10.9 三角関数の諸公式

任意の一般角 α, β について，正弦の加法定理より，

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad （複号同順）.$$

角度 α, β は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

任意の一般角 α, β について，正弦の加法定理より，

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad \text{（複号同順）}.$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\,\mathrm{rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b\,\mathrm{rad}$ について，

$$\sin(a\,\mathrm{rad} \pm b\,\mathrm{rad}) = \sin(a\,\mathrm{rad})\cos(b\,\mathrm{rad}) \pm \cos(a\,\mathrm{rad})\sin(b\,\mathrm{rad}) \quad \text{（複号同順）}.$$

任意の一般角 α, β について，正弦の加法定理より，

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad \text{（複号同順）}.$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\,\mathrm{rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b\,\mathrm{rad}$ について，

$$\sin(a\,\mathrm{rad} \pm b\,\mathrm{rad}) = \sin(a\,\mathrm{rad})\cos(b\,\mathrm{rad}) \pm \cos(a\,\mathrm{rad})\sin(b\,\mathrm{rad}) \quad \text{（複号同順）}.$$

ここで

$$\sin(a\,\mathrm{rad} \pm b\,\mathrm{rad}) = \sin\{(a \pm b)\,\mathrm{rad}\} = \sin(a \pm b) \quad \text{（複号同順）},$$

$$\sin(a\,\mathrm{rad}) = \sin a\ , \qquad \cos(a\,\mathrm{rad}) = \cos a\ ,$$

$$\sin(b\,\mathrm{rad}) = \sin b\ , \qquad \cos(b\,\mathrm{rad}) = \cos b\ ,$$

任意の一般角 α, β について，正弦の加法定理より，

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad \text{（複号同順）}.$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\,\mathrm{rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b\,\mathrm{rad}$ について，

$$\sin(a\,\mathrm{rad} \pm b\,\mathrm{rad}) = \sin(a\,\mathrm{rad})\cos(b\,\mathrm{rad}) \pm \cos(a\,\mathrm{rad})\sin(b\,\mathrm{rad}) \quad \text{（複号同順）}.$$

ここで

$$\sin(a\,\mathrm{rad} \pm b\,\mathrm{rad}) = \sin\{(a \pm b)\,\mathrm{rad}\} = \sin(a \pm b) \quad \text{（複号同順）},$$

$$\sin(a\,\mathrm{rad}) = \sin a\ , \qquad \cos(a\,\mathrm{rad}) = \cos a\ ,$$

$$\sin(b\,\mathrm{rad}) = \sin b\ , \qquad \cos(b\,\mathrm{rad}) = \cos b\ ,$$

よって

$$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b \quad \text{（複号同順）}.$$

任意の一般角 α, β について，余弦の加法定理より，

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad （複号同順）.$$

角度 α, β は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

任意の一般角 α, β について，余弦の加法定理より，

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad \text{（複号同順）}.$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\,\mathrm{rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b\,\mathrm{rad}$ について，

$$\cos(a\,\mathrm{rad} \pm b\,\mathrm{rad}) = \cos(a\,\mathrm{rad})\cos(b\,\mathrm{rad}) \mp \sin(a\,\mathrm{rad})\sin(b\,\mathrm{rad}) \quad \text{（複号同順）}.$$

任意の一般角 α, β について，余弦の加法定理より，

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad \text{（複号同順）}.$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\,\mathrm{rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b\,\mathrm{rad}$ について，

$$\cos(a\,\mathrm{rad} \pm b\,\mathrm{rad}) = \cos(a\,\mathrm{rad})\cos(b\,\mathrm{rad}) \mp \sin(a\,\mathrm{rad})\sin(b\,\mathrm{rad}) \quad \text{（複号同順）}.$$

ここで

$$\cos(a\,\mathrm{rad} \pm b\,\mathrm{rad}) = \cos\{(a \pm b)\,\mathrm{rad}\} = \cos(a \pm b) \quad \text{（複号同順）},$$

$$\sin(a\,\mathrm{rad}) = \sin a \ , \qquad \cos(a\,\mathrm{rad}) = \cos a \ ,$$

$$\sin(b\,\mathrm{rad}) = \sin b \ , \qquad \cos(b\,\mathrm{rad}) = \cos b \ ,$$

任意の一般角 α, β について，余弦の加法定理より，

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad \text{（複号同順）}.$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\,\mathrm{rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b\,\mathrm{rad}$ について，

$$\cos(a\,\mathrm{rad} \pm b\,\mathrm{rad}) = \cos(a\,\mathrm{rad})\cos(b\,\mathrm{rad}) \mp \sin(a\,\mathrm{rad})\sin(b\,\mathrm{rad}) \quad \text{（複号同順）}.$$

ここで

$$\cos(a\,\mathrm{rad} \pm b\,\mathrm{rad}) = \cos\{(a \pm b)\,\mathrm{rad}\} = \cos(a \pm b) \quad \text{（複号同順）},$$

$$\sin(a\,\mathrm{rad}) = \sin a\ , \qquad \cos(a\,\mathrm{rad}) = \cos a\ ,$$

$$\sin(b\,\mathrm{rad}) = \sin b\ , \qquad \cos(b\,\mathrm{rad}) = \cos b\ ,$$

よって

$$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b \quad \text{（複号同順）}.$$

一般角 α, β について，$\tan\alpha$，$\tan\beta$，及び $\tan(\alpha+\beta)$ あるいは $\tan(\alpha-\beta)$ の値があるとき，正接の加法定理より，

