10.10　逆三角関数

関数 f の定義域の要素を表す変数 x 及び f の値域の要素を表す変数 y について $y = f(x)$ とする．f によって，x の値に対して y の値が唯一つ定まる．

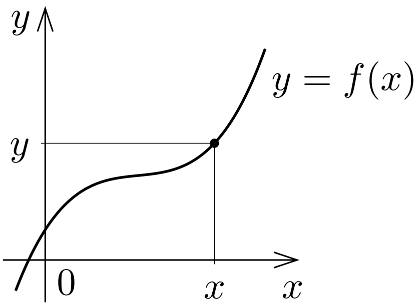
関数 f の定義域の要素を表す変数 x 及び f の値域の要素を表す変数 y について $y = f(x)$ とする．f によって，x の値に対して y の値が唯一つ定まる．逆に，y の値に対して x の値が唯一つ定まるとき，y の値に対して x の値を定める関数ができる．この関数を f の逆関数という．

関数 f の定義域の要素を表す変数 x 及び f の値域の要素を表す変数 y について $y = f(x)$ とする．f によって，x の値に対して y の値が唯一つ定まる．逆に，y の値に対して x の値が唯一つ定まるとき，y の値に対して x の値を定める関数ができる．この関数を f の逆関数という．

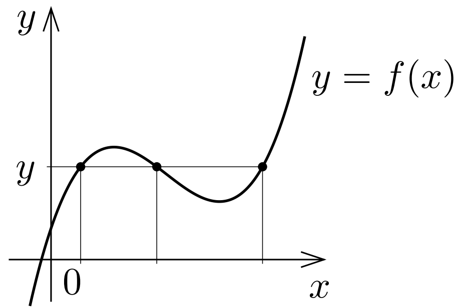
定義　関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応を f の逆関数といい，f^{-1} と書き表す．関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域である．

関数 f の逆関数は，f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める．関数は唯一つの対象を定める対応なので，f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x が複数あるときは，f の逆関数はない．

　関数 f の逆関数は，f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める．関数は唯一つの対象を定める対応なので，f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x が複数あるときは，f の逆関数はない．xy 座標平面における関数 $y=f(x)$ のグラフを考えると例えば次のようになる．



y に対して $y=f(x)$ となる x が唯一つあるので，関数 f の逆関数がある．



y に対して $y=f(x)$ となる x が 2 個以上あるので，関数 f の逆関数はない．

逆関数について以下の定理が成り立つ.

定理　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

f の定義域の任意の要素 x について　$f^{-1}\big(f(x)\big) = x$,

f の値域の任意の要素 y について　$f\big(f^{-1}(y)\big) = y$.

逆関数について以下の定理が成り立つ.

定理　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ について}\quad f^{-1}\bigl(f(x)\bigr) = x\ ,$$

$$f \text{ の値域の任意の要素 } y \text{ について}\quad f\bigl(f^{-1}(y)\bigr) = y\ .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき, f の定義域の要素 x に対して $f^{-1}\bigl(f(x)\bigr) = x$ なので, f^{-1} は x における f の値 $f(x)$ を x に戻す関数である.

逆関数について以下の定理が成り立つ.

定理　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

f の定義域の任意の要素 x について　$f^{-1}\bigl(f(x)\bigr) = x$,

f の値域の任意の要素 y について　$f\bigl(f^{-1}(y)\bigr) = y$.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき, f の定義域の要素 x に対して $f^{-1}\bigl(f(x)\bigr) = x$ なので, f^{-1} は x における f の値 $f(x)$ を x に戻す関数である.

定理　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき, 任意の対象 u と v とについて,

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u .$$

逆関数について以下の定理が成り立つ.

定理　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ について} \quad f^{-1}\big(f(x)\big) = x \ ,$$
$$f \text{ の値域の任意の要素 } y \text{ について} \quad f\big(f^{-1}(y)\big) = y \ .$$

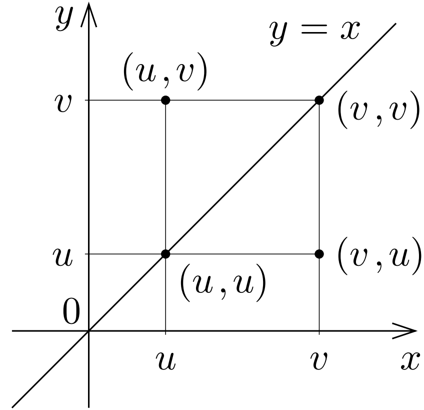
関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき, f の定義域の要素 x に対して $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ なので, f^{-1} は x における f の値 $f(x)$ を x に戻す関数である.

定理　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき, 任意の対象 u と v とについて,

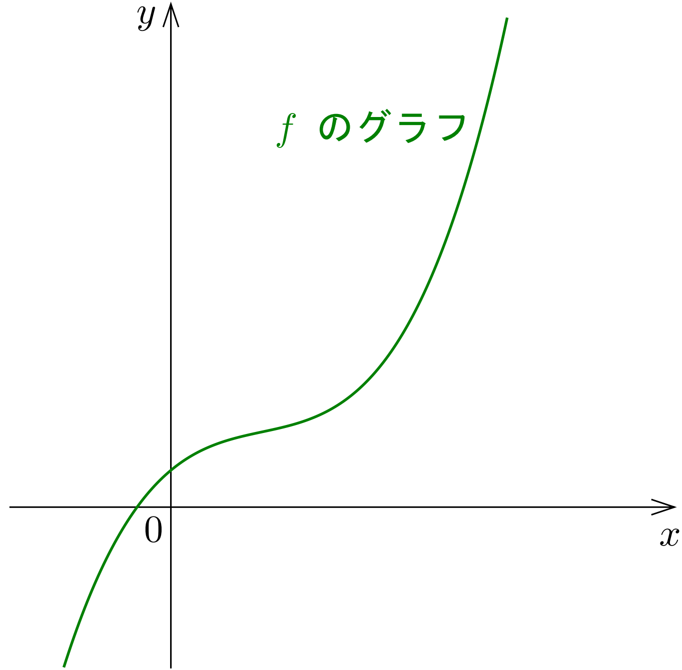
$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u \ .$$

定理　関数 f の逆関数 f^{-1} の値域は f の定義域である.

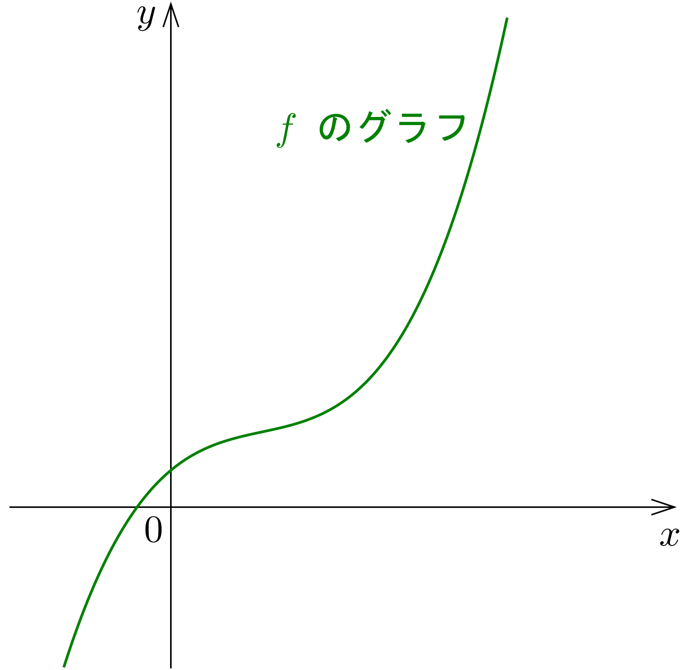
　逆関数のグラフを考える．次のことが重要になる：xy 座標平面において，各実数 u,v について，点 (u,v) の x 座標と y 座標とを入れ替えた点 (v,u) とは直線 $y=x$ に関して対称である．



