

10.9 三角関数の諸公式

任意の一般角 α, β について, 正弦の加法定理より,

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{複号同順}).$$

角度 α, β は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

任意の一般角 α, β について, 正弦の加法定理より,

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{複号同順}).$$

任意の実数 a に対する一般角 $a \text{ rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b \text{ rad}$ について,

$$\sin(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \sin(a \text{ rad}) \cos(b \text{ rad}) \pm \cos(a \text{ rad}) \sin(b \text{ rad}) \quad (\text{複号同順}).$$

任意の一般角 α, β について，正弦の加法定理より，

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{複号同順}) .$$

任意の実数 a に対する一般角 $a \text{ rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b \text{ rad}$ について，

$$\sin(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \sin(a \text{ rad}) \cos(b \text{ rad}) \pm \cos(a \text{ rad}) \sin(b \text{ rad}) \quad (\text{複号同順}) .$$

ここで

$$\sin(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \sin\{(a \pm b) \text{ rad}\} = \sin(a \pm b) \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$\sin(a \text{ rad}) = \sin a , \quad \cos(a \text{ rad}) = \cos a ,$$

$$\sin(b \text{ rad}) = \sin b , \quad \cos(b \text{ rad}) = \cos b ,$$

任意の一般角 α, β について，正弦の加法定理より，

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{複号同順}) .$$

任意の実数 a に対する一般角 $a \text{ rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b \text{ rad}$ について，

$$\sin(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \sin(a \text{ rad}) \cos(b \text{ rad}) \pm \cos(a \text{ rad}) \sin(b \text{ rad}) \quad (\text{複号同順}) .$$

ここで

$$\sin(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \sin\{(a \pm b) \text{ rad}\} = \sin(a \pm b) \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$\sin(a \text{ rad}) = \sin a , \quad \cos(a \text{ rad}) = \cos a ,$$

$$\sin(b \text{ rad}) = \sin b , \quad \cos(b \text{ rad}) = \cos b ,$$

よって

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad (\text{複号同順}) .$$

任意の一般角 α, β について、余弦の加法定理より、

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{複号同順}) .$$

角度 α, β は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

任意の一般角 α, β について、余弦の加法定理より、

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \quad (\text{複号同順}) .$$

任意の実数 a に対する一般角 $a \text{ rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b \text{ rad}$ について、

$$\cos(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \cos(a \text{ rad}) \cos(b \text{ rad}) \mp \sin(a \text{ rad}) \sin(b \text{ rad}) \quad (\text{複号同順}) .$$

任意の一般角 α, β について、余弦の加法定理より、

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \quad (\text{複号同順}) .$$

任意の実数 a に対する一般角 $a \text{ rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b \text{ rad}$ について、

$$\cos(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \cos(a \text{ rad}) \cos(b \text{ rad}) \mp \sin(a \text{ rad}) \sin(b \text{ rad}) \quad (\text{複号同順}) .$$

ここで

$$\cos(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \cos\{(a \pm b) \text{ rad}\} = \cos(a \pm b) \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$\sin(a \text{ rad}) = \sin a , \quad \cos(a \text{ rad}) = \cos a ,$$

$$\sin(b \text{ rad}) = \sin b , \quad \cos(b \text{ rad}) = \cos b ,$$

任意の一般角 α, β について，余弦の加法定理より，

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{複号同順}) .$$

任意の実数 a に対する一般角 $a \text{ rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b \text{ rad}$ について，

$$\cos(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \cos(a \text{ rad}) \cos(b \text{ rad}) \mp \sin(a \text{ rad}) \sin(b \text{ rad}) \quad (\text{複号同順}) .$$

ここで

$$\cos(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \cos\{(a \pm b) \text{ rad}\} = \cos(a \pm b) \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$\sin(a \text{ rad}) = \sin a , \quad \cos(a \text{ rad}) = \cos a ,$$

$$\sin(b \text{ rad}) = \sin b , \quad \cos(b \text{ rad}) = \cos b ,$$

よって

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad (\text{複号同順}) .$$

一般角 α, β について, $\tan \alpha, \tan \beta$, 及び $\tan(\alpha + \beta)$ あるいは $\tan(\alpha - \beta)$ の値があるとき, 正接の加法定理より,

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{複号同順}).$$

角度 α, β は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

一般角 α, β について, $\tan \alpha, \tan \beta$, 及び $\tan(\alpha + \beta)$ あるいは $\tan(\alpha - \beta)$ の値があるとき, 正接の加法定理より,