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta} \quad \text{（複号同順）}.$$

角度 α, β は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

一般角 α, β について，$\tan\alpha$，$\tan\beta$，及び $\tan(\alpha+\beta)$ あるいは $\tan(\alpha-\beta)$ の値があるとき，正接の加法定理より，

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \quad \text{（複号同順）}.$$

実数 a に対する一般角 $a\,\mathrm{rad}$ 及び実数 b に対する一般角 $b\,\mathrm{rad}$ について，$\tan(a\,\mathrm{rad})$，$\tan(b\,\mathrm{rad})$，及び $\tan(a\,\mathrm{rad}+b\,\mathrm{rad})$ あるいは $\tan(a\,\mathrm{rad}-b\,\mathrm{rad})$ の値があるとき，

$$\tan(a\,\mathrm{rad}\pm b\,\mathrm{rad}) = \frac{\tan(a\,\mathrm{rad}) \pm \tan(b\,\mathrm{rad})}{1 \mp \tan(a\,\mathrm{rad})\tan(b\,\mathrm{rad})} \quad \text{（複号同順）}.$$

一般角 α, β について，$\tan\alpha$，$\tan\beta$，及び $\tan(\alpha+\beta)$ あるいは $\tan(\alpha-\beta)$ の値があるとき，正接の加法定理より，

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{（複号同順）}.$$

実数 a に対する一般角 $a\,\mathrm{rad}$ 及び実数 b に対する一般角 $b\,\mathrm{rad}$ について，$\tan(a\,\mathrm{rad})$，$\tan(b\,\mathrm{rad})$，及び $\tan(a\,\mathrm{rad}+b\,\mathrm{rad})$ あるいは $\tan(a\,\mathrm{rad}-b\,\mathrm{rad})$ の値があるとき，

$$\tan(a\,\mathrm{rad}\pm b\,\mathrm{rad}) = \frac{\tan(a\,\mathrm{rad})\pm\tan(b\,\mathrm{rad})}{1\mp\tan(a\,\mathrm{rad})\tan(b\,\mathrm{rad})} \quad \text{（複号同順）}.$$

ここで，

$$\tan(a\,\mathrm{rad}\pm b\,\mathrm{rad}) = \tan\{(a\pm b)\,\mathrm{rad}\} = \tan(a\pm b) \quad \text{（複号同順）},$$

$$\tan(a\,\mathrm{rad}) = \tan a\ , \qquad \tan(b\,\mathrm{rad}) = \tan b\ ,$$

　一般角 α, β について，$\tan\alpha$，$\tan\beta$，及び $\tan(\alpha+\beta)$ あるいは $\tan(\alpha-\beta)$ の値があるとき，正接の加法定理より，

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \quad \text{（複号同順）}.$$

実数 a に対する一般角 $a\,\mathrm{rad}$ 及び実数 b に対する一般角 $b\,\mathrm{rad}$ について，$\tan(a\,\mathrm{rad})$，$\tan(b\,\mathrm{rad})$，及び $\tan(a\,\mathrm{rad}+b\,\mathrm{rad})$ あるいは $\tan(a\,\mathrm{rad}-b\,\mathrm{rad})$ の値があるとき，

$$\tan(a\,\mathrm{rad}\pm b\,\mathrm{rad}) = \frac{\tan(a\,\mathrm{rad}) \pm \tan(b\,\mathrm{rad})}{1 \mp \tan(a\,\mathrm{rad})\tan(b\,\mathrm{rad})} \quad \text{（複号同順）}.$$

ここで，

$$\tan(a\,\mathrm{rad}\pm b\,\mathrm{rad}) = \tan\{(a\pm b)\,\mathrm{rad}\} = \tan(a\pm b) \quad \text{（複号同順）},$$

$$\tan(a\,\mathrm{rad}) = \tan a\ , \qquad \tan(b\,\mathrm{rad}) = \tan b\ ,$$

よって

$$\tan(a\pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a\tan b} \quad \text{（複号同順）}.$$

定理（正弦関数・余弦関数の加法定理）　任意の実数 a と b とについて，

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad （複号同順），$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad （複号同順）．$$

定理（正接関数の加法定理）　実数 a と b とについて，$\tan a$，$\tan b$，及び $\tan(a+b)$ あるいは $\tan(a-b)$ の値があるとき，

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \quad （複号同順）．$$

これらの三角関数の加法定理は覚えること．

$\boxed{例}$ 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$, $\cos x = \dfrac{3}{4}$ とする. 実数 y について $\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$, $\sin y = -\dfrac{1}{3}$ とする. $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する.

