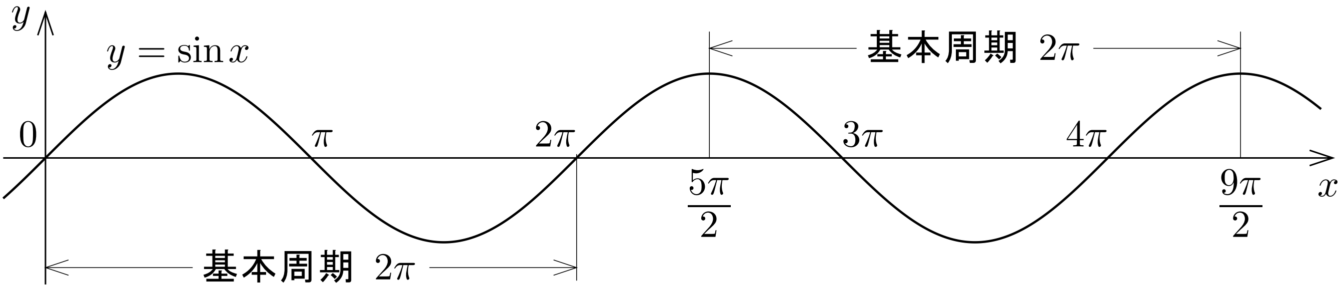
よって, $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \ldots$ は正接関数 $\tan x$ の周期である. 正接関数 $\tan x$ の正の周期は $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$ であり, このうち最小の周期は π である. よって正接関数 $\tan x$ の基本周期は π である.

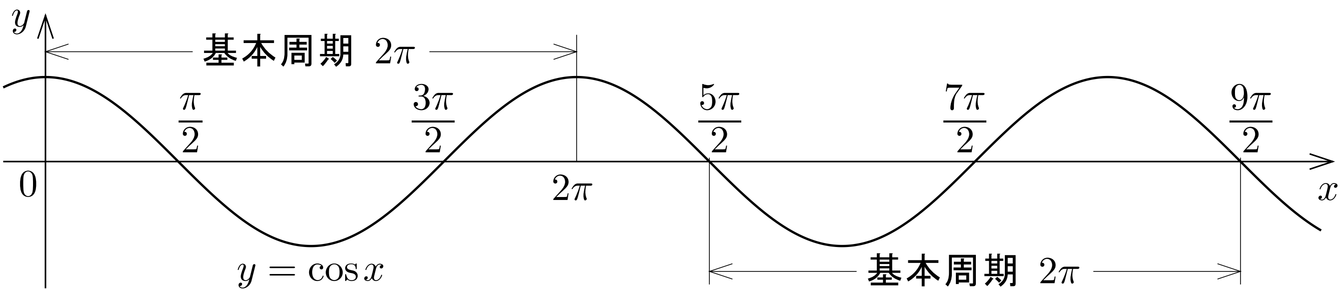
定理　正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ は周期関数であり，その基本周期は 2π である．正接関数 $\tan x$ は周期関数であり，その基本周期は π である．

定理　正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ は周期関数であり，その基本周期は 2π である．正接関数 $\tan x$ は周期関数であり，その基本周期は π である．

多くの場合，単に周期というと基本周期のことを意味する．周期関数の周期を問われたときは基本周期を答えること．

正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ の基本周期 2π は，xy 座標平面における $y=\sin x$ のグラフ及び $y=\cos x$ のグラフにおいて波一つ分の長さである.





例として関数 $f(x) = \sin(3x + 5)$ を考える.