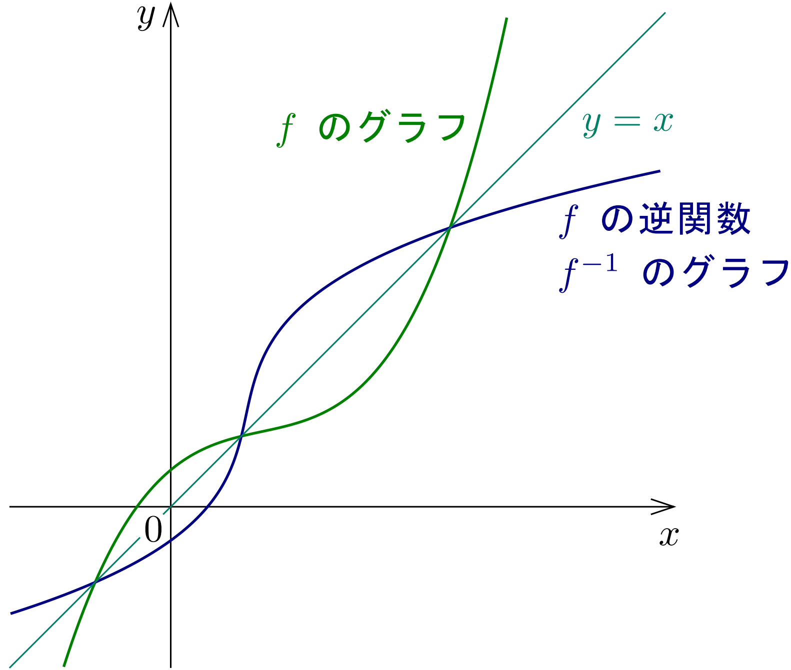
xy 座標平面において，関数 f のグラフの点と対応する逆関数 f^{-1} のグラフの点とでは x 座標と y 座標とが入れ替わる．



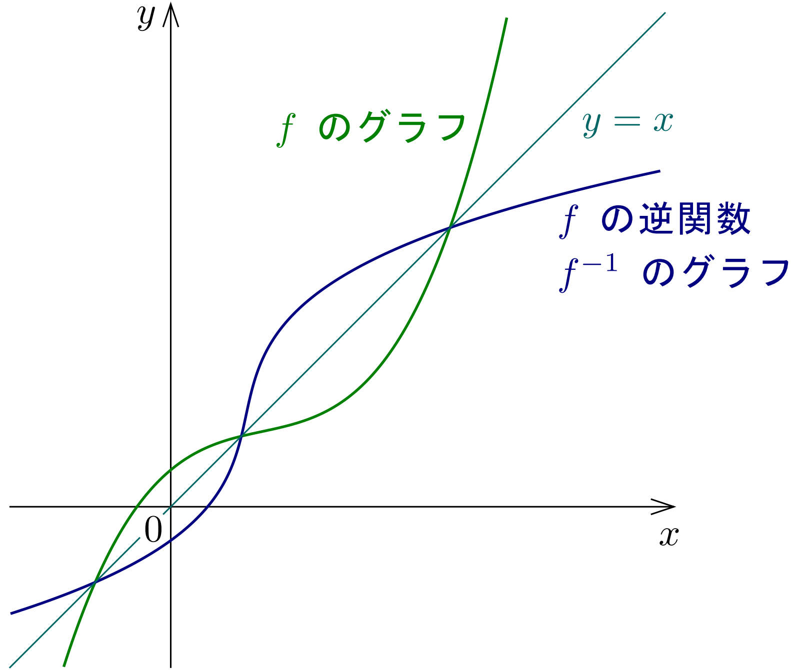
xy 座標平面において，関数 f のグラフの点と対応する逆関数 f^{-1} のグラフの点とでは x 座標と y 座標とが入れ替わる． x 座標と y 座標とが入れ替わった点は元の点と直線 $y=x$ に関して対称である．



xy 座標平面において，関数 f のグラフの点と対応する逆関数 f^{-1} のグラフの点とでは x 座標と y 座標とが入れ替わる． x 座標と y 座標とが入れ替わった点は元の点と直線 $y=x$ に関して対称である．従って，f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．

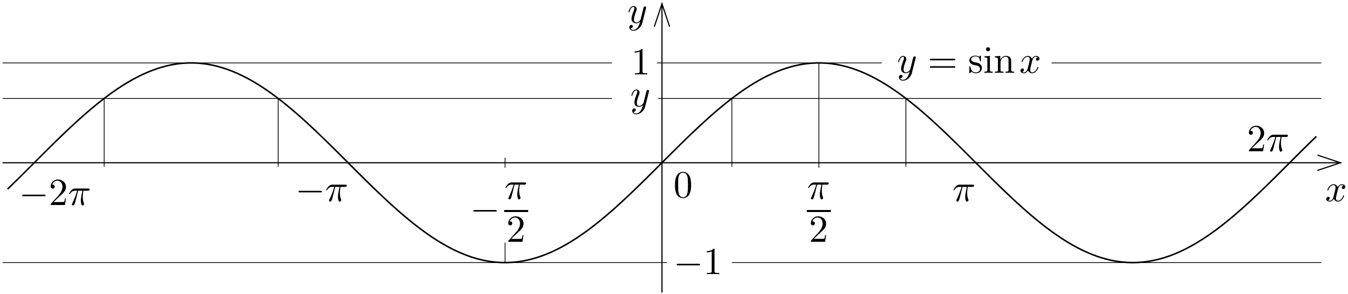


xy 座標平面において，関数 f のグラフの点と対応する逆関数 f^{-1} のグラフの点とでは x 座標と y 座標とが入れ替わる． x 座標と y 座標とが入れ替わった点は元の点と直線 $y=x$ に関して対称である．従って，f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．

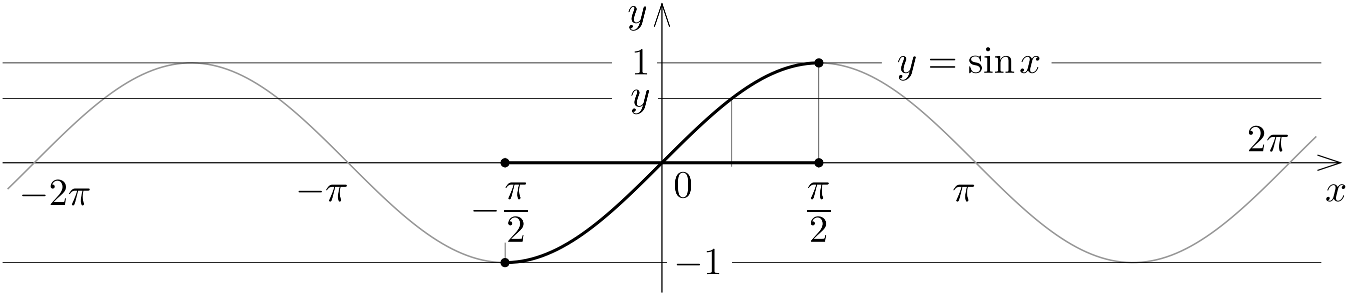


定理　xy 座標平面において，関数 f の逆関数 f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．

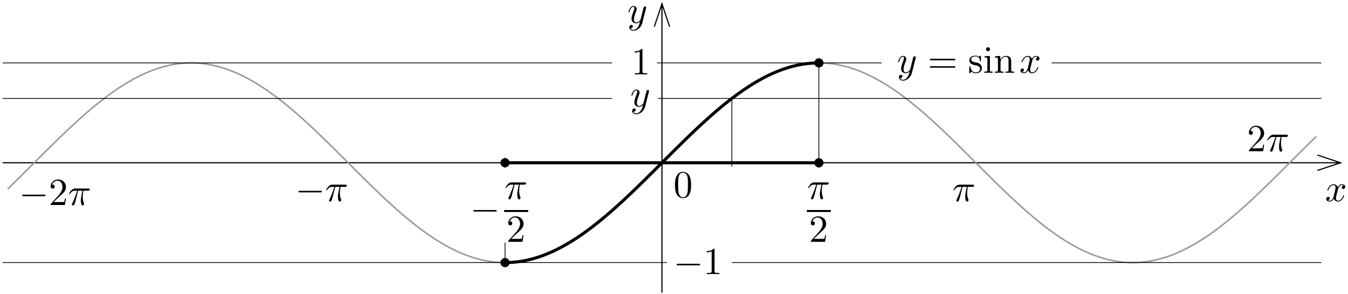
三角関数の逆関数を考える.