$\boxed{例}$ 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$ ，$\cos x = \dfrac{3}{4}$ とする．実数 y について $\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ ，$\sin y = -\dfrac{1}{3}$ とする． $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する．

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x =$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$ ，$\cos x = \dfrac{3}{4}$ とする．実数 y について $\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ ，$\sin y = -\dfrac{1}{3}$ とする． $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する．

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} ,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x$ $\quad$ 0 なので，

$$\sin x =$$

例 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$ ，$\cos x = \dfrac{3}{4}$ とする. 実数 y について $\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ ，$\sin y = -\dfrac{1}{3}$ とする. $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \ ,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので,

$$\sin x = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$ ，$\cos x = \dfrac{3}{4}$ とする．実数 y について $\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ ，$\sin y = -\dfrac{1}{3}$ とする． $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する．

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \ ,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので，

$$\sin x = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} \ .$$

また，

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y =$$

例 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$ ， $\cos x = \dfrac{3}{4}$ とする．実数 y について $\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ ， $\sin y = -\dfrac{1}{3}$ とする． $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する．

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \,,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので，

$$\sin x = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} \,.$$

また，

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \,,$$

$\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ より $\cos y \quad 0$ なので，

$$\cos y =$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$ ，$\cos x = \dfrac{3}{4}$ とする．実数 y について $\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ ，$\sin y = -\dfrac{1}{3}$ とする． $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する．

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \ ,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので，

$$\sin x = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} \ .$$

また，

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \ ,$$

$\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ より $\cos y \geq 0$ なので，

$$\cos y = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \ .$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4} \ , \qquad \cos x = \frac{3}{4} \ , \qquad \sin y = -\frac{1}{3} \ , \qquad \cos y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \ .$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}\ , \qquad \cos x = \frac{3}{4}\ , \qquad \sin y = -\frac{1}{3}\ , \qquad \cos y = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y = -\frac{\sqrt{7}}{4}\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{14}}{6} - \frac{1}{4}\ .\end{aligned}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4} \ , \qquad \cos x = \frac{3}{4} \ , \qquad \sin y = -\frac{1}{3} \ , \qquad \cos y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y = -\frac{\sqrt{7}}{4}\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{14}}{6} - \frac{1}{4} \ .\end{aligned}$$

余弦関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{3}{4}\frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{12} \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問}10.9.1}$ 実数 a について $\dfrac{5\pi}{2} \leq a \leq \dfrac{7\pi}{2}$ ，$\sin a = \dfrac{5}{6}$ とする．実数 b について $2\pi \leq b \leq 3\pi$ ，$\cos b = -\dfrac{2}{3}$ とする． $\sin(a+b)$ 及び $\cos(a+b)$ を計算せよ．

$$\cos^2 a =$$

$\dfrac{5\pi}{2} \leq a \leq \dfrac{7\pi}{2}$ より $\cos a \quad\; 0$ なので,

$$\cos a =$$

また,

$$\sin^2 b =$$

$2\pi \leq b \leq 3\pi$ より $\sin b \quad\; 0$ なので,

$$\sin b =$$

$\boxed{\text{問}10.9.1}$ 実数 a について $\dfrac{5\pi}{2} \leq a \leq \dfrac{7\pi}{2}$ ，$\sin a = \dfrac{5}{6}$ とする．実数 b について $2\pi \leq b \leq 3\pi$ ，$\cos b = -\dfrac{2}{3}$ とする． $\sin(a+b)$ 及び $\cos(a+b)$ を計算せよ．

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} ,$$

$\dfrac{5\pi}{2} \leq a \leq \dfrac{7\pi}{2}$ より $\cos a \leq 0$ なので，

$$\cos a = -\sqrt{\frac{11}{36}} = -\frac{\sqrt{11}}{6} .$$

また，

$$\sin^2 b =$$

$2\pi \leq b \leq 3\pi$ より $\sin b \quad 0$ なので，

$$\sin b =$$

$\boxed{問10.9.1}$ 実数 a について $\dfrac{5\pi}{2} \leq a \leq \dfrac{7\pi}{2}$ ，$\sin a = \dfrac{5}{6}$ とする．実数 b について $2\pi \leq b \leq 3\pi$ ，$\cos b = -\dfrac{2}{3}$ とする． $\sin(a+b)$ 及び $\cos(a+b)$ を計算せよ．

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} ,$$

$\dfrac{5\pi}{2} \leq a \leq \dfrac{7\pi}{2}$ より $\cos a \leq 0$ なので，

$$\cos a = -\sqrt{\frac{11}{36}} = -\frac{\sqrt{11}}{6} .$$

また，

$$\sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} ,$$

$2\pi \leq b \leq 3\pi$ より $\sin b \geq 0$ なので，

$$\sin b = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} .$$

$$\sin a = \frac{5}{6}\ , \qquad \cos a = -\frac{\sqrt{11}}{6}\ , \qquad \sin b = \frac{\sqrt{5}}{3}\ , \qquad \cos b = -\frac{2}{3}\ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{5}{6}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= -\frac{10+\sqrt{55}}{18}\ .\end{aligned}$$

余弦関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b = -\frac{\sqrt{11}}{6}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{5}{6}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{11}-5\sqrt{5}}{18}\ .\end{aligned}$$

例 実数 a について $\tan a = 3$ とし，実数 b について $\tan b = 7$ とする.
$\tan(a+b)$ 及び $\tan(a-b)$ を計算する.