例として関数　$f(x) = \sin(3x+5)$　を考える．任意の実数 x について，

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+5\right)$$

例として関数 $f(x)=\sin(3x+5)$ を考える．任意の実数 x について，

$$
\begin{aligned}
f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+5\right) = \sin\left(3x+3\cdot\frac{2\pi}{3}+5\right) \\
&= \sin(3x+2\pi+5)
\end{aligned}
$$

例として関数 $f(x) = \sin(3x+5)$ を考える．任意の実数 x について，

$$
\begin{aligned}
f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+5\right) = \sin\left(3x+3\cdot\frac{2\pi}{3}+5\right) \\
&= \sin(3x+2\pi+5) = \sin(3x+5)
\end{aligned}
$$

例として関数 $f(x) = \sin(3x+5)$ を考える．任意の実数 x について，

$$
\begin{aligned}
f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 5\right) = \sin\left(3x + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} + 5\right) \\
&= \sin(3x + 2\pi + 5) = \sin(3x+5) \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

例として関数 $f(x)=\sin(3x+5)$ を考える．任意の実数 x について，

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+5\right)=\sin\left(3x+3\cdot\frac{2\pi}{3}+5\right)$$

$$=\sin(3x+2\pi+5)=\sin(3x+5)$$

$$=f(x)$$

つまり $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=f(x)$ ．

例として関数 $f(x)=\sin(3x+5)$ を考える．任意の実数 x について，

$$
\begin{aligned}
f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+5\right) = \sin\left(3x+3\cdot\frac{2\pi}{3}+5\right) \\
&= \sin(3x+2\pi+5) = \sin(3x+5) \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

つまり $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=f(x)$ ．故に $\frac{2\pi}{3}$ は関数 $f(x)=\sin(3x+5)$ の周期である．更にこれは基本周期になる．

例として関数 $f(x)=\sin(3x+5)$ を考える．任意の実数 x について，

$$\begin{aligned}f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)&=\sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+5\right)=\sin\left(3x+3\cdot\frac{2\pi}{3}+5\right)\\&=\sin(3x+2\pi+5)=\sin(3x+5)\\&=f(x)\end{aligned}$$

つまり $f\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=f(x)$ ．故に $\dfrac{2\pi}{3}$ は関数 $f(x)=\sin(3x+5)$ の周期である．更にこれは基本周期になる．

1 次関数と三角関数との合成関数の基本周期について次の定理が成り立つ．

定理　定数 a と b とは実数で $a\neq 0$ とする．変数 x の関数 $\sin(ax+b)$ 及び関数 $\cos(ax+b)$ は周期関数であり，その基本周期は $\dfrac{2\pi}{|a|}$ である．また，関数 $\tan(ax+b)$ は周期関数であり，その基本周期は $\dfrac{\pi}{|a|}$ である．

周期関数と 1 次関数との合成関数の基本周期は次のようになる.

定理　定数 A と B とは実数で $A \neq 0$ とする. 周期関数 $f(x)$ の基本周期が p であるとき, 関数 $Af(x)+B$ も周期関数でその基本周期は p である.

周期関数と 1 次関数との合成関数の基本周期は次のようになる.

定理　定数 A と B とは実数で $A \neq 0$ とする. 周期関数 $f(x)$ の基本周期が p であるとき, 関数 $Af(x)+B$ も周期関数でその基本周期は p である.

つまり, 関数 $f(x)$ が周期関数であるとき, 定数 B と 0 でない定数 A とに対して, 関数 $Af(x)+B$ の基本周期は $f(x)$ の基本周期と同じである.

例 変数 x の関数 $\dfrac{7}{2}\sin\dfrac{9-7x}{5}+\dfrac{8}{3}$ の基本周期を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{7}{2}\sin\dfrac{9-7x}{5}+\dfrac{8}{3}$ の基本周期を求める.

$\sin\dfrac{9-7x}{5}=\sin\left(-\dfrac{7}{5}x+\dfrac{9}{5}\right)$ なので，x の関数 $\sin\dfrac{9-7x}{5}$ の基本周期は

$$\frac{\qquad}{\left|\qquad\right|}=\frac{\qquad}{\qquad}=\qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{7}{2}\sin\dfrac{9-7x}{5}+\dfrac{8}{3}$ の基本周期を求める.