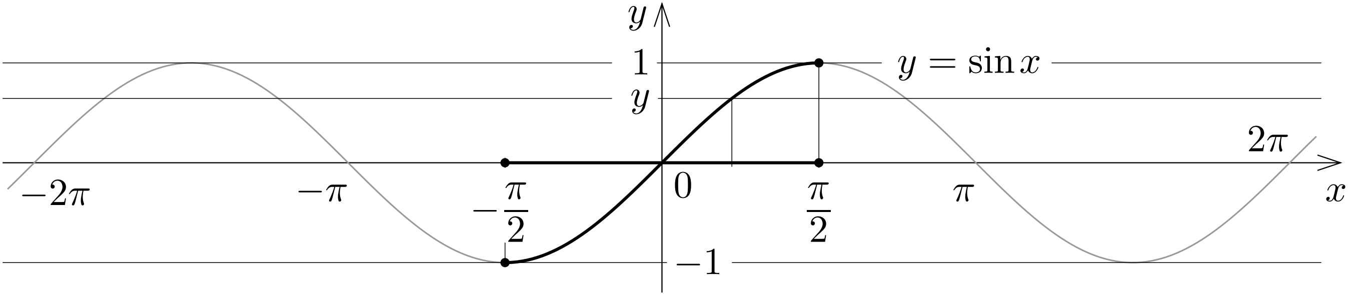
正弦関数 $y=\sin x$ グラフを見ると分かるように，$-1 \leq y \leq 1$ である各実数 y に対して $y=\sin x$ である実数 x は数多くあるので，このままでは正弦関数 $\sin x$ の逆関数があるとはいえない．実際のところ無い．



実数 x について $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ とすると, $-1 \leq y \leq 1$ である各実数 y に対して $y = \sin x$ である x は唯一つある.

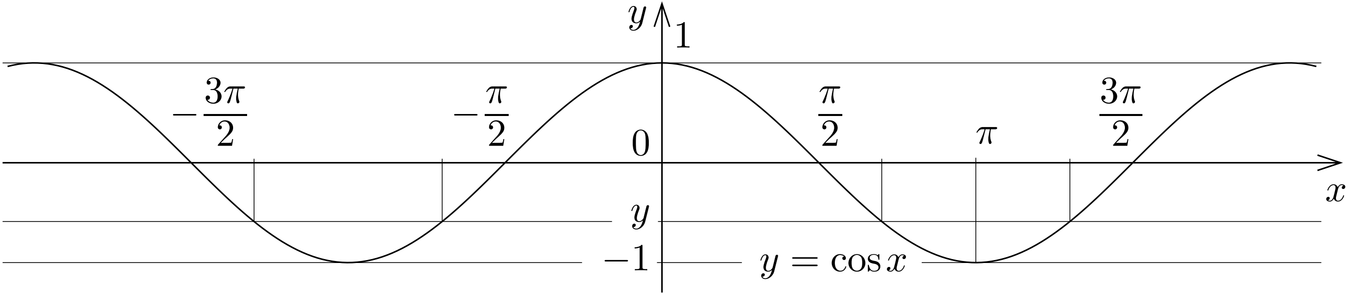


実数 x について $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ とすると，$-1 \leq y \leq 1$ である各実数 y に対して $y = \sin x$ である x は唯一つある．つまり，正弦関数 $\sin x$ の定義域を区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ に制限すると，値域である区間 $[-1, 1]$ の各実数 y に対して $y = \sin x$ である定義域の実数 x は唯一つあるので，逆関数がある．

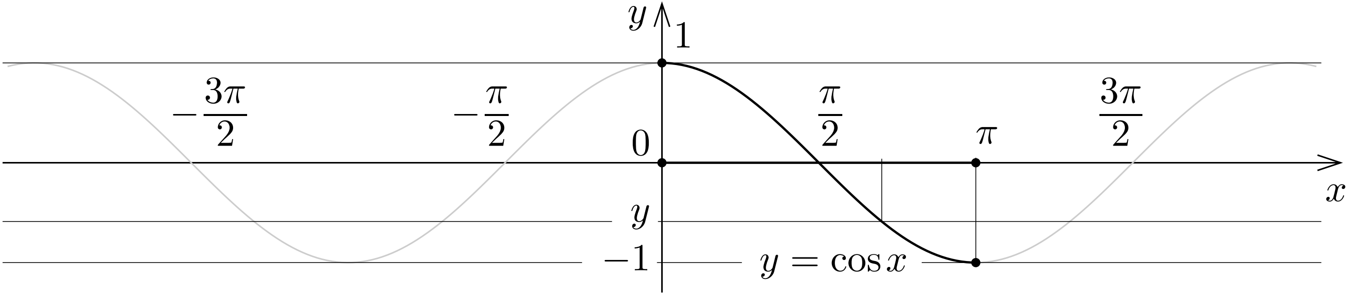


実数 x について $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ とすると，$-1 \leq y \leq 1$ である各実数 y に対して $y = \sin x$ である x は唯一つある．つまり，正弦関数 $\sin x$ の定義域を区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ に制限すると，値域である区間 $[-1, 1]$ の各実数 y に対して $y = \sin x$ である定義域の実数 x は唯一つあるので, 逆関数がある.

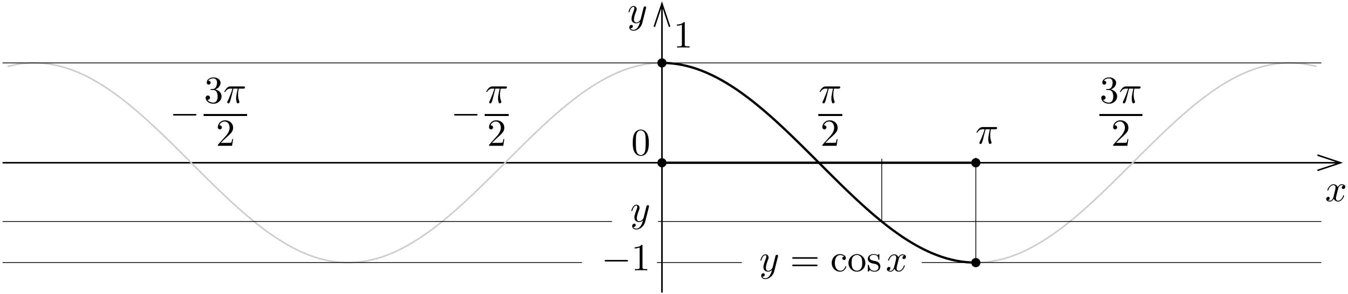
定義　定義域が区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数 $\sin x$ の逆関数を逆正弦関数といい，逆正弦関数の実数 x における値を $\sin^{-1} x$ と書き表す．逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ の定義域は区間 $[-1, 1]$ である.



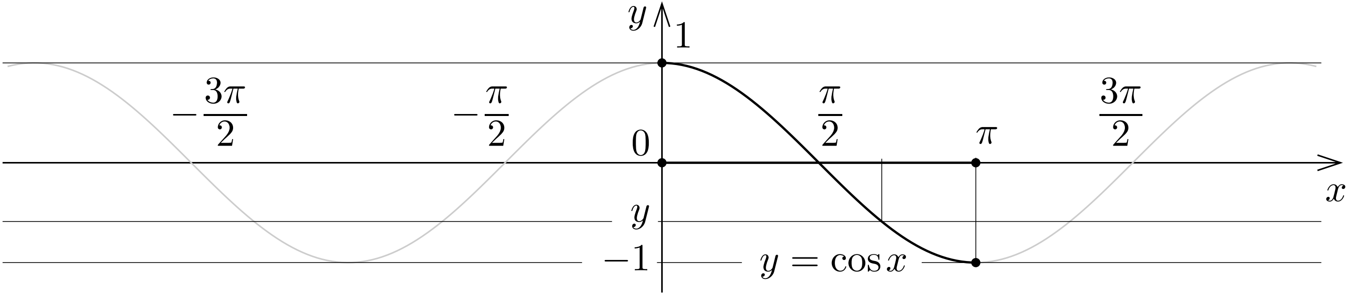
　余弦関数 $y = \cos x$ グラフを見ると分かるように，$-1 \leq y \leq 1$ である実数 y に対して $y = \cos x$ である実数 x は数多くあるので，このままでは余弦関数 $\cos x$ の逆関数があるとはいえない．実際のところ無い．



実数 x について $0 \leq x \leq \pi$ とすると，$-1 \leq y \leq 1$ である各実数 y に対して $y = \cos x$ である x は唯一つある．