正接関数の加法定理を用いる.

$$\tan(a+b) =$$

$$\tan(a-b) =$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 a について $\tan a = 3$ とし，実数 b について $\tan b = 7$ とする．$\tan(a+b)$ 及び $\tan(a-b)$ を計算する．

正接関数の加法定理を用いる．

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{3+7}{1-3\cdot 7} = \frac{10}{-20} = -\frac{1}{2}\ .$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} = \frac{3-7}{1+3\cdot 7} = \frac{-4}{22} = -\frac{2}{11}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}10.9.2}$ 実数 x について $\tan x = \dfrac{2}{7}$ とし，実数 y について $\tan y = 3$ とする． $\tan(x+y)$ 及び $\tan(x-y)$ を計算せよ．

正接関数の加法定理を用いる．

$$\tan(x+y) =$$

$$\tan(x-y) =$$

$\boxed{問10.9.2}$ 実数 x について $\tan x = \dfrac{2}{7}$ とし，実数 y について $\tan y = 3$ とする． $\tan(x+y)$ 及び $\tan(x-y)$ を計算せよ．

正接関数の加法定理を用いる．

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\dfrac{2}{7} + 3}{1 - \dfrac{2}{7} \cdot 3} = 23 \ .$$

$$\tan(x-y) =$$

$\boxed{\text{問}10.9.2}$ 実数 x について $\tan x = \dfrac{2}{7}$ とし，実数 y について $\tan y = 3$ とする． $\tan(x+y)$ 及び $\tan(x-y)$ を計算せよ．

正接関数の加法定理を用いる．

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\dfrac{2}{7} + 3}{1 - \dfrac{2}{7} \cdot 3} = 23 \ .$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} = \frac{\dfrac{2}{7} - 3}{1 + \dfrac{2}{7} \cdot 3} = -\frac{19}{13} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

定理 （正弦関数・余弦関数の加法定理） 任意の実数 a と b とについて，

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad （複号同順），$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad （複号同順）．$$

定理（正接関数の加法定理） 実数 a と b とについて，$\tan a$，$\tan b$，及び $\tan(a+b)$ あるいは $\tan(a-b)$ の値が存在するとき，

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \quad （複号同順）．$$

三角関数の加法定理から幾つかの公式を導く．

実数 a, b について，正弦関数の加法定理の等式

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

において $b = a$ とすると，

$$\sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a \ ,$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \ .$$

実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

において $b = a$ とすると，

$$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a \ ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \ .$$

実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

において $b = a$ とすると，

$$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a \ ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \ .$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ より $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ なので，

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 \ ,$$

実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

において $b = a$ とすると，

$$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a \ ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \ .$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ より $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ なので，

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 \ ,$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ より $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ なので，

$$\cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \ ,$$

実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

において $b = a$ とすると，

$$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a \ ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \ .$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ より $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ なので，

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 \ ,$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ より $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ なので，

$$\cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \ ,$$

故に

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \ .$$

実数 a, b について，正接関数の加法定理の等式

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

において $b = a$ とすると

$$\tan(a+a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \tan a} \ ,$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \ .$$

定理　任意の実数 a について,

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a \ ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \ ,$$

a が $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でも $\dfrac{\pi}{4}$ の奇数倍でもないとき　$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

任意の実数 a について，

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \ .$$

任意の実数 a について,

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \quad .$$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ より,

$$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a \quad ,$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad .$$

任意の実数 a について,

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \ .$$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ より,

$$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a \ ,$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \ .$$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ より,

$$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a \ ,$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \ .$$

任意の実数 a について,

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \ .$$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ より,

$$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a \ ,$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \ .$$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ より,

$$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a \ ,$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \ .$$

定理　任意の実数 a について,

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \ , \qquad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \ .$$

実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \ , \quad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

について左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{rr} & \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ + & \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\cos(a+b)+\cos(a-b) =} \end{array}$$

実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ , \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

について左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{rr} & \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ + & \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b} \end{array}$$

よって

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\} \ .$$

実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \ , \quad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

について左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{rr} & \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ - & \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\cos(a+b) - \cos(a-b) =} \end{array}$$

実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \ , \quad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

について左辺どうし右辺どうし引き算する．

$$\begin{array}{rr} & \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ - & \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a\sin b} \end{array}$$

よって

$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\} \ .$$

実数 a, b について，正弦関数の加法定理の等式

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b \ , \quad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b$$

について左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{rr} & \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b \\ + & \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\sin(a+b) + \sin(a-b) =} \end{array}$$

実数 a, b について，正弦関数の加法定理の等式

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \ , \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

について左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{rr} & \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ + & \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b} \end{array}$$

よって

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\} \ .$$

定理　任意の実数 a と b とについて，

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\} \ ,$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\} \ ,$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の式 $\cos(3x+2)\cos(5x-7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形する.　.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の式 $\cos(3x+2)\cos(5x-7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形する.

公式 $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\{\cos(a+b)+\cos(a-b)\}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\cos(3x+2)\cos(5x-7) &= \frac{1}{2}[\cos\{(3x+2)+(5x-7)\}+\cos\{(3x+2)-(5x-7)\}] \\ &= \frac{1}{2}\{\cos(8x-5)+\cos(-2x+9)\}\ ,\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の式 $\cos(3x+2)\cos(5x-7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形する.