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{複号同順}).$$

実数 a に対する一般角 $a \text{ rad}$ 及び実数 b に対する一般角 $b \text{ rad}$ について, $\tan(a \text{ rad}), \tan(b \text{ rad}),$ 及び $\tan(a \text{ rad} + b \text{ rad})$ あるいは $\tan(a \text{ rad} - b \text{ rad})$ の値があるとき,

$$\tan(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \frac{\tan(a \text{ rad}) \pm \tan(b \text{ rad})}{1 \mp \tan(a \text{ rad}) \tan(b \text{ rad})} \quad (\text{複号同順}).$$

一般角 α, β について, $\tan \alpha, \tan \beta$, 及び $\tan(\alpha + \beta)$ あるいは $\tan(\alpha - \beta)$ の値があるとき, 正接の加法定理より,

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{複号同順}).$$

実数 a に対する一般角 $a \text{ rad}$ 及び実数 b に対する一般角 $b \text{ rad}$ について, $\tan(a \text{ rad}), \tan(b \text{ rad}),$ 及び $\tan(a \text{ rad} + b \text{ rad})$ あるいは $\tan(a \text{ rad} - b \text{ rad})$ の値があるとき,

$$\tan(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \frac{\tan(a \text{ rad}) \pm \tan(b \text{ rad})}{1 \mp \tan(a \text{ rad}) \tan(b \text{ rad})} \quad (\text{複号同順}).$$

ここで,

$$\tan(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \tan\{(a \pm b) \text{ rad}\} = \tan(a \pm b) \quad (\text{複号同順}),$$

$$\tan(a \text{ rad}) = \tan a, \quad \tan(b \text{ rad}) = \tan b,$$

一般角 α, β について, $\tan \alpha, \tan \beta$, 及び $\tan(\alpha + \beta)$ あるいは $\tan(\alpha - \beta)$ の値があるとき, 正接の加法定理より,

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{複号同順}).$$

実数 a に対する一般角 $a \text{ rad}$ 及び実数 b に対する一般角 $b \text{ rad}$ について, $\tan(a \text{ rad}), \tan(b \text{ rad}),$ 及び $\tan(a \text{ rad} + b \text{ rad})$ あるいは $\tan(a \text{ rad} - b \text{ rad})$ の値があるとき,

$$\tan(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \frac{\tan(a \text{ rad}) \pm \tan(b \text{ rad})}{1 \mp \tan(a \text{ rad}) \tan(b \text{ rad})} \quad (\text{複号同順}).$$

ここで,

$$\tan(a \text{ rad} \pm b \text{ rad}) = \tan\{(a \pm b) \text{ rad}\} = \tan(a \pm b) \quad (\text{複号同順}),$$

$$\tan(a \text{ rad}) = \tan a, \quad \tan(b \text{ rad}) = \tan b,$$

よって

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \quad (\text{複号同順}).$$

定理（正弦関数・余弦関数の加法定理） 任意の実数 a と b について、

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad (\text{複号同順}),$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad (\text{複号同順}).$$

定理（正接関数の加法定理） 実数 a と b について、 $\tan a$, $\tan b$, 及び $\tan(a + b)$ あるいは $\tan(a - b)$ の値があるとき、

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \quad (\text{複号同順}).$$

三角関数の加法定理は覚えること.

例 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$, $\cos x = \frac{3}{4}$ とする. 実数 y について $\frac{3\pi}{2} \leq y \leq \frac{5\pi}{2}$, $\sin y = -\frac{1}{3}$ とする. $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する.

例 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$, $\cos x = \frac{3}{4}$ とする. 実数 y について $\frac{3\pi}{2} \leq y \leq \frac{5\pi}{2}$, $\sin y = -\frac{1}{3}$ とする. $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する.

$$\sin^2 x = \quad = \quad = \quad = \quad ,$$

例 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$, $\cos x = \frac{3}{4}$ とする. 実数 y について $\frac{3\pi}{2} \leq y \leq \frac{5\pi}{2}$, $\sin y = -\frac{1}{3}$ とする. $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} ,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x < 0$ なので,

$$\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4} .$$

例 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$, $\cos x = \frac{3}{4}$ とする. 実数 y について $\frac{3\pi}{2} \leq y \leq \frac{5\pi}{2}$, $\sin y = -\frac{1}{3}$ とする. $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} ,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので,

$$\sin x = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} .$$

例 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$, $\cos x = \frac{3}{4}$ とする. 実数 y について $\frac{3\pi}{2} \leq y \leq \frac{5\pi}{2}$, $\sin y = -\frac{1}{3}$ とする. $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} ,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので,

