10.8 三角関数の相互関係

例えば, $(\sin x)^2$ を $\sin^2 x$ のように, $(\cos t)^3$ を $\cos^3 t$ のように略す：

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \ , \qquad \cos^3 t = (\cos t)^3 \ .$$

$\sin^2 x = (\sin x)^2$ と $\sin x^2 = \sin(x^2)$ とは通常は等しくない.

任意の一般角 θ について

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \ .$$

角度 θ は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

任意の一般角 θ について

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \ .$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\,\mathrm{rad}$ について

$$\{\sin(a\,\mathrm{rad})\}^2 + \{\cos(a\,\mathrm{rad})\}^2 = 1 \ ;$$

任意の一般角 θ について

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 \;=\; 1\;\;.$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\,\mathrm{rad}$ について

$$\{\sin(a\,\mathrm{rad})\}^2 + \{\cos(a\,\mathrm{rad})\}^2 \;=\; 1\;\;;$$

$\sin(a\,\mathrm{rad}) = \sin a$ ， $\cos(a\,\mathrm{rad}) = \cos a$ なので

$$(\sin a)^2 + (\cos a)^2 \;=\; 1$$

つまり

$$\sin^2 a + \cos^2 a \;=\; 1\;\;.$$

任意の実数 a について

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \ .$$

任意の実数 a について

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \ .$$

a は $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとする． $\cos a \neq 0$ なので両辺を $\cos^2 a$ で割る：

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} \ ,$$

任意の実数 a について

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \ .$$

a は $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとする． $\cos a \neq 0$ なので両辺を $\cos^2 a$ で割る：

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} \ ,$$

$$\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} \ ,$$

任意の実数 a について

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \ .$$

a は $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとする． $\cos a \neq 0$ なので両辺を $\cos^2 a$ で割る：

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} \ ,$$

$$\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} \ ,$$

$$\tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} \ ,$$

任意の実数 a について

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \ .$$

a は $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとする． $\cos a \neq 0$ なので両辺を $\cos^2 a$ で割る：

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} \ ,$$

$$\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} \ ,$$

$$\tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} \ ,$$

$\sec a = \dfrac{1}{\cos a}$ なので $\dfrac{1}{\cos^2 a} = \sec^2 a$.

任意の実数 a について

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \ .$$

a は $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとする. $\cos a \neq 0$ なので両辺を $\cos^2 a$ で割る:

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} \ ,$$

$$\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} \ ,$$

$$\tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} \ ,$$

$\sec a = \dfrac{1}{\cos a}$ なので $\dfrac{1}{\cos^2 a} = \sec^2 a$. よって

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} = \sec^2 a \ .$$

このように以下の定理が導かれる.

定理　$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 a について,

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \ .$$

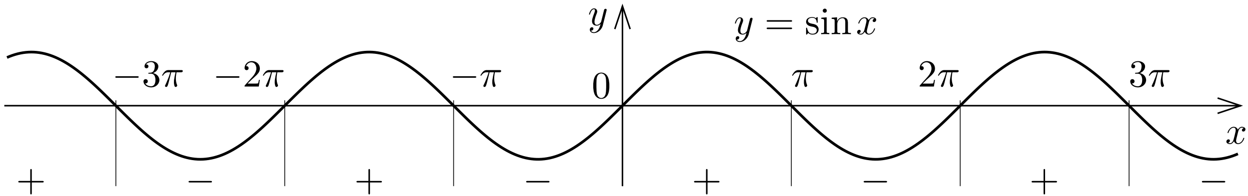
定理　任意の実数 a について,

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \ .$$

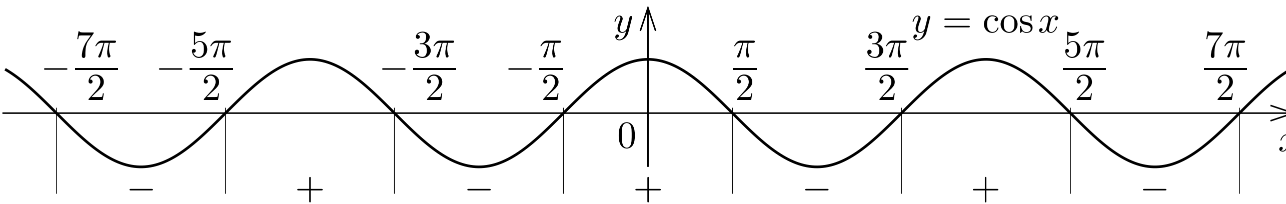
定理　$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 a について,