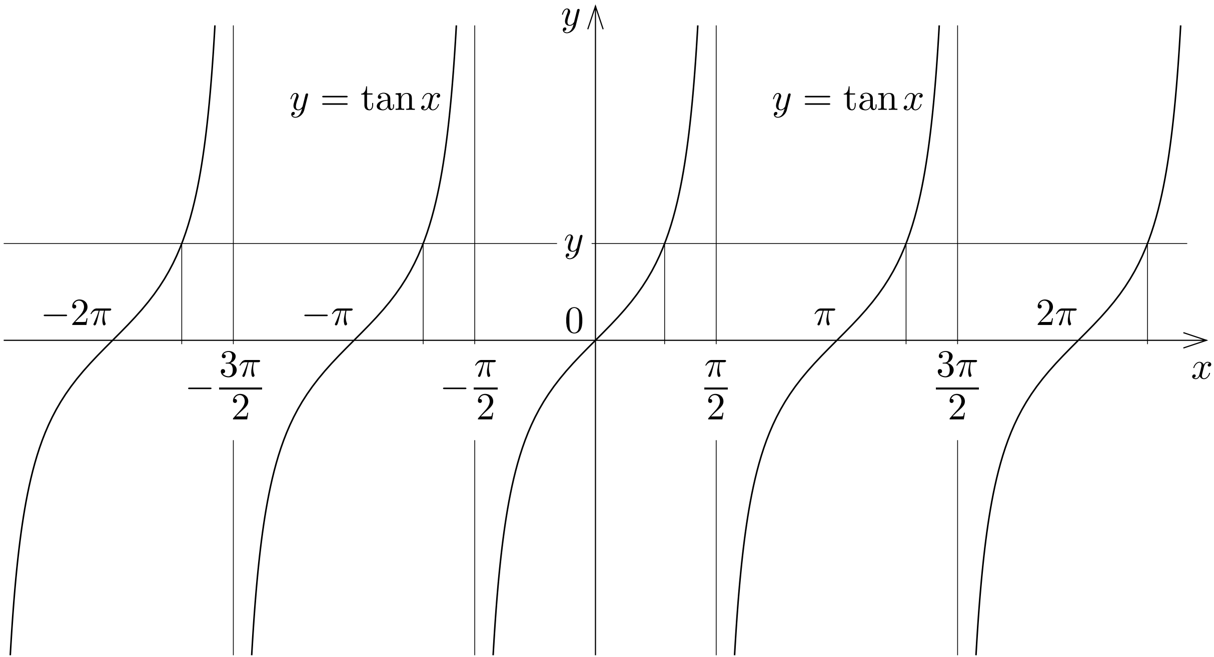


実数 x について $0 \leq x \leq \pi$ とすると，$-1 \leq y \leq 1$ である各実数 y に対して $y = \cos x$ である x は唯一つある．つまり，余弦関数 $\cos x$ の定義域を区間 $[0, \pi]$ に制限すると，値域である区間 $[-1, 1]$ の各実数 y に対して $y = \cos x$ である定義域の実数 x は唯一つあるので, 逆関数がある.

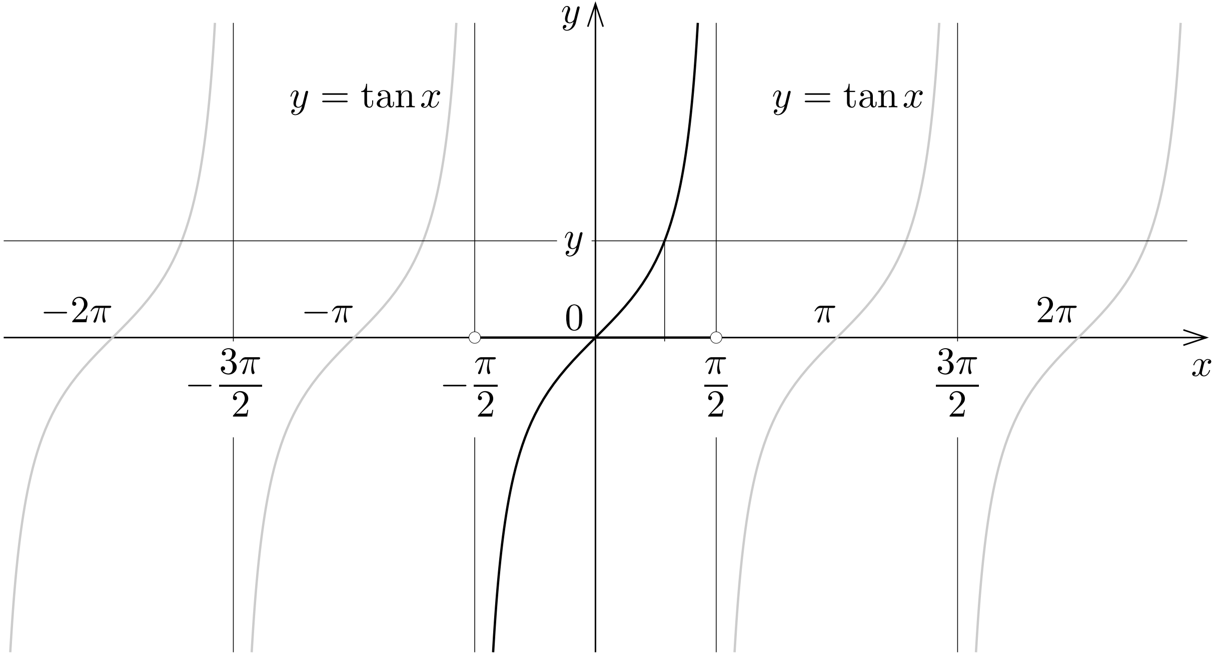


　実数 x について $0 \leq x \leq \pi$ とすると，$-1 \leq y \leq 1$ である各実数 y に対して $y = \cos x$ である x は唯一つある．つまり，余弦関数 $\cos x$ の定義域を区間 $[0, \pi]$ に制限すると，値域である区間 $[-1, 1]$ の各実数 y に対して $y = \cos x$ である定義域の実数 x は唯一つあるので, 逆関数がある.

定義　定義域が区間 $[0, \pi]$ である余弦関数 $\cos x$ の逆関数を逆余弦関数といい，逆余弦関数の実数 x における値を $\cos^{-1} x$ と書き表す．逆余弦関数 $\cos^{-1} x$ の定義域は区間 $[-1, 1]$ である.



各実数 y に対して $y = \tan x$ である実数 x は数多くあるので，このままでは正接関数 $\tan x$ の逆関数があるとはいえない．実際のところ無い．



　実数 x について $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ とすると，各実数 y に対して $y = \tan x$ である実数 x は唯一つある．

x について $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ とすると，各実数 y に対して $y = \tan x$ である実数 x は唯一つある．つまり，正接関数 $\tan x$ の定義域を区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に制限すると，各実数 y に対して $y = \tan x$ である定義域の実数 x は唯一つあるので, 逆関数がある.

x について $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ とすると，各実数 y に対して $y = \tan x$ である実数 x は唯一つある．つまり，正接関数 $\tan x$ の定義域を区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に制限すると，各実数 y に対して $y = \tan x$ である定義域の実数 x は唯一つあるので, 逆関数がある.

定義　定義域が区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ である正接関数 $\tan x$ の逆関数を逆正接関数といい，逆正接関数の実数 x における値を $\tan^{-1} x$ と書き表す．逆正接関数 $\tan^{-1} x$ の定義域は実数全体である.

関数 f の逆関数 f^{-1} の値域は関数 f の定義域である.

関数 f の逆関数 f^{-1} の値域は関数 f の定義域である.

逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ は定義域が区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数 $\sin x$ の逆関数なので，その値域は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ である.

関数 f の逆関数 f^{-1} の値域は関数 f の定義域である.

逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ は定義域が区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数 $\sin x$ の逆関数なので，その値域は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ である．逆余弦関数 $\cos^{-1} x$ は定義域が区間 $[0, \pi]$ である余弦関数 $\cos x$ の逆関数なので，その値域は $[0, \pi]$ である.

関数 f の逆関数 f^{-1} の値域は関数 f の定義域である.

逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ は定義域が区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数 $\sin x$ の逆関数なので，その値域は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ である．逆余弦関数 $\cos^{-1} x$ は定義域が区間 $[0, \pi]$ である余弦関数 $\cos x$ の逆関数なので，その値域は $[0, \pi]$ である．逆正接関数 $\tan^{-1} x$ は定義域が区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ である正接関数 $\tan x$ の逆関数なので，その値域は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ である.