$$\sin x = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} .$$

また,

$$\cos^2 y = \quad = \quad = \quad = \quad ,$$

例 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$, $\cos x = \frac{3}{4}$ とする. 実数 y について $\frac{3\pi}{2} \leq y \leq \frac{5\pi}{2}$, $\sin y = -\frac{1}{3}$ とする. $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} ,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので,

$$\sin x = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} .$$

また,

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} ,$$

$\frac{3\pi}{2} \leq y \leq \frac{5\pi}{2}$ より $\cos y \geq 0$ なので,

$$\cos y = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} .$$

例 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$, $\cos x = \frac{3}{4}$ とする. 実数 y について $\frac{3\pi}{2} \leq y \leq \frac{5\pi}{2}$, $\sin y = -\frac{1}{3}$ とする. $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} ,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので,

$$\sin x = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} .$$

また,

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} ,$$

$\frac{3\pi}{2} \leq y \leq \frac{5\pi}{2}$ より $\cos y \geq 0$ なので,

$$\cos y = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} .$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \cos x = \frac{3}{4}, \quad \sin y = -\frac{1}{3}, \quad \cos y = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

正弦関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y = -\frac{\sqrt{7}}{4} \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{14}}{6} - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

余弦関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{3}{4} \frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{12}.\end{aligned}$$

問10.9.1 実数 a について $\frac{5\pi}{2} \leq a \leq \frac{7\pi}{2}$, $\sin a = \frac{5}{6}$ とする. 実数 b について $2\pi \leq b \leq 3\pi$, $\cos b = -\frac{2}{3}$ とする. $\sin(a+b)$ 及び $\cos(a+b)$ を計算せよ.

$$\cos^2 a = \quad = \quad = \quad = \quad ,$$

$\frac{5\pi}{2} \leq a \leq \frac{7\pi}{2}$ より $\cos a \leq 0$ なので,

$$\cos a = \quad = \quad .$$

また,

$$\sin^2 b = \quad = \quad = \quad = \quad ,$$

$2\pi \leq b \leq 3\pi$ より $\sin b \leq 0$ なので,

$$\sin b = \quad = \quad .$$

問10.9.1 実数 a について $\frac{5\pi}{2} \leq a \leq \frac{7\pi}{2}$, $\sin a = \frac{5}{6}$ とする. 実数 b について $2\pi \leq b \leq 3\pi$, $\cos b = -\frac{2}{3}$ とする. $\sin(a+b)$ 及び $\cos(a+b)$ を計算せよ.

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} ,$$

$\frac{5\pi}{2} \leq a \leq \frac{7\pi}{2}$ より $\cos a \leq 0$ なので,

$$\cos a = -\sqrt{\frac{11}{36}} = -\frac{\sqrt{11}}{6} .$$

また,

$$\sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} ,$$

$2\pi \leq b \leq 3\pi$ より $\sin b \geq 0$ なので,

$$\sin b = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} .$$

$$\sin a = \frac{5}{6}, \quad \cos a = -\frac{\sqrt{11}}{6}, \quad \sin b = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \cos b = -\frac{2}{3}.$$

正弦関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= -\frac{10 + \sqrt{55}}{18}.\end{aligned}$$

余弦関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b = -\frac{\sqrt{11}}{6} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{5}{6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{11} - 5\sqrt{5}}{18}.\end{aligned}$$

例 実数 a について $\tan a = 3$ とし, 実数 b について $\tan b = 7$ とする.

$\tan(a + b)$ 及び $\tan(a - b)$ を計算する.

正接関数の加法定理を用いる.

$$\tan(a + b) =$$

$$\tan(a - b) =$$

例 実数 a について $\tan a = 3$ とし, 実数 b について $\tan b = 7$ とする.

$\tan(a+b)$ 及び $\tan(a-b)$ を計算する.

正接関数の加法定理を用いる.

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{3+7}{1-3 \cdot 7} = \frac{10}{-20} = -\frac{1}{2}.$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} = \frac{3-7}{1+3 \cdot 7} = \frac{-4}{22} = -\frac{2}{11}.$$

問10.9.2 実数 x について $\tan x = \frac{2}{7}$ とし, 実数 y について $\tan y = 3$ とする. $\tan(x+y)$ 及び $\tan(x-y)$ を計算せよ.

正接関数の加法定理を用いる.

$$\tan(x+y) =$$

$$\tan(x-y) =$$

問10.9.2 実数 x について $\tan x = \frac{2}{7}$ とし, 実数 y について $\tan y = 3$ とする. $\tan(x+y)$ 及び $\tan(x-y)$ を計算せよ.

正接関数の加法定理を用いる.