公式 $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\{\cos(a+b)+\cos(a-b)\}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\cos(3x+2)\cos(5x-7) &= \frac{1}{2}[\cos\{(3x+2)+(5x-7)\}+\cos\{(3x+2)-(5x-7)\}] \\ &= \frac{1}{2}\{\cos(8x-5)+\cos(-2x+9)\} \ ,\end{aligned}$$

ここで $\cos(-2x+9)=\cos\{-(2x-9)\}=\cos(2x-9)$ なので,

$$\cos(3x+2)\cos(5x-7) = \frac{1}{2}\{\cos(8x-5)+\cos(2x-9)\} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問10.9.3}$ 変数 x の式 $\sin(2x+1)\cos(5x+7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形せよ.

公式 $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\{\sin(a+b)+\sin(a-b)\}$ を用いる.

問 10.9.3 変数 x の式 $\sin(2x+1)\cos(5x+7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形せよ.

公式 $\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}\{\sin(a+b)+\sin(a-b)\}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\sin(2x+1)\cos(5x+7) &= \frac{1}{2}\{\sin(7x+8)+\sin(-3x-6)\} \\ &= \frac{1}{2}[\sin(7x+8)+\sin\{-(3x+6)\}] \\ &= \frac{1}{2}\{\sin(7x+8)-\sin(3x+6)\}\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問10.9.4}$ 変数 x の式 $\sin(3x-5)\sin(6x-1)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形せよ.

公式 $\sin a \sin b = -\dfrac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\}$ を用いる.

問 10.9.4 変数 x の式 $\sin(3x-5)\sin(6x-1)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形せよ.

公式 $\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\}$ を用いる.

$$
\begin{aligned}
\sin(3x-5)\sin(6x-1) &= -\frac{1}{2}\{\cos(9x-6) - \cos(-3x-4)\} \\
&= -\frac{1}{2}[\cos(9x-6) - \cos\{-(3x+4)\}] \\
&= \frac{1}{2}\{\cos(3x+4) - \cos(9x-6)\}\ .
\end{aligned}
$$

終

実数 a, b について,

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = a\ , \quad \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = b\ ;$$

つまり,

$$a = \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\ , \quad b = \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\ .$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{rl} & \sin a = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ + & \sin b = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\sin a + \sin b =$$

実数 a, b について，

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

正弦関数の加法定理より，

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし足し算する．

$$\begin{array}{rl} & \sin a = \sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2} + \cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2} \\ + & \sin b = \sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2} - \cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ ,$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ .$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{rl} & \sin a = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ - & \sin b = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\sin a - \sin b =$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{rl} & \sin a = \sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2} + \cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2} \\ - & \sin b = \sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2} - \cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2} \\ \hline & \sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2} \end{array}$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \ .$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ ,$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ .$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{rl} & \cos a = \cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2} - \sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2} \\ + & \cos b = \cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2} + \sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\cos a + \cos b =$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{rl} & \cos a = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ + & \cos b = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \ .$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ ,$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ .$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{rl} & \cos a = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ - & \cos b = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\cos a - \cos b =$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}.$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{rl} & \cos a = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ - & \cos b = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ \hline & \cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \end{array}$$

定理　任意の実数 a と b とについて,

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

$\boxed{例}$ 変数 x の式 $\sin(2x-5)-\sin(7x+4)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形する.

公式 $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$ を用いる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の式 $\sin(2x-5)-\sin(7x+4)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形する.

公式 $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\sin(2x-5)-\sin(7x+4) &= 2\cos\frac{2x-5+7x+4}{2}\sin\frac{2x-5-(7x+4)}{2}\\ &= 2\cos\frac{9x-1}{2}\sin\frac{-5x-9}{2}\ .\end{aligned}$$

例 変数 x の式 $\sin(2x-5)-\sin(7x+4)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形する.

公式 $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\sin(2x-5)-\sin(7x+4) &= 2\cos\frac{2x-5+7x+4}{2}\sin\frac{2x-5-(7x+4)}{2}\\ &= 2\cos\frac{9x-1}{2}\sin\frac{-5x-9}{2}\ .\end{aligned}$$

ここで $\sin\dfrac{-5x-9}{2}=\sin\left(-\dfrac{5x+9}{2}\right)=-\sin\dfrac{5x+9}{2}$ なので,

$$\sin(2x-5)-\sin(7x+4) = -2\sin\frac{5x+9}{2}\cos\frac{9x-1}{2}\ .$$

終

$\boxed{\text{問}10.9.5}$ 変数 x の式 $\cos(2x+1)-\cos(5x+8)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形せよ.

公式 $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$ を用いる.

$\boxed{問 10.9.5}$ 変数 x の式 $\cos(2x+1)-\cos(5x+8)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形せよ.