関数 f の逆関数 f^{-1} の値域は関数 f の定義域である．

逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ は定義域が区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数 $\sin x$ の逆関数なので，その値域は $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ である．逆余弦関数 $\cos^{-1} x$ は定義域が区間 $[0, \pi]$ である余弦関数 $\cos x$ の逆関数なので，その値域は $[0, \pi]$ である．逆正接関数 $\tan^{-1} x$ は定義域が区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ である正接関数 $\tan x$ の逆関数なので，その値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ である．

実数 x について，

$\sin^{-1} x$ の値がある条件は $-1 \leq x \leq 1$ で，このとき $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \dfrac{\pi}{2}$ ；

$\cos^{-1} x$ の値がある条件は $-1 \leq x \leq 1$ で，このとき $0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$ ；

x がどんな実数でも $\tan^{-1} x$ の値があって $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ ．

逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ の定義域は本来は区間 $[-1,1]$ であるが，定義域を区間 $[-1,1]$ の部分集合に制限した関数 $\sin^{-1}x$ も逆正弦関数という.

逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ の定義域は本来は区間 $[-1,1]$ であるが，定義域を区間 $[-1,1]$ の部分集合に制限した関数 $\sin^{-1}x$ も逆正弦関数という.

逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ の定義域は本来は区間 $[-1,1]$ であるが，定義域を区間 $[-1,1]$ の部分集合に制限した関数 $\cos^{-1}x$ も逆余弦関数という.

逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ の定義域は本来は区間 $[-1,1]$ であるが，定義域を区間 $[-1,1]$ の部分集合に制限した関数 $\sin^{-1}x$ も逆正弦関数という.

逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ の定義域は本来は区間 $[-1,1]$ であるが，定義域を区間 $[-1,1]$ の部分集合に制限した関数 $\cos^{-1}x$ も逆余弦関数という.

逆正接関数 $\tan^{-1}x$ の定義域は本来は実数の全体であるが，定義域を実数全体の部分集合に制限した関数 $\tan^{-1}x$ も逆正接関数という.

逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ の定義域は本来は区間 $[-1,1]$ であるが，定義域を区間 $[-1,1]$ の部分集合に制限した関数 $\sin^{-1}x$ も逆正弦関数という.

逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ の定義域は本来は区間 $[-1,1]$ であるが，定義域を区間 $[-1,1]$ の部分集合に制限した関数 $\cos^{-1}x$ も逆余弦関数という.

逆正接関数 $\tan^{-1}x$ の定義域は本来は実数の全体であるが，定義域を実数全体の部分集合に制限した関数 $\tan^{-1}x$ も逆正接関数という.

逆正弦関数と逆余弦関数と逆正接関数とを併せてを逆三角関数という.

例えば $\sin^{-1}x$ と $(\sin x)^{-1}$ との違いを理解すること. $\sin^{-1}x$ は正弦関数 $\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数で, $(\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$ は $\sin x$ の逆数である.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } \; f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \; .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \ .$$

定義域が区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数を f とおく: $f(x) = \sin x$. 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆正弦関数である: $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ .$$

定義域が区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数を f とおく： $f(x) = \sin x$ ． 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆正弦関数である： $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ ． よって,

$$f^{-1}\big(f(a)\big) = \sin^{-1}\big(f(a)\big) = \sin^{-1}(\sin a) \ .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \ .$$

定義域が区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数を f とおく： $f(x) = \sin x$ ． 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆正弦関数である： $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ ． よって，

$$f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = \sin^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = \sin^{-1}(\sin a) \ .$$

f の定義域は区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ なので，

$$-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } a \text{ について } \sin^{-1}(\sin a) = a \ .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の値域の任意の実数 } b \text{ について } f\left(f^{-1}(b)\right)=b \text{ .}$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } b \text{ について } \quad f\left(f^{-1}(b)\right) = b \ .$$

定義域が区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数を f とおく： $f(x) = \sin x$ ． 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆正弦関数である： $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ ．

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の値域の任意の実数 } b \text{ について } f\left(f^{-1}(b)\right) = b \ .$$

定義域が区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数を f とおく： $f(x) = \sin x$ ． 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆正弦関数である： $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ ． よって,

$$f\left(f^{-1}(b)\right) = \sin\left(f^{-1}(b)\right) = \sin(\sin^{-1} b) \ .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の値域の任意の実数 } b \text{ について } f\big(f^{-1}(b)\big) = b \ .$$

定義域が区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数を f とおく： $f(x) = \sin x$ ． 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆正弦関数である： $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ ． よって,

$$f\big(f^{-1}(b)\big) = \sin\big(f^{-1}(b)\big) = \sin(\sin^{-1} b) \ .$$

f の値域は区間 $[-1, 1]$ なので,

$$-1 \leq b \leq 1 \text{ である任意の実数 } b \text{ について } \sin(\sin^{-1} b) = b \ .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } \quad f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \ .$$

定義域が区間 $[0,\pi]$ である余弦関数を f とおく： $f(x) = \cos x$. 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆余弦関数である： $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ .$$

定義域が区間 $[0, \pi]$ である余弦関数を f とおく： $f(x) = \cos x$ ． 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆余弦関数である： $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ ． よって，

$$f^{-1}\big(f(a)\big) = \cos^{-1}\big(f(a)\big) = \cos^{-1}(\cos a) \ .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \ .$$

定義域が区間 $[0,\pi]$ である余弦関数を f とおく： $f(x) = \cos x$ ． 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆余弦関数である： $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ ． よって,

$$f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = \cos^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = \cos^{-1}(\cos a) \ .$$

f の定義域は区間 $[0,\pi]$ なので,

$$0 \le a \le \pi \text{ である任意の実数 } a \text{ について } \cos^{-1}(\cos a) = a \ .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } b \text{ について } \quad f\left(f^{-1}(b)\right) = b \ .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の値域の任意の実数 } b \text{ について } f\left(f^{-1}(b)\right) = b \ .$$

定義域が区間 $[0, \pi]$ である余弦関数を f とおく： $f(x) = \cos x$ ． 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆余弦関数である： $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ ．

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の値域の任意の実数 } b \text{ について } f\bigl(f^{-1}(b)\bigr) = b \text{ .}$$

定義域が区間 $[0,\pi]$ である余弦関数を f とおく： $f(x) = \cos x$ ．関数 f の逆関数 f^{-1} は逆余弦関数である： $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ ．よって,

$$f\bigl(f^{-1}(b)\bigr) = \cos\bigl(f^{-1}(b)\bigr) = \cos(\cos^{-1} b) \text{ .}$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } b \text{ について } f\bigl(f^{-1}(b)\bigr) = b \ .$$

定義域が区間 $[0, \pi]$ である余弦関数を f とおく： $f(x) = \cos x$ ． 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆余弦関数である： $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ ． よって，

$$f\bigl(f^{-1}(b)\bigr) = \cos\bigl(f^{-1}(b)\bigr) = \cos(\cos^{-1} b) \ .$$

f の値域は区間 $[-1, 1]$ なので，

$$-1 \leq b \leq 1 \text{ である任意の実数 } b \text{ について } \cos(\cos^{-1} b) = b \ .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \ .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } f^{-1}\big(f(a)\big) = a\ .$$

定義域が区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ である正接関数を f とおく: $f(x) = \tan x$. 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆正接関数である: $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } a \text{ について } \ f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ .$$

定義域が区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ である正接関数を f とおく： $f(x) = \tan x$ ． 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆正接関数である： $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ ． よって，

$$f^{-1}\big(f(a)\big) = \tan^{-1}\big(f(a)\big) = \tan^{-1}(\tan a) \ .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

f の定義域の任意の実数 a について $f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a$ ．

定義域が区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ である正接関数を f とおく： $f(x) = \tan x$ ． 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆正接関数である： $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ ． よって，

$$f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = \tan^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = \tan^{-1}(\tan a) \ .$$

f の定義域は区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ なので，

$-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ である任意の実数 a について $\tan^{-1}(\tan a) = a$ ．

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } b \text{ について } \quad f\left(f^{-1}(b)\right) = b \ .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の値域の任意の実数 } b \text{ について } f\left(f^{-1}(b)\right) = b\ .$$

定義域が区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ である正接関数を f とおく: $f(x) = \tan x$. 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆正接関数である: $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の値域の任意の実数 } b \text{ について } f\big(f^{-1}(b)\big) = b \ .$$

定義域が区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ である正接関数を f とおく： $f(x) = \tan x$ ． 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆正接関数である： $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ ． よって,

$$f\big(f^{-1}(b)\big) = \tan\big(f^{-1}(b)\big) = \tan(\tan^{-1} b) \ .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の値域の任意の実数 } b \text{ について } f\left(f^{-1}(b)\right)=b\ .$$

定義域が区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ である正接関数を f とおく： $f(x)=\tan x$ ． 関数 f の逆関数 f^{-1} は逆正接関数である： $f^{-1}(x)=\tan^{-1}x$ ． よって，

$$f\left(f^{-1}(b)\right)=\tan\left(f^{-1}(b)\right)=\tan(\tan^{-1}b)\ .$$

f の値域は実数全体なので，

$$\text{任意の実数 } b \text{ について } \tan(\tan^{-1}b)=b\ .$$

定理　三角関数と逆三角関数について以下のことが成り立つ.

$$-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } a \text{ について } \sin^{-1}(\sin a) = a \text{ .}$$

$$0 \leq a \leq \pi \text{ である任意の実数 } a \text{ について } \cos^{-1}(\cos a) = a \text{ .}$$

$$-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } a \text{ について } \tan^{-1}(\tan a) = a \text{ .}$$

更に以下のことが成り立つ.