$\sin\dfrac{9-7x}{5}=\sin\left(-\dfrac{7}{5}x+\dfrac{9}{5}\right)$ なので, x の関数 $\sin\dfrac{9-7x}{5}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|-\frac{7}{5}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{7}{5}}=\frac{10\pi}{7}\ .$$

例 変数 x の関数 $\frac{7}{2}\sin\frac{9-7x}{5}+\frac{8}{3}$ の基本周期を求める.

$\sin\frac{9-7x}{5}=\sin\left(-\frac{7}{5}x+\frac{9}{5}\right)$ なので, x の関数 $\sin\frac{9-7x}{5}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|-\frac{7}{5}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{7}{5}}=\frac{10\pi}{7}.$$

x の関数 $\frac{7}{2}\sin\frac{9-7x}{5}+\frac{8}{3}$ の基本周期も $\frac{10\pi}{7}$ である. 終

$\boxed{\text{問}10.5.1}$ 変数 x の関数 $7\cos\dfrac{8-5x}{3}+4$ の基本周期を求めよ.

$$\cos\frac{8-5x}{3} = \cos\left(\qquad x \qquad \right)$$ なので, x の関数 $\cos\dfrac{8-5x}{3}$ の基本周期は

$$\frac{\qquad}{\left|\qquad\right|} = \frac{\quad}{\quad} = \qquad .$$

x の関数 $7\cos\dfrac{8-5x}{3}+4$ の基本周期も　　　　である.

$\boxed{問 10.5.1}$ 変数 x の関数 $7\cos\dfrac{8-5x}{3}+4$ の基本周期を求めよ.

$\cos\dfrac{8-5x}{3}=\cos\left(-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{8}{3}\right)$ なので, x の関数 $\cos\dfrac{8-5x}{3}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|-\frac{5}{3}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{5}{3}}=\frac{6\pi}{5}\ .$$

x の関数 $7\cos\dfrac{8-5x}{3}+4$ の基本周期も $\dfrac{6\pi}{5}$ である. $\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{8}{3}\cos\dfrac{\pi(7x-6)}{5}-\dfrac{9}{4}$ の基本周期を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{8}{3}\cos\dfrac{\pi(7x-6)}{5}-\dfrac{9}{4}$ の基本周期を求める.

$\cos\dfrac{\pi(7x-6)}{5}=\cos\left(\dfrac{7\pi}{5}x-\dfrac{6\pi}{5}\right)$ なので, x の関数 $\cos\dfrac{\pi(7x-6)}{5}$ の基本周期は

$$\frac{\qquad}{\left|\qquad\right|}=\frac{\qquad}{\qquad}=\qquad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{8}{3}\cos\dfrac{\pi(7x-6)}{5}-\dfrac{9}{4}$ の基本周期を求める.

$\cos\dfrac{\pi(7x-6)}{5}=\cos\left(\dfrac{7\pi}{5}x-\dfrac{6\pi}{5}\right)$ なので, x の関数 $\cos\dfrac{\pi(7x-6)}{5}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|\dfrac{7\pi}{5}\right|}=\frac{2\pi}{\dfrac{7\pi}{5}}=\frac{10}{7}.$$

例 変数 x の関数 $\frac{8}{3}\cos\frac{\pi(7x-6)}{5}-\frac{9}{4}$ の基本周期を求める.

$\cos\frac{\pi(7x-6)}{5}=\cos\left(\frac{7\pi}{5}x-\frac{6\pi}{5}\right)$ なので, x の関数 $\cos\frac{\pi(7x-6)}{5}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{7\pi}{5}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{7\pi}{5}}=\frac{10}{7}.$$

x の関数 $\frac{8}{3}\cos\frac{\pi(7x-6)}{5}-\frac{9}{4}$ の基本周期も $\frac{10}{7}$ である. 終

$\boxed{問 10.5.2}$ 変数 x の関数 $7-4\sin\dfrac{\pi(6x-1)}{5}$ の基本周期を求めよ.

$\sin\dfrac{\pi(6x-1)}{5} = \sin\left(\quad x \quad\right)$ なので, x の関数 $\sin\dfrac{\pi(6x-1)}{5}$ の基本周期は

$$\frac{\qquad}{\left|\qquad\right|} = \frac{\qquad}{\qquad} = \qquad .$$

x の関数 $7-4\sin\dfrac{\pi(6x-1)}{5}$ の基本周期も　　である.