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{2}{7} + 3}{1 - \frac{2}{7} \cdot 3} = 23 .$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} = \frac{\frac{2}{7} - 3}{1 + \frac{2}{7} \cdot 3} = -\frac{19}{13} .$$

定理 (正弦関数・余弦関数の加法定理) 任意の実数 a と b について,

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad (\text{複号同順}),$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad (\text{複号同順}).$$

定理 (正接関数の加法定理) 実数 a と b について, $\tan a$, $\tan b$, 及び $\tan(a+b)$ あるいは $\tan(a-b)$ の値が存在するとき,

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \quad (\text{複号同順}).$$

三角関数の加法定理から幾つかの公式を導く.

実数 a, b について, 正弦関数の加法定理の等式

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

において $b = a$ とすると,

$$\sin(a + a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a ,$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a .$$

実数 a, b について, 余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

において $b = a$ とすると,

$$\cos(a + a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a .$$

実数 a, b について, 余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

において $b = a$ とすると,

$$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a .$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ より $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ なので,

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 ,$$

実数 a, b について, 余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

において $b = a$ とすると,

$$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a .$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ より $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ なので,

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 ,$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ より $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ なので,

$$\cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a ,$$

実数 a, b について, 余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

において $b = a$ とすると,

$$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a .$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ より $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ なので,

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 ,$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ より $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ なので,

$$\cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a ,$$

故に

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a .$$

実数 a, b について, 正接関数の加法定理の等式

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

において $b = a$ とすると

$$\tan(a+a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \tan a} ,$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} .$$

定理 任意の実数 a について,

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a ,$$

a が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でも $\frac{\pi}{4}$ の奇数倍でもないとき $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} .$

任意の実数 a について,

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a .$$

任意の実数 a について,

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a .$$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ より,

$$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a ,$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} .$$

任意の実数 a について,

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a .$$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ より,

$$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a ,$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} .$$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ より,

$$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a ,$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} .$$

任意の実数 a について,

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a .$$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ より,

$$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a ,$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} .$$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ より,

$$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a ,$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} .$$

定理 任意の実数 a について,

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} , \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} .$$

実数 a, b について, 余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

について左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{r} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ + \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \cos(a + b) + \cos(a - b) = \end{array}$$

実数 a, b について, 余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

について左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{r} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ + \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b \end{array}$$

よって

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \{ \cos(a + b) + \cos(a - b) \} .$$

実数 a, b について, 余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

について左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{r} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ - \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \cos(a + b) - \cos(a - b) = \end{array}$$

実数 a, b について, 余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

について左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{r} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ - \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \cos(a + b) - \cos(a - b) = -2\sin a \sin b \end{array}$$

よって

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} \{ \cos(a + b) - \cos(a - b) \} .$$

実数 a, b について, 正弦関数の加法定理の等式

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

について左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{r} \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ + \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \hline \sin(a + b) + \sin(a - b) = \end{array}$$

実数 a, b について, 正弦関数の加法定理の等式

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

について左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{r} \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ + \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \hline \sin(a + b) + \sin(a - b) = 2\sin a \cos b \end{array}$$

よって

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \{ \sin(a + b) + \sin(a - b) \} .$$

定理 任意の実数 a と b について,

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\} ,$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\} ,$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\} .$$

例 変数 x の式 $\cos(3x + 2) \cos(5x - 7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形する. .

例 変数 x の式 $\cos(3x+2)\cos(5x-7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形する.

公式 $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\cos(3x+2)\cos(5x-7) &= \frac{1}{2}[\cos\{(3x+2)+(5x-7)\} + \cos\{(3x+2)-(5x-7)\}] \\ &= \frac{1}{2}\{\cos(8x-5) + \cos(-2x+9)\} ,\end{aligned}$$

例 変数 x の式 $\cos(3x+2)\cos(5x-7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形する.

公式 $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\cos(3x+2)\cos(5x-7) &= \frac{1}{2}[\cos\{(3x+2)+(5x-7)\} + \cos\{(3x+2)-(5x-7)\}] \\ &= \frac{1}{2}\{\cos(8x-5) + \cos(-2x+9)\},\end{aligned}$$

ここで $\cos(-2x+9) = \cos\{-(2x-9)\} = \cos(2x-9)$ なので,

$$\cos(3x+2)\cos(5x-7) = \frac{1}{2}\{\cos(8x-5) + \cos(2x-9)\}.$$

終

問10.9.3 変数 x の式 $\sin(2x+1)\cos(5x+7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形せよ.