公式 $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\cos(2x+1)-\cos(5x+8) &= -2\sin\frac{7x+9}{2}\sin\frac{-3x-7}{2}\\ &= -2\sin\frac{7x+9}{2}\sin\left(-\frac{3x+7}{2}\right)\\ &= -2\sin\frac{7x+9}{2}\left(-\sin\frac{3x+7}{2}\right)\\ &= 2\sin\frac{3x+7}{2}\sin\frac{7x+9}{2}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

例 **変数** x **の式** $\cos x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を計算する.

公式 $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ を用いる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の式 $\cos x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を計算する.

公式　$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ を用いる.

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{x + x + \dfrac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x - \left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)}{2}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の式 $\cos x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を計算する.

公式　$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$　を用いる.

$$\begin{aligned}
\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= 2\cos\frac{x + x + \dfrac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x - \left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)}{2} \\
&= 2\cos\frac{2x + \dfrac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{-\dfrac{\pi}{3}}{2} \\
&= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

例 変数 x の式 $\cos x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を計算する.

公式 $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ を用いる.

$$
\begin{aligned}
\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= 2\cos\frac{x + x + \dfrac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x - \left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)}{2} \\
&= 2\cos\frac{2x + \dfrac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{-\dfrac{\pi}{3}}{2} \\
&= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} \\
&= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{問10.9.6}$ 変数 x の式 $\sin x + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を計算せよ.

公式 $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ を用いる.

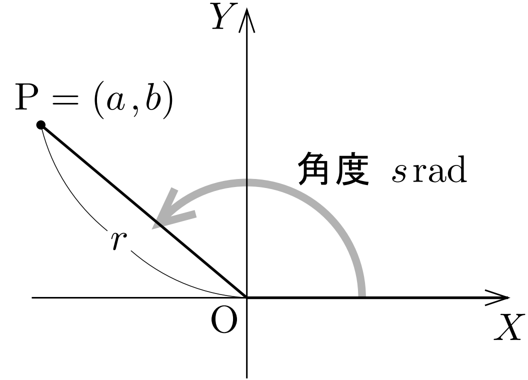
$\boxed{問 10.9.6}$ 変数 x の式 $\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ を計算せよ.

公式 $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\sin x+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)&=2\sin\frac{x+x+\dfrac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x-\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}\\&=2\sin\frac{2x+\dfrac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{-\dfrac{\pi}{3}}{2}\\&=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}\\&=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

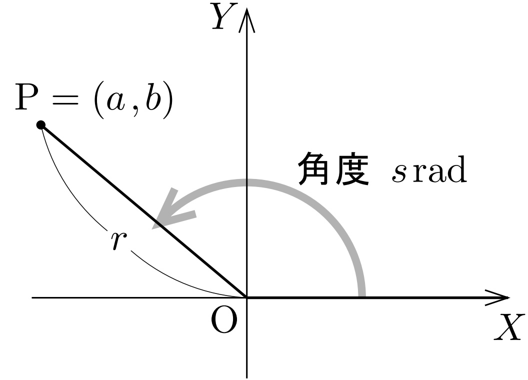
定数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (a, b)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\,\mathrm{rad}$（s は実数）とおき，$r = \overline{\mathrm{OP}}$ とおく．$a \neq 0$ または $b \neq 0$ なので，



$\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$，よって $r > 0$．三角関数の定義より $\sin s = \dfrac{b}{r}$，$\cos s = \dfrac{a}{r}$ なので，

$$a = r\cos s\,, \qquad b = r\sin s\,.$$

定数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (a, b)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\,\mathrm{rad}$（s は実数）とおき，$r = \overline{\mathrm{OP}}$ とおく．$a \neq 0$ または $b \neq 0$ なので，



$\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$ ，よって $r > 0$ ．三角関数の定義より $\sin s = \dfrac{b}{r}$ ，$\cos s = \dfrac{a}{r}$ なので，

$$a = r\cos s \ , \qquad b = r\sin s \ .$$

よって，各実数 x に対して，

$$a\sin x + b\cos x = r\cos s\sin x + r\sin s\cos x = r(\sin x\cos s + \cos x\sin s) \ .$$

各実数 x に対して，

$$a \sin x + b \cos x = r \cos s \sin x + r \sin s \cos x = r(\sin x \cos s + \cos x \sin s) \ .$$

各実数 x に対して,

$$a\sin x + b\cos x = r\cos s\sin x + r\sin s\cos x = r(\sin x\cos s + \cos x\sin s)\ .$$

加法定理より $\sin x\cos s + \cos x\sin s = \sin(x+s)$ なので,

$$a\sin x + b\cos x = r\sin(x+s)\ .$$

各実数 x に対して,

$$a\sin x + b\cos x = r\cos s\sin x + r\sin s\cos x = r(\sin x\cos s + \cos x\sin s) \ .$$

加法定理より $\sin x\cos s + \cos x\sin s = \sin(x+s)$ なので,

$$a\sin x + b\cos x = r\sin(x+s) \ .$$

$\mathrm{O} = (0\,,0)$ ，$\mathrm{P} = (a\,,b)$ より $r = \overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{a^2+b^2}$ なので,

$$a\sin x + b\cos x = r\sin(x+s) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+s) \ .$$

各実数 x に対して，

$$a\sin x + b\cos x = r\cos s\sin x + r\sin s\cos x = r(\sin x\cos s + \cos x\sin s) \ .$$