$\boxed{\text{問}\,10.5.2}$ 変数 x の関数 $7-4\sin\dfrac{\pi(6x-1)}{5}$ の基本周期を求めよ.

$\sin\dfrac{\pi(6x-1)}{5}=\sin\left(\dfrac{6\pi}{5}x-\dfrac{\pi}{5}\right)$ なので, x の関数 $\sin\dfrac{\pi(6x-1)}{5}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{6\pi}{5}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{6\pi}{5}}=\frac{5}{3}\,.$$

x の関数 $7-4\sin\dfrac{\pi(6x-1)}{5}$ の基本周期も $\dfrac{5}{3}$ である. $\boxed{\text{終}}$

例 変数 x の関数 $\dfrac{7}{6}\tan\dfrac{4x-3}{5}+\dfrac{9}{8}$ の基本周期を求める.

例 変数 x の関数 $\dfrac{7}{6}\tan\dfrac{4x-3}{5}+\dfrac{9}{8}$ の基本周期を求める.

$\tan\dfrac{4x-3}{5}=\tan\left(\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}\right)$ なので, x の関数 $\tan\dfrac{4x-3}{5}$ の基本周期は

$$\frac{\qquad}{\left|\qquad\right|} = \frac{\qquad}{\qquad} = \qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{7}{6}\tan\dfrac{4x-3}{5}+\dfrac{9}{8}$ の基本周期を求める.

$\tan\dfrac{4x-3}{5}=\tan\left(\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}\right)$ なので，x の関数 $\tan\dfrac{4x-3}{5}$ の基本周期は

$$\frac{\pi}{\left|\frac{4}{5}\right|}=\frac{\pi}{\frac{4}{5}}=\frac{5\pi}{4}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{7}{6}\tan\dfrac{4x-3}{5}+\dfrac{9}{8}$ の基本周期を求める.

$\tan\dfrac{4x-3}{5}=\tan\left(\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}\right)$ なので, x の関数 $\tan\dfrac{4x-3}{5}$ の基本周期は

$$\frac{\pi}{\left|\frac{4}{5}\right|}=\frac{\pi}{\frac{4}{5}}=\frac{5\pi}{4}\ .$$

x の関数 $\dfrac{7}{6}\tan\dfrac{4x-3}{5}+\dfrac{9}{8}$ の基本周期も $\dfrac{5\pi}{4}$ である. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}10.5.3}$ 変数 x の関数 $\dfrac{2}{5}\tan\dfrac{\pi(3x+5)}{4}$ の基本周期を求めよ.

$\tan\dfrac{\pi(3x+5)}{4} = \tan\left(\quad x \qquad \right)$ なので, x の関数 $\dfrac{\pi(3x+5)}{4}$ の基本周期は

$$\frac{\qquad}{\left|\quad\right|} = \frac{\qquad}{\qquad} = \qquad .$$

x の関数 $\dfrac{2}{5}\tan\dfrac{\pi(3x+5)}{4}$ の基本周期も　　である.

$\boxed{\text{問 } 10.5.3}$ 変数 x の関数 $\dfrac{2}{5}\tan\dfrac{\pi(3x+5)}{4}$ の基本周期を求めよ.

$\tan\dfrac{\pi(3x+5)}{4} = \tan\left(\dfrac{3\pi}{4}x + \dfrac{5\pi}{4}\right)$ なので，x の関数 $\dfrac{\pi(3x+5)}{4}$ の基本周期は

$$\frac{\pi}{\left|\dfrac{3\pi}{4}\right|} = \frac{\pi}{\dfrac{3\pi}{4}} = \frac{4}{3}\ .$$

x の関数 $\dfrac{2}{5}\tan\dfrac{\pi(3x+5)}{4}$ の基本周期も $\dfrac{4}{3}$ である. $\boxed{\text{終}}$