問10.9.3 変数 x の式 $\sin(2x+1)\cos(5x+7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形せよ.

$$\begin{aligned}\sin(2x+1)\cos(5x+7) &= \frac{1}{2}\{\sin(7x+8) + \sin(-3x-6)\} \\ &= \frac{1}{2}[\sin(7x+8) + \sin\{-(3x+6)\}] \\ &= \frac{1}{2}\{\sin(7x+8) - \sin(3x+6)\} .\end{aligned}$$

終

問10.9.4 変数 x の式 $\sin(3x - 5) \sin(6x - 1)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形せよ.

問10.9.4 変数 x の式 $\sin(3x - 5) \sin(6x - 1)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形せよ.

$$\begin{aligned}\sin(3x - 5) \sin(6x - 1) &= -\frac{1}{2} \{ \cos(9x - 6) - \cos(-3x - 4) \} \\ &= -\frac{1}{2} [\cos(9x - 6) - \cos\{-(3x + 4)\}] \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos(3x + 4) - \cos(9x - 6) \} .\end{aligned}$$

終

実数 a, b について,

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = a, \quad \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = b;$$

つまり,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{aligned} \sin a &= \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ + \sin b &= \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

$$\sin a + \sin b =$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{aligned} \sin a &= \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ + \sin b &= \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \sin a + \sin b &= 2\sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{r} \sin a = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ - \sin b = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\sin a - \sin b =$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{r} \sin a = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ - \sin b = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \end{array}$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ + \cos b &= \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

$$\cos a + \cos b =$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ + \cos b &= \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \cos a + \cos b &= 2 \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ - \cos b &= \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

$$\cos a - \cos b =$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{r} \cos a = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ - \cos b = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \end{array}$$

定理 任意の実数 a と b について,

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} ,$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} ,$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} ,$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} .$$

例 変数 x の式 $\sin(2x - 5) - \sin(7x + 4)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形する.

公式 $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ を用いる.

例 変数 x の式 $\sin(2x - 5) - \sin(7x + 4)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形する.

公式 $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\sin(2x - 5) - \sin(7x + 4) &= 2 \cos \frac{2x - 5 + 7x + 4}{2} \sin \frac{2x - 5 - (7x + 4)}{2} \\ &= 2 \cos \frac{9x - 1}{2} \sin \frac{-5x - 9}{2} .\end{aligned}$$

例 変数 x の式 $\sin(2x - 5) - \sin(7x + 4)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形する.

公式 $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\sin(2x - 5) - \sin(7x + 4) &= 2 \cos \frac{2x - 5 + 7x + 4}{2} \sin \frac{2x - 5 - (7x + 4)}{2} \\ &= 2 \cos \frac{9x - 1}{2} \sin \frac{-5x - 9}{2} .\end{aligned}$$

ここで $\sin \frac{-5x - 9}{2} = \sin \left(-\frac{5x + 9}{2} \right) = -\sin \frac{5x + 9}{2}$ なので,

$$\sin(2x - 5) - \sin(7x + 4) = -2 \sin \frac{5x + 9}{2} \cos \frac{9x - 1}{2} .$$

終

問10.9.5 変数 x の式

$$\cos(2x + 1) - \cos(5x + 8)$$

を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形せよ.

問10.9.5 変数 x の式

$$\cos(2x + 1) - \cos(5x + 8)$$

を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形せよ.

$$\begin{aligned}\cos(2x + 1) - \cos(5x + 8) &= -2 \sin \frac{7x + 9}{2} \sin \frac{-3x - 7}{2} \\ &= -2 \sin \frac{7x + 9}{2} \sin \left(-\frac{3x + 7}{2} \right) \\ &= -2 \sin \frac{7x + 9}{2} \left(-\sin \frac{3x + 7}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{3x + 7}{2} \sin \frac{7x + 9}{2} .\end{aligned}$$

終

例 変数 x の式 $\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ を計算する.

公式 $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ を用いる.

例 変数 x の式 $\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ を計算する.

公式 $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ を用いる.

$$\cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos \frac{x + x - \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{x - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{2}$$

例 変数 x の式 $\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ を計算する.

公式 $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= 2 \cos \frac{x + x - \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{x - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} \\ &= 2 \cos \frac{2x + \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{-\frac{\pi}{3}}{2} \\ &= 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

例 変数 x の式 $\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ を計算する.

公式 $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= 2 \cos \frac{x + x - \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{x - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} \\ &= 2 \cos \frac{2x + \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{-\frac{\pi}{3}}{2} \\ &= 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} \\ &= 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) .\end{aligned}$$

終

問10.9.6 変数 x の式 $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ を計算せよ.

公式 $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ を用いる.

問10.9.6 変数 x の式 $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ を計算せよ.