加法定理より $\sin x\cos s + \cos x\sin s = \sin(x+s)$ なので，

$$a\sin x + b\cos x = r\sin(x+s) \ .$$

$\mathrm{O} = (0\,,0)$ ，$\mathrm{P} = (a\,,b)$ より $r = \overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{a^2+b^2}$ なので，

$$a\sin x + b\cos x = r\sin(x+s) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+s) \ .$$

定理　定数 a と b とについて，$a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (a\,,b)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0\,,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\,\mathrm{rad}$（ s は実数）とする．このとき，任意の実数 x について

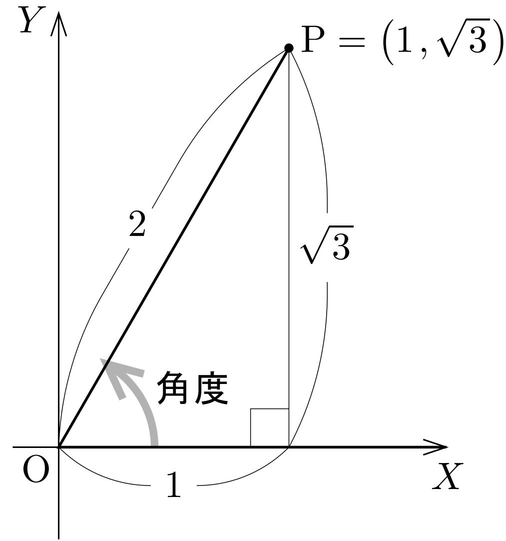
$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+s) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のような定数 $r\,,\,s$ の値を一組求める：任意の実数 x について

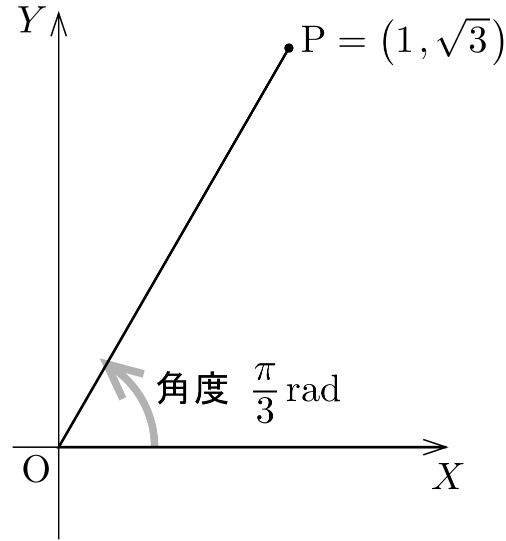
$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = r\sin(x+s)\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のような定数 r, s の値を一組求める：任意の実数 x について
$\sin x + \sqrt{3}\cos x = r\sin(x+s)$.

　XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(1,\sqrt{3})$ に対して，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは　　　　である．
従って，



$\boxed{\text{例}}$ 次のような定数 $r\,,s$ の値を一組求める：任意の実数 x について
$\sin x+\sqrt{3}\cos x=r\sin(x+s)$.

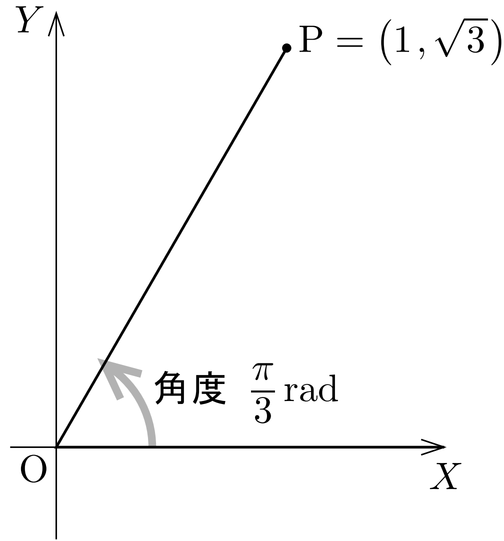


XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=\left(1\,,\sqrt{3}\right)$ に対して，原点 $\mathrm{O}=(0\,,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $\dfrac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}$ である．従って，任意の実数 x について

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=$$

$\boxed{例}$ 次のような定数 r, s の値を一組求める：任意の実数 x について
$\sin x + \sqrt{3}\cos x = r\sin(x+s)$.

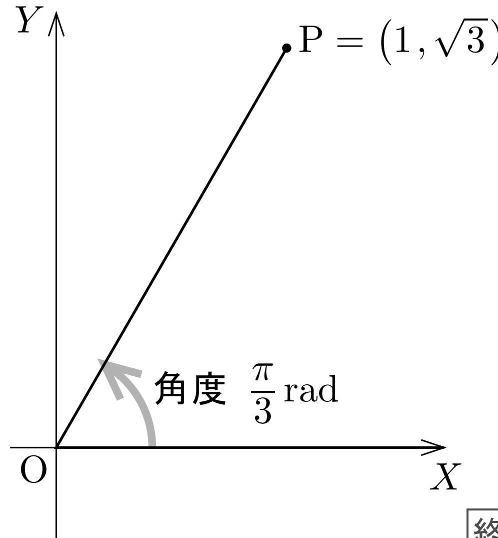
XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (1, \sqrt{3})$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $\dfrac{\pi}{3}\mathrm{rad}$ である．