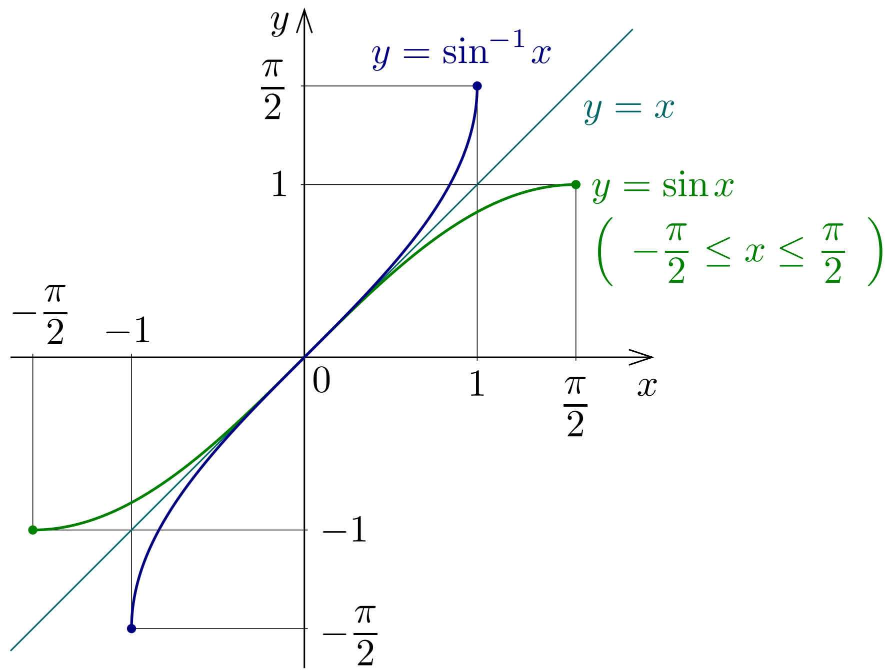
$$-1 \leq b \leq 1 \text{ である任意の実数 } b \text{ について } \sin(\sin^{-1} b) = b \text{ .}$$

$$-1 \leq b \leq 1 \text{ である任意の実数 } b \text{ について } \cos(\cos^{-1} b) = b \text{ .}$$

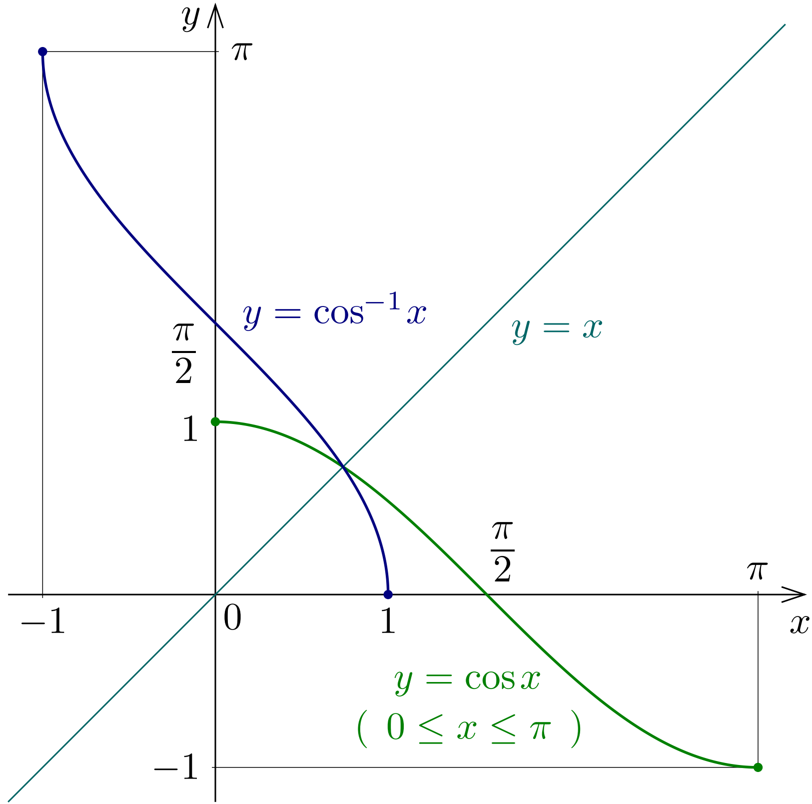
$$\text{任意の実数 } b \text{ について } \tan(\tan^{-1} b) = b \text{ .}$$

xy 座標平面において，関数 f の逆関数 f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である．この定理を三角関数・逆三角関数に適用する．

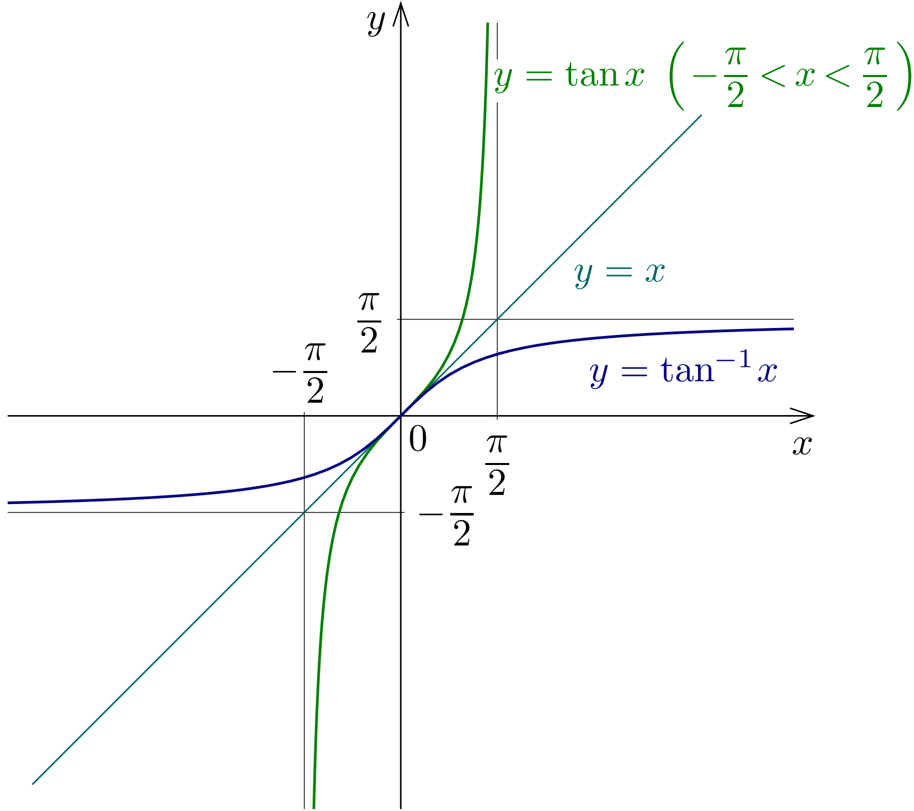
　定義域が区間 $[-1,1]$ である逆正弦関数 $y=\sin^{-1}x$ のグラフは，定義域が区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数 $y=\sin x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である.



定義域が区間 $[-1,1]$ である逆余弦関数 $y=\cos^{-1}x$ のグラフは，定義域が区間 $[0,\pi]$ である余弦関数 $y=\cos x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．



　定義域が実数全体である逆正接関数 $y=\tan^{-1}x$ のグラフは，定義域が区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ である正接関数 $y=\tan x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．



実数 a について $-1 \leq a \leq 1$ とする. $-1 \leq -a \leq 1$ なので $\sin^{-1}(-a)$ の値がある.