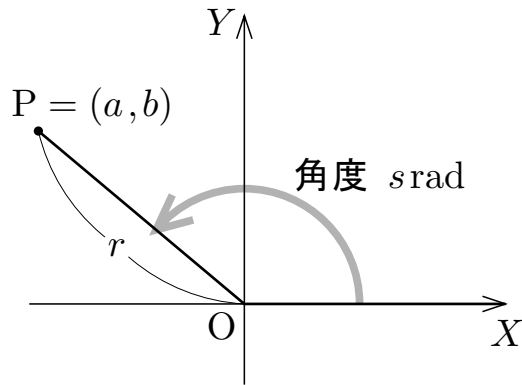
公式 $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= 2 \sin \frac{x + x + \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{x - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} \\ &= 2 \sin \frac{2x + \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{-\frac{\pi}{3}}{2} \\ &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} \\ &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) .\end{aligned}$$

定数 a と b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする. XY 座標平面における点 $P = (a, b)$ に対して, 原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\text{rad}$ (s は実数) とおき, $r = \overline{OP}$ とおく. $a \neq 0$ または $b \neq 0$ なので,

$P \neq O$, よって $r > 0$. 三角関数の定義より $\sin s = \frac{b}{r}$, $\cos s = \frac{a}{r}$ なので,

$$a = r \cos s, \quad b = r \sin s .$$



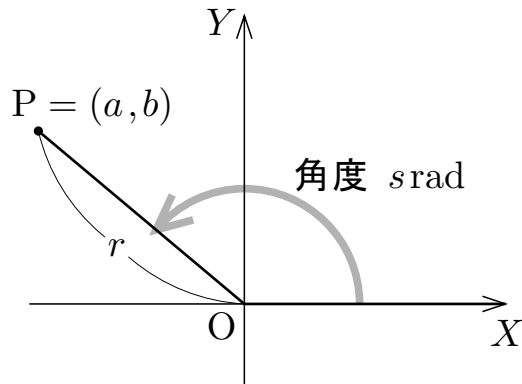
定数 a と b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする. XY 座標平面における点 $P = (a, b)$ に対して, 原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\text{rad}$ (s は実数) とおき, $r = \overline{OP}$ とおく. $a \neq 0$ または $b \neq 0$ なので,

$P \neq O$, よって $r > 0$. 三角関数の定義より $\sin s = \frac{b}{r}$, $\cos s = \frac{a}{r}$ なので,

$$a = r \cos s, \quad b = r \sin s.$$

よって, 各実数 x に対して,

$$a \sin x + b \cos x = r \cos s \sin x + r \sin s \cos x = r(\sin x \cos s + \cos x \sin s).$$



各実数 x に対して,

$$a \sin x + b \cos x = r \cos s \sin x + r \sin s \cos x = r(\sin x \cos s + \cos x \sin s) .$$

各実数 x に対して,

$$a \sin x + b \cos x = r \cos s \sin x + r \sin s \cos x = r(\sin x \cos s + \cos x \sin s) .$$

加法定理より $\sin x \cos s + \cos x \sin s = \sin(x + s)$ なので,

$$a \sin x + b \cos x = r \sin(x + s) .$$

各実数 x に対して,

$$a \sin x + b \cos x = r \cos s \sin x + r \sin s \cos x = r(\sin x \cos s + \cos x \sin s) .$$

加法定理より $\sin x \cos s + \cos x \sin s = \sin(x + s)$ なので,

$$a \sin x + b \cos x = r \sin(x + s) .$$

$O = (0, 0)$, $P = (a, b)$ より $r = \overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2}$ なので,

$$a \sin x + b \cos x = r \sin(x + s) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + s) .$$

各実数 x に対して,

$$a \sin x + b \cos x = r \cos s \sin x + r \sin s \cos x = r(\sin x \cos s + \cos x \sin s) .$$

加法定理より $\sin x \cos s + \cos x \sin s = \sin(x + s)$ なので,

$$a \sin x + b \cos x = r \sin(x + s) .$$

$O = (0, 0)$, $P = (a, b)$ より $r = \overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2}$ なので,

$$a \sin x + b \cos x = r \sin(x + s) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + s) .$$

定理 定数 a と b について, $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする. XY 座標平面における点 $P = (a, b)$ に対して, 原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s \text{ rad}$ (s は実数) とする. このとき, 任意の実数 x について