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} = \sec^2 a \ .$$

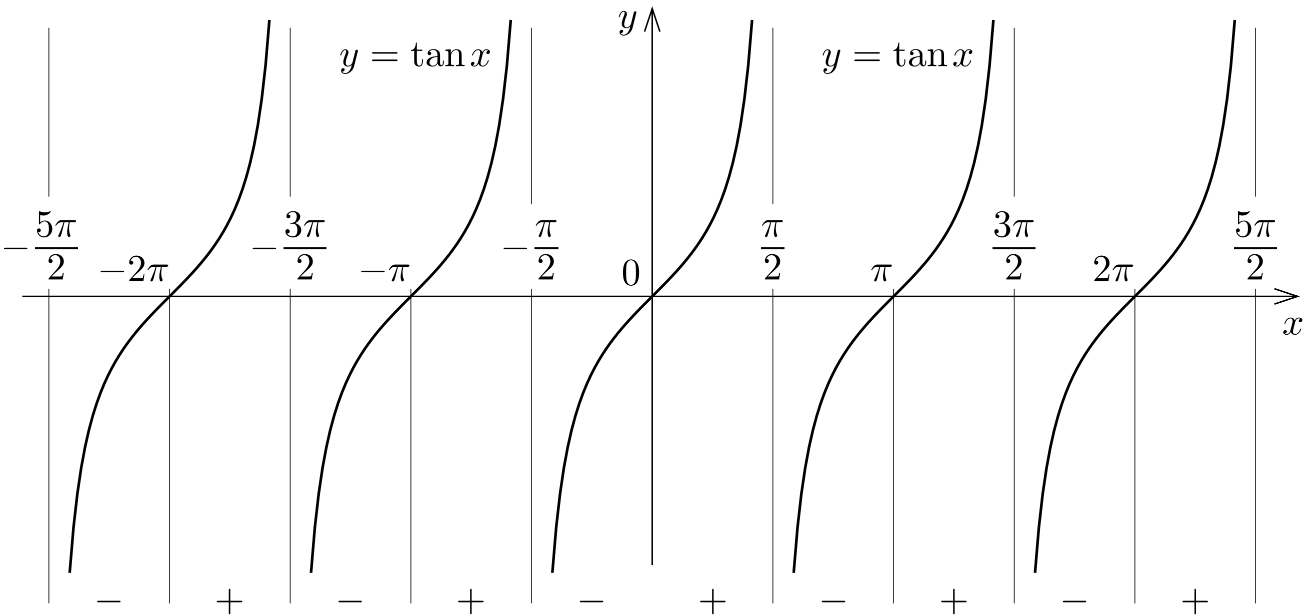
正弦関数 $\sin x$ について，グラフより値の符号は次のようになる．



余弦関数 $\cos x$ について，グラフより値の符号は次のようになる．



正接関数 $\tan x$ について，グラフより値の符号は次のようになる.



$\boxed{\text{例}}$ 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\cos x = \dfrac{3}{5}$ とする. $\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求める.

例 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\cos x = \dfrac{3}{5}$ とする．$\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求める．

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので，$\cos x = \dfrac{3}{5}$ より

$$\sin^2 x = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \qquad .$$

$\boxed{例}$ 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\cos x = \dfrac{3}{5}$ とする．$\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求める．

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので，$\cos x = \dfrac{3}{5}$ より

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ **実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\cos x = \dfrac{3}{5}$ とする．$\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求める．**

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので，$\cos x = \dfrac{3}{5}$ より

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \ .$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ より $\sin x \quad 0$ なので，

$$\sin x = \qquad\qquad = \qquad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\cos x = \dfrac{3}{5}$ とする．$\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求める．

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので，$\cos x = \dfrac{3}{5}$ より

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}\ .$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので，

$$\sin x = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}\ .$$

更に

$$\tan x = \frac{}{} = \frac{}{} = \qquad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\cos x = \dfrac{3}{5}$ とする. $\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求める.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので, $\cos x = \dfrac{3}{5}$ より

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} .$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので,

$$\sin x = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5} .$$

更に

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}10.8.1}$ 実数 x について $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin x = -\dfrac{2}{3}$ とする．$\cos x$ の値と $\tan x$ の値とを求めよ．

$$\cos^2 x = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \qquad .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos x \quad 0$ なので，$\cos x = \qquad = \qquad$．更に

$$\tan x = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad} = \qquad .$$

$\boxed{問10.8.1}$ 実数 x について $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin x = -\dfrac{2}{3}$ とする．$\cos x$ の値と $\tan x$ の値とを求めよ．

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos x \geq 0$ なので， $\cos x = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ．更に

$$\tan x = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad} = \qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{問}10.8.1}$ 実数 x について $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin x = -\dfrac{2}{3}$ とする． $\cos x$ の値と $\tan x$ の値とを求めよ．

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \ .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos x \geq 0$ なので， $\cos x = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ．更に

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = -2$ とする. $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求める.