従って，任意の実数 x について

$$
\begin{aligned}
\sin x + \sqrt{3}\cos x &= \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^{\,2}}\,\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\
&= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \ .
\end{aligned}
$$

例 次のような定数 $r\,,s$ の値を一組求める：任意の実数 x について $\sin x+\sqrt{3}\cos x = r\sin(x+s)$ ．



XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(1\,,\sqrt{3})$ に対して，原点 $\mathrm{O}=(0\,,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $\dfrac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}$ である．従って，任意の実数 x について

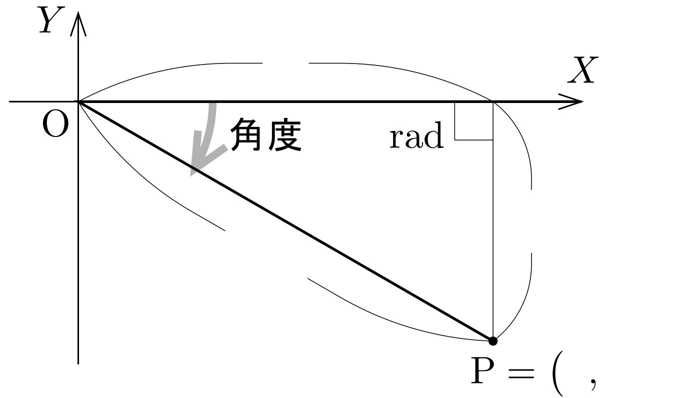
$$\begin{aligned}\sin x+\sqrt{3}\cos x &= \sqrt{1^2+\sqrt{3}^{\,2}}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\\ &= 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ .\end{aligned}$$

$r=2$ かつ $s=\dfrac{\pi}{3}$ とすればよい．

終

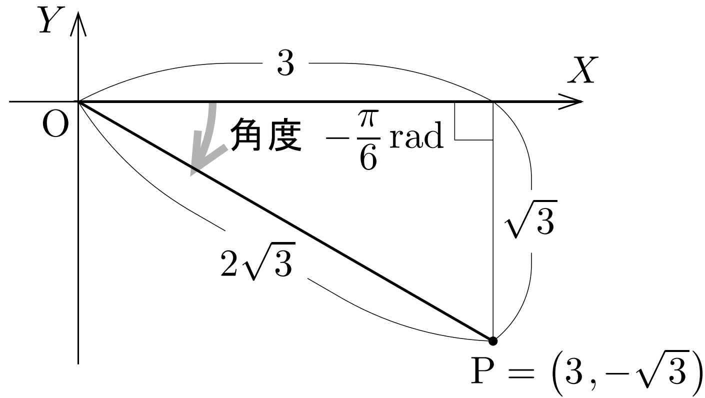
$\boxed{問 10.9.7}$ 次のような定数 r, s の値を一組求めよ： $r \geq 0$ かつ $-\pi < s \leq \pi$ かつ任意の実数 x について $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = r\sin(x+s)$.

XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (\quad , \qquad)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは であある．従って，任意の実数 x について



$$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \qquad .$$

$\boxed{問 10.9.7}$ 次のような定数 $r\,,s$ の値を一組求めよ： $r \geq 0$ かつ $-\pi < s \leq \pi$ かつ任意の実数 x について $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = r\sin(x+s)$ ．

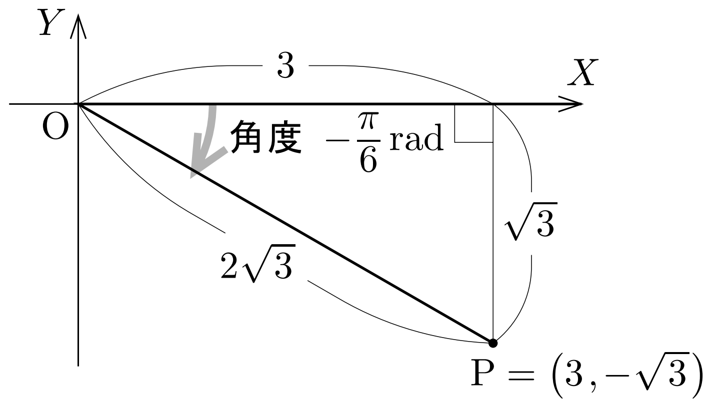


XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = \left(3\,,-\sqrt{3}\right)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0\,,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $-\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}$ である．従って，任意の実数 x について

$$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$\boxed{問10.9.7}$ 次のような定数 $r\,,s$ の値を一組求めよ： $r \geq 0$ かつ $-\pi < s \leq \pi$ かつ任意の実数 x について $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = r\sin(x+s)$.

XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = \left(3\,,-\sqrt{3}\right)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0\,,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $-\dfrac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}$ である．従って，任意の実数 x について



$$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^{\,2}}\,\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{12}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\ .$$

$r = \sqrt{12}$ かつ $s = -\dfrac{\pi}{6}$ とすればよい． $\boxed{終}$