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + s) .$$

例 次のような定数 r, s の値を一組求める：任意の実数 x について

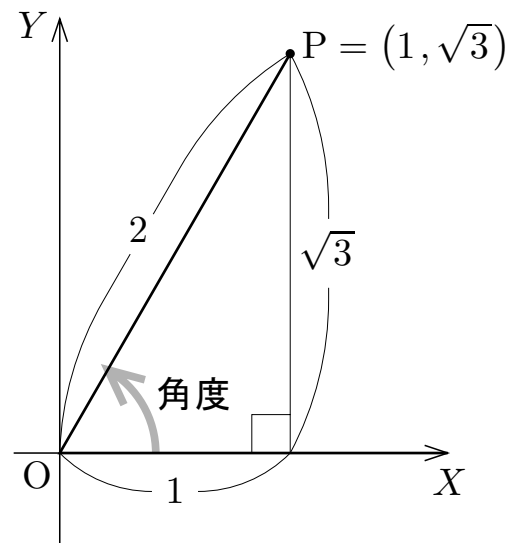
$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = r \sin(x + s) .$$

例 次のような定数 r, s の値を一組求める：任意の実数 x について

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = r \sin(x + s) .$$

XY 座標平面における点 $P = (1, \sqrt{3})$ に対して、原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは である。

従って、

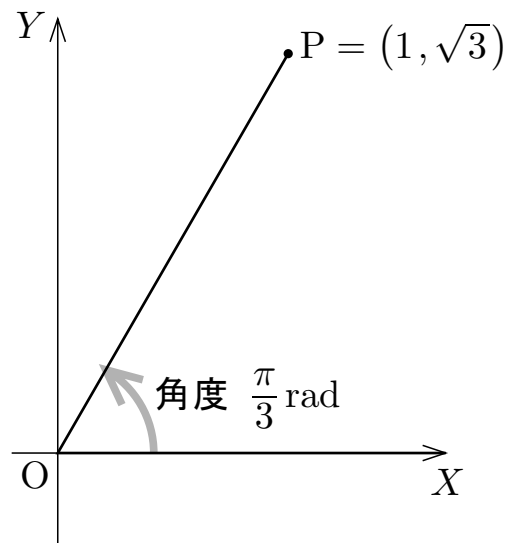


例 次のような定数 r, s の値を一組求める：任意の実数 x について

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = r \sin(x + s) .$$

XY 座標平面における点 $P = (1, \sqrt{3})$ に対して、原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $\frac{\pi}{3}$ rad である。
従って、任意の実数 x について

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x =$$

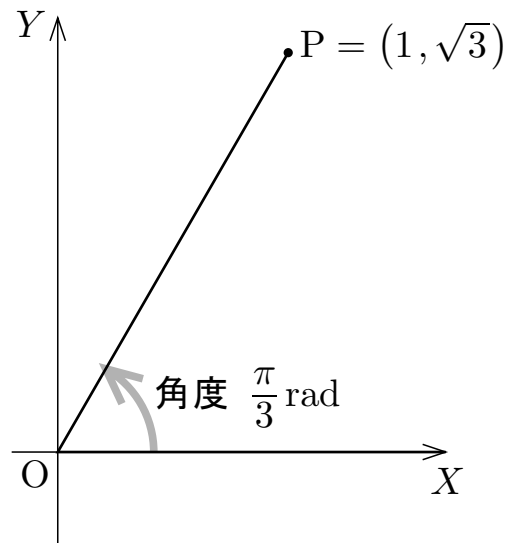


例 次のような定数 r, s の値を一組求める：任意の実数 x について

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = r \sin(x + s) .$$

XY 座標平面における点 $P = (1, \sqrt{3})$ に対して、原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $\frac{\pi}{3}$ rad である。従って、任意の実数 x について

$$\begin{aligned} \sin x + \sqrt{3} \cos x &= \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) . \end{aligned}$$



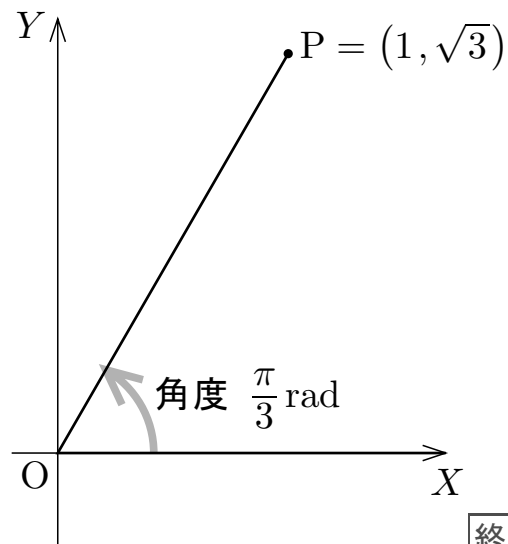
例 次のような定数 r, s の値を一組求める：任意の実数 x について

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = r \sin(x + s) .$$

XY 座標平面における点 $P = (1, \sqrt{3})$ に対して、原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $\frac{\pi}{3}$ rad である。従って、任意の実数 x について

$$\begin{aligned} \sin x + \sqrt{3} \cos x &= \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) . \end{aligned}$$