$\boxed{例}$ 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = -2$ とする．$\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求める．

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので，$\tan x = -2$ より

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + (-2)^2 = 5 \ ,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = -2$ とする．$\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求める．

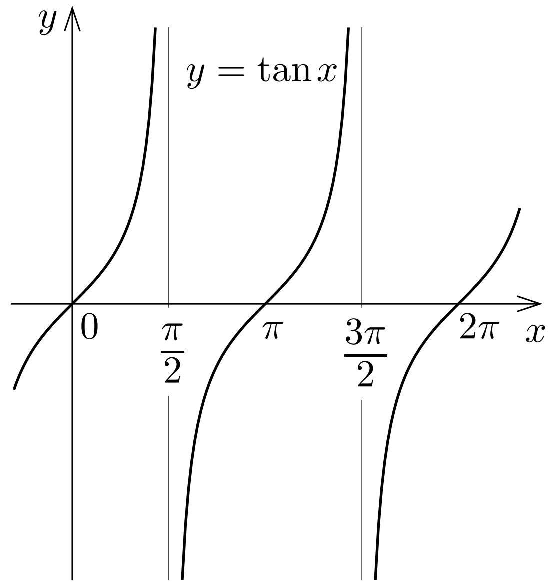
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$ なので，$\tan x = -2$ より

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + (-2)^2 = 5 \ ,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5} \ .$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x < 0$ なので

$\quad < x < \quad$，よって $\cos x \quad 0$ なので，

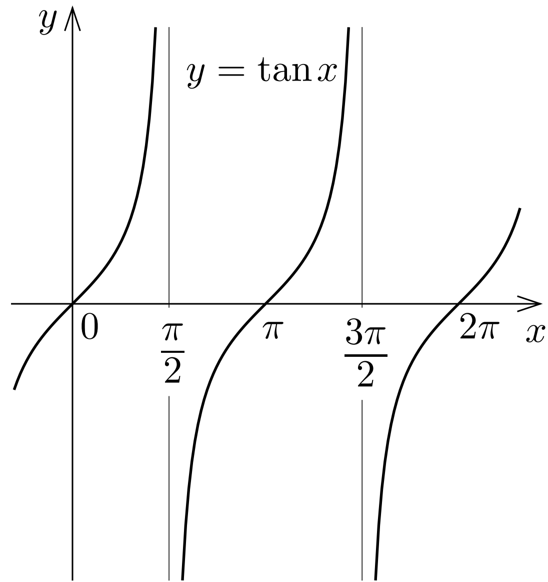


$\boxed{例}$ 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = -2$ とする. $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求める.

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad なので, \quad \tan x = -2 \quad より$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + (-2)^2 = 5 \ ,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5} \ .$$



$\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x < 0$ なので

$\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, よって $\cos x > 0$ なので,

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = -2$ とする．$\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求める．

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$ なので，$\tan x = -2$ より

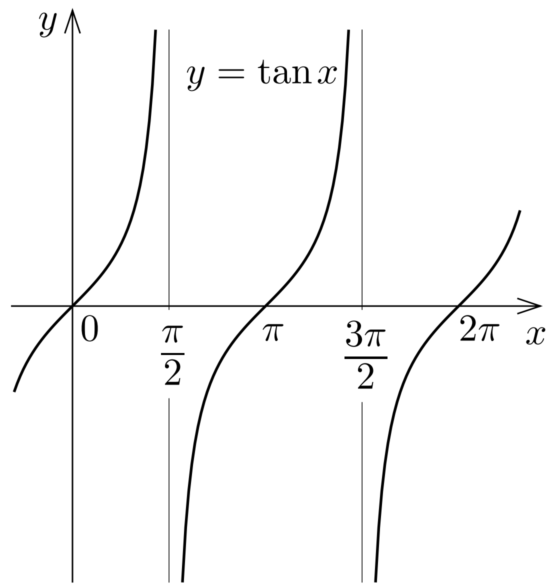
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + (-2)^2 = 5 \ ,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5} \ .$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x < 0$ なので

$\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ，よって $\cos x > 0$ なので，

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ .$$



例 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = -2$ とする. $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求める.