実数 a について $-1 \leq a \leq 1$ とする． $-1 \leq -a \leq 1$ なので $\sin^{-1}(-a)$ の値がある．公式 $A = \sin^{-1}(\sin A)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq A \leq \dfrac{\pi}{2} \right)$ において $A = -\sin^{-1} a$ とおくと

$$-\sin^{-1} a = \sin^{-1}\{\sin(-\sin^{-1} a)\} = \sin^{-1}\{-\sin(\sin^{-1} a)\} \ ,$$

　実数 a について $-1 \leq a \leq 1$ とする． $-1 \leq -a \leq 1$ なので $\sin^{-1}(-a)$ の値がある．公式 $A = \sin^{-1}(\sin A)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq A \leq \dfrac{\pi}{2} \right)$ において $A = -\sin^{-1} a$ とおくと

$$-\sin^{-1} a = \sin^{-1}\{\sin(-\sin^{-1} a)\} = \sin^{-1}\{-\sin(\sin^{-1} a)\} \ ,$$

$\sin(\sin^{-1} a) = a$ なので

$$\sin^{-1}\{-\sin(\sin^{-1} a)\} = \sin^{-1}(-a) \ .$$

実数 a について $-1 \leq a \leq 1$ とする． $-1 \leq -a \leq 1$ なので $\sin^{-1}(-a)$ の値がある．公式 $A = \sin^{-1}(\sin A)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq A \leq \dfrac{\pi}{2} \right)$ において $A = -\sin^{-1} a$ とおくと

$$-\sin^{-1} a = \sin^{-1}\{\sin(-\sin^{-1} a)\} = \sin^{-1}\{-\sin(\sin^{-1} a)\} \ ,$$

$\sin(\sin^{-1} a) = a$ なので

$$\sin^{-1}\{-\sin(\sin^{-1} a)\} = \sin^{-1}(-a) \ .$$

よって $-\sin^{-1} a = \sin^{-1}(-a)$ ．

実数 a について，公式 $A = \tan^{-1}(\tan A)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < A < \dfrac{\pi}{2}\right)$ において $A = -\tan^{-1} a$ とおくと

$$-\tan^{-1} a = \tan^{-1}\{\tan(-\tan^{-1} a)\} = \tan^{-1}\{-\tan(\tan^{-1} a)\} \ ,$$

実数 a について，公式 $A = \tan^{-1}(\tan A)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < A < \dfrac{\pi}{2} \right)$ において
$A = -\tan^{-1} a$ とおくと

$$-\tan^{-1} a = \tan^{-1}\{\tan(-\tan^{-1} a)\} = \tan^{-1}\{-\tan(\tan^{-1} a)\} ,$$

$\tan(\tan^{-1} a) = a$ なので

$$\tan^{-1}\{-\tan(\tan^{-1} a)\} = \tan^{-1}(-a) .$$

実数 a について，公式 $A = \tan^{-1}(\tan A)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < A < \dfrac{\pi}{2} \right)$ において

$A = -\tan^{-1} a$ とおくと

$$-\tan^{-1} a = \tan^{-1}\{\tan(-\tan^{-1} a)\} = \tan^{-1}\{-\tan(\tan^{-1} a)\} ,$$

$\tan(\tan^{-1} a) = a$ なので

$$\tan^{-1}\{-\tan(\tan^{-1} a)\} = \tan^{-1}(-a) .$$

よって $-\tan^{-1} a = \tan^{-1}(-a)$.

定理

$-1 \leq a \leq 1$ である任意の実数 a について $\sin^{-1}(-a) = -\sin^{-1} a$.

任意の実数 a について $\tan^{-1}(-a) = -\tan^{-1} a$.

このように逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ と逆正接関数 $\tan^{-1} x$ とは奇関数である.

定理

$-1 \leq a \leq 1$ である任意の実数 a について $\sin^{-1}(-a) = -\sin^{-1} a$.

任意の実数 a について $\tan^{-1}(-a) = -\tan^{-1} a$.

このように逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ と逆正接関数 $\tan^{-1} x$ とは奇関数である.

因みに，逆余弦関数については次のようになる：

$-1 \leq a \leq 1$ である任意の実数 a について $\cos^{-1}(-a) = \pi - \cos^{-1} a$.

$\boxed{例}$ $\dfrac{1}{2}$ における逆正弦関数の値 $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}$ 及び $-\dfrac{1}{2}$ における逆正弦関数の値 $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ を計算する.

$\boxed{例}$ $\dfrac{1}{2}$ における逆正弦関数の値 $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}$ 及び $-\dfrac{1}{2}$ における逆正弦関数の値 $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ を計算する.

$\dfrac{1}{2} = \sin$ 　　なので,

$$\sin^{-1}\frac{1}{2} = \sin^{-1}\left(\sin \quad\right) = \qquad .$$

$\boxed{\text{例}}$ $\frac{1}{2}$ における逆正弦関数の値 $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ 及び $-\frac{1}{2}$ における逆正弦関数の値 $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ を計算する.

$\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ なので,

$$\sin^{-1}\frac{1}{2} = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \ .$$

例 $\dfrac{1}{2}$ における逆正弦関数の値 $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}$ 及び $-\dfrac{1}{2}$ における逆正弦関数の値 $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ を計算する.

$\dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$ なので,

$$\sin^{-1}\frac{1}{2} = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \ .$$

これより更に

$$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sin^{-1}\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6} \ .$$

終

$\boxed{問 10.10.1}$ 以下の逆三角関数の値を計算せよ.

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad \sin^{-1}0\,, \qquad \sin^{-1}(-1)\,.$$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin$ 　　なので

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin^{-1}\left(\sin \quad\right) = \qquad .$$

$0 = \sin$ 　　なので

$$\sin^{-1}0 = \sin^{-1}(\sin \quad) = \qquad .$$

$1 = \sin$ 　　なので

$$\sin^{-1}(-1) = -\sin^{-1}1 = -\sin^{-1}\left(\sin \quad\right) = \qquad .$$

$\boxed{\text{問}\,10.10.1}$ 以下の逆三角関数の値を計算せよ.

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad \sin^{-1}0\ , \qquad \sin^{-1}(-1)\ .$$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3}$ なので

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\ .$$

$0 = \sin\quad$ なので

$$\sin^{-1}0 = \sin^{-1}(\sin\quad) = \qquad .$$

$1 = \sin\qquad$ なので

$$\sin^{-1}(-1) = -\sin^{-1}1 = -\sin^{-1}\left(\sin\qquad\right) = \qquad\qquad .$$

$\boxed{問10.10.1}$ 以下の逆三角関数の値を計算せよ.

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad \sin^{-1}0\ , \qquad \sin^{-1}(-1)\ .$$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{3}$ なので

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\ .$$

$0=\sin 0$ なので

$$\sin^{-1}0=\sin^{-1}(\sin 0)=0\ .$$

$1=\sin\quad$ なので

$$\sin^{-1}(-1)=-\sin^{-1}1=-\sin^{-1}\left(\sin\qquad\right)=\qquad\ .$$

$\boxed{\text{問}10.10.1}$ 以下の逆三角関数の値を計算せよ.

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad \sin^{-1}0\ , \qquad \sin^{-1}(-1)\ .$$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3}$ なので

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\ .$$

$0 = \sin 0$ なので

$$\sin^{-1}0 = \sin^{-1}(\sin 0) = 0\ .$$

$1 = \sin\dfrac{\pi}{2}$ なので

$$\sin^{-1}(-1) = -\sin^{-1}1 = -\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ $\sqrt{3}$ における逆正弦関数の値 $\tan^{-1}\sqrt{3}$ 及び $-\sqrt{3}$ における逆正弦関数の値 $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ を計算する.

$\boxed{例}$ $\sqrt{3}$ における逆正弦関数の値 $\tan^{-1}\sqrt{3}$ 及び $-\sqrt{3}$ における逆正弦関数の値 $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ を計算する.

$\sqrt{3} = \tan \qquad$ なので,

$$\tan^{-1}\sqrt{3} = \tan^{-1}\left(\tan \qquad\right) = \qquad .$$

$\boxed{\text{例}}$ $\sqrt{3}$ における逆正弦関数の値 $\tan^{-1}\sqrt{3}$ 及び $-\sqrt{3}$ における逆正弦関数の値 $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ を計算する.