$r = 2$ かつ $s = \frac{\pi}{3}$ とすればよい。

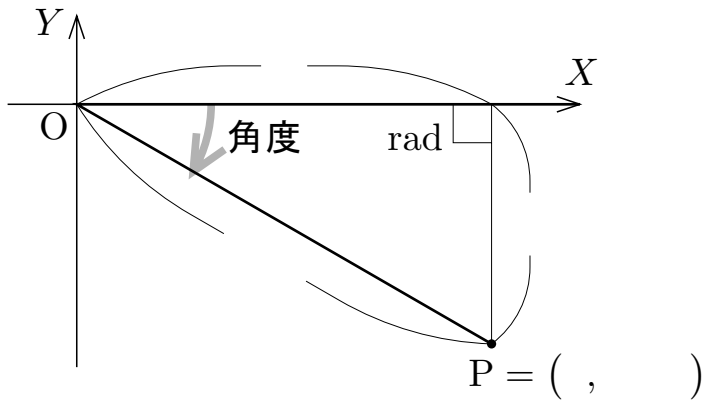


終

問10.9.7 次のような定数 r, s の値を一組求めよ： $r \geq 0$ かつ $-\pi < s \leq \pi$ かつ任意の実数 x について $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = r \sin(x + s)$.

XY 座標平面における点 $P = (\quad , \quad)$ に対して、原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは \quad である。従って、任意の実数 x について

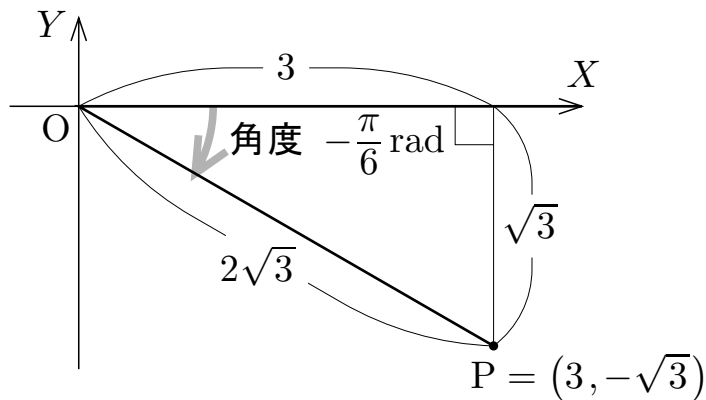
$$3 \sin x - \sqrt{3} \cos x =$$



問10.9.7 次のような定数 r, s の値を一組求めよ： $r \geq 0$ かつ $-\pi < s \leq \pi$ かつ任意の実数 x について $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = r \sin(x + s)$.

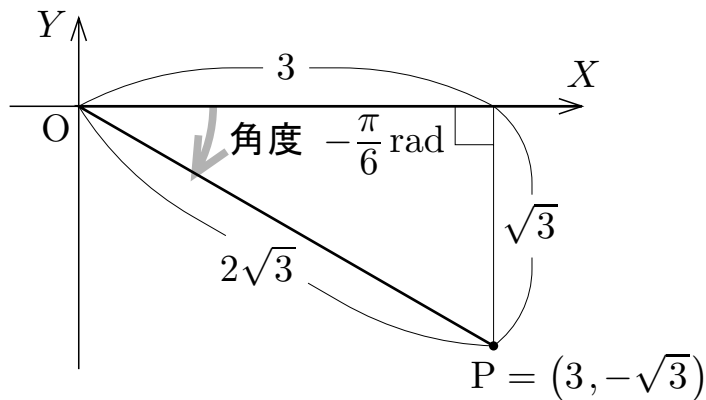
XY 座標平面における点 $P = (3, -\sqrt{3})$ に対して，原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $-\frac{\pi}{6}$ rad である．従って，任意の実数 x について

$$3 \sin x - \sqrt{3} \cos x =$$



問10.9.7 次のような定数 r, s の値を一組求めよ： $r \geq 0$ かつ $-\pi < s \leq \pi$ かつ任意の実数 x について $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = r \sin(x + s)$.

XY 座標平面における点 $P = (3, -\sqrt{3})$ に対して、原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $-\frac{\pi}{6}$ rad である。従って、任意の実数 x について



$$3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{12} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) .$$

$r = \sqrt{12}$ かつ $s = -\frac{\pi}{6}$ とすればよい。

終