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので, $\tan x = -2$ より

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + (-2)^2 = 5\ ,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5}\ .$$

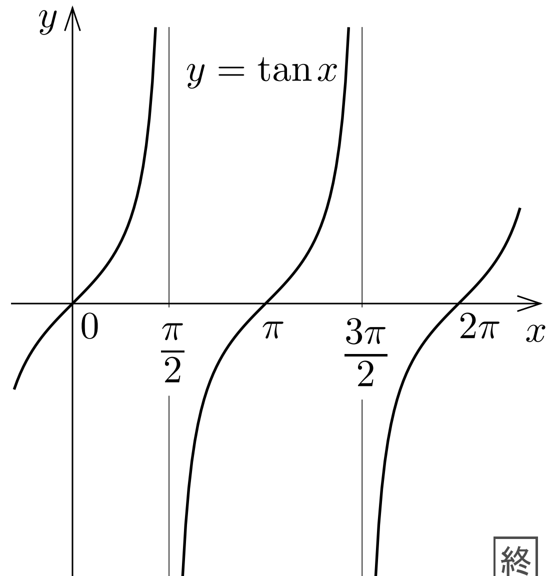
$\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x < 0$ なので

$\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, よって $\cos x > 0$ なので,

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ .$$

更に $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ なので,

$$\sin x = \tan x \cos x = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\ .$$

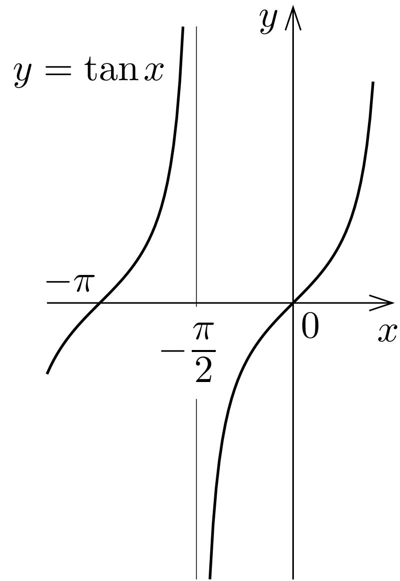


終

$\boxed{問10.8.2}$ 実数 x について $-\pi \leq x \leq 0$ かつ $\tan x = \dfrac{3}{2}$ とする．$\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求めよ．

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \qquad = \qquad = \qquad ,$$

$$\cos^2 x = \qquad .$$



$-\pi \leq x \leq 0$ かつ $\tan x > 0$ なので

$\qquad < x < \qquad$，よって $\cos x \quad 0$ なので，

$$\cos x = \qquad = \qquad .$$

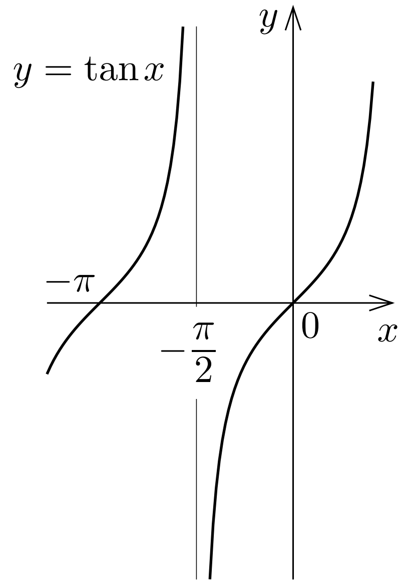
更に，$\tan x = \underline{\qquad}$ なので

$$\sin x = \qquad = \qquad = \qquad .$$

$\boxed{\text{問}10.8.2}$ 実数 x について $-\pi \leq x \leq 0$ かつ $\tan x = \dfrac{3}{2}$ とする．$\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求めよ．

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \ ,$$

$$\cos^2 x = \frac{4}{13} \ .$$



$-\pi \leq x \leq 0$ かつ $\tan x > 0$ なので

$-\pi < x < -\dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos x < 0$ なので，

$$\cos x = -\sqrt{\frac{4}{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}} \ .$$

更に， $\tan x = \text{——}$ なので

$$\sin x = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

$\boxed{問10.8.2}$ 実数 x について $-\pi \leq x \leq 0$ かつ $\tan x = \dfrac{3}{2}$ とする．$\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求めよ．

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}\ ,$$

$$\cos^2 x = \frac{4}{13}\ .$$

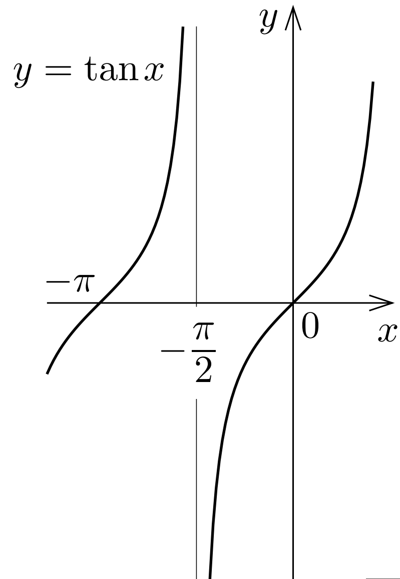
$-\pi \leq x \leq 0$ かつ $\tan x > 0$ なので

$-\pi < x < -\dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos x < 0$ なので，

$$\cos x = -\sqrt{\frac{4}{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\ .$$

更に， $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ なので

$$\sin x = \tan x \cos x = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{13}}\ .$$



$\boxed{終}$