$\sqrt{3} = \tan\dfrac{\pi}{3}$ なので,

$$\tan^{-1}\sqrt{3} = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \ .$$

$\boxed{例}$ $\sqrt{3}$ における逆正弦関数の値 $\tan^{-1}\sqrt{3}$ 及び $-\sqrt{3}$ における逆正弦関数の値 $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ を計算する.

$\sqrt{3} = \tan\dfrac{\pi}{3}$ なので,

$$\tan^{-1}\sqrt{3} = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\ .$$

これより更に

$$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\tan^{-1}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問 10.10.2}$ 以下の逆三角関数の値を求めよ.

$$\tan^{-1} 1\,, \qquad \tan^{-1} 0\,, \qquad \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,.$$

$1 = \tan \qquad$ なので

$$\tan^{-1} 1 = \tan^{-1}\Big(\tan \qquad\Big) = \qquad .$$

$0 = \tan \qquad$ なので

$$\tan^{-1} 0 = \tan^{-1}(\tan \quad) = \qquad .$$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan \qquad$ なので

$$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan^{-1}\Big(\tan \qquad\Big) = \qquad .$$

$\boxed{問 10.10.2}$ 以下の逆三角関数の値を求めよ.

$$\tan^{-1} 1\,, \qquad \tan^{-1} 0\,, \qquad \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,.$$

$1 = \tan\dfrac{\pi}{4}$ なので

$$\tan^{-1} 1 = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\,.$$

$0 = \tan\quad$ なので

$$\tan^{-1} 0 = \tan^{-1}(\tan\quad) = \quad.$$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\quad$ なので

$$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan^{-1}\left(\tan\quad\right) = \quad.$$

$\boxed{問10.10.2}$ 以下の逆三角関数の値を求めよ.

$$\tan^{-1} 1\ , \qquad \tan^{-1} 0\ , \qquad \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ .$$

$1 = \tan\dfrac{\pi}{4}$ なので

$$\tan^{-1} 1 = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\ .$$

$0 = \tan 0$ なので

$$\tan^{-1} 0 = \tan^{-1}(\tan 0) = 0\ .$$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan$ 　　なので

$$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan^{-1}\left(\tan \quad\right) = \qquad .$$

$\boxed{問 10.10.2}$ 以下の逆三角関数の値を求めよ.

$$\tan^{-1} 1\,, \qquad \tan^{-1} 0\,, \qquad \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,.$$

$1 = \tan\dfrac{\pi}{4}$ なので

$$\tan^{-1} 1 = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\,.$$

$0 = \tan 0$ なので

$$\tan^{-1} 0 = \tan^{-1}(\tan 0) = 0\,.$$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\dfrac{\pi}{6}$ なので

$$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}\,.$$

$\boxed{終}$

例 次の式を計算する：$\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$.

$x = \cos^{-1}\dfrac{3}{4}$ とおく. $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{4}\right) = \sin x$ を計算する.

$$\cos x = \cos\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right) = \qquad ,$$

例 次の式を計算する：$\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$.

$x = \cos^{-1}\frac{3}{4}$ とおく. $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right) = \sin x$ を計算する.

$$\cos x = \cos\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \ ,$$

$$\sin^2 x = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \qquad ,$$

$\boxed{例}$ 次の式を計算する：$\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$.

$x = \cos^{-1}\dfrac{3}{4}$ とおく. $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{4}\right) = \sin x$ を計算する.

$$\cos x = \cos\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \ ,$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \ ,$$

$$\sin x = \qquad\qquad = \qquad\qquad ;$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$.

$x = \cos^{-1}\dfrac{3}{4}$ とおく. $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{4}\right) = \sin x$ を計算する.

$$\cos x = \cos\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \ ,$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \ ,$$

$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{7}{16}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} \ ;$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$.

$x = \cos^{-1}\dfrac{3}{4}$ とおく. $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{4}\right) = \sin x$ を計算する.

$$\cos x = \cos\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \ ,$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \ ,$$

$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{7}{16}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} \ ;$$

$0 \leq \cos^{-1}\dfrac{3}{4} \leq \pi$ つまり $0 \leq x \leq \pi$ なので $\sin x \quad 0$, よって $\sin x =$.

$\boxed{例}$ 次の式を計算する：$\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$.

$x=\cos^{-1}\dfrac{3}{4}$ とおく. $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{4}\right)=\sin x$ を計算する.

$$\cos x=\cos\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}\ ,$$

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}\ ,$$

$$\sin x=\pm\sqrt{\frac{7}{16}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}\ ;$$

$0\le\cos^{-1}\dfrac{3}{4}\le\pi$ つまり $0\le x\le\pi$ なので $\sin x\ge 0$, よって $\sin x=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

例 次の式を計算する：$\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$.

$x = \cos^{-1}\dfrac{3}{4}$ とおく. $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{4}\right) = \sin x$ を計算する.

$$\cos x = \cos\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \ ,$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \ ,$$

$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{7}{16}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} \ ;$$

$0 \leq \cos^{-1}\dfrac{3}{4} \leq \pi$ つまり $0 \leq x \leq \pi$ なので $\sin x \geq 0$, よって $\sin x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

故に $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{4}\right) = \sin x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. 終

$\boxed{\text{問}10.10.3}$ 次の式を計算せよ： $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$ ．

$x = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ とおく.

$$\sin x = \sin\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \qquad ,$$

$$\cos^2 x = \qquad = \qquad = \qquad = \quad .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos x \quad 0$ ，よって

$\cos x = \sqrt{\quad} = \quad$ ．故に $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right) = \quad$ ．

$\boxed{問10.10.3}$ 次の式を計算せよ： $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$ ．

$x = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ とおく.

$$\sin x = \sin\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3} ,$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos x \quad 0$ ，よって

$\cos x = \sqrt{\quad} = \quad$ ．故に $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right) = \quad$ ．

$\boxed{\text{問}\,10.10.3}$ 次の式を計算せよ： $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

$x = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ とおく.

$$\sin x = \sin\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3} ,$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos x \geq 0$, よって

$\cos x = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$. 故に $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**：$\cos(\tan^{-1}3)$.

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**：$\cos(\tan^{-1}3)$.

$x = \tan^{-1}3$ とおく. $\cos(\tan^{-1}3) = \cos x$ を計算する.

$$\tan x = \tan(\tan^{-1}3) = \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**: $\cos(\tan^{-1}3)$.

$x = \tan^{-1}3$ とおく. $\cos(\tan^{-1}3) = \cos x$ を計算する.

$$\tan x = \tan(\tan^{-1}3) = 3 \ .$$

$\boxed{例}$ 次の式を計算する：$\cos(\tan^{-1}3)$.

$x = \tan^{-1}3$ とおく. $\cos(\tan^{-1}3) = \cos x$ を計算する.

$$\tan x = \tan(\tan^{-1}3) = 3 \ .$$

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{}$ なので,

例 次の式を計算する：$\cos(\tan^{-1}3)$.

$x = \tan^{-1}3$ とおく. $\cos(\tan^{-1}3) = \cos x$ を計算する.

$$\tan x = \tan(\tan^{-1}3) = 3 \ .$$

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので,

$$\cos^2 x = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \qquad ,$$

$\boxed{例}$ 次の式を計算する：$\cos(\tan^{-1}3)$.

$x = \tan^{-1}3$ とおく． $\cos(\tan^{-1}3) = \cos x$ を計算する．

$$\tan x = \tan(\tan^{-1}3) = 3 \ .$$

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので，

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+3^2} = \frac{1}{10} \ ,$$

$$\cos x = \qquad\qquad = \qquad\qquad ;$$

例 次の式を計算する：$\cos(\tan^{-1}3)$.

$x = \tan^{-1}3$ とおく． $\cos(\tan^{-1}3) = \cos x$ を計算する．

$$\tan x = \tan(\tan^{-1}3) = 3 \ .$$

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので，

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+3^2} = \frac{1}{10} \ ,$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \ ;$$

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**：$\cos(\tan^{-1}3)$ ．

$x = \tan^{-1}3$ とおく． $\cos(\tan^{-1}3) = \cos x$ を計算する．

$$\tan x = \tan(\tan^{-1}3) = 3 \ .$$

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので，

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+3^2} = \frac{1}{10} \ ,$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \ ;$$

$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}3 < \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos x \quad 0$ ，よって

$\cos x = \qquad$.

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\cos(\tan^{-1}3)$.

$x = \tan^{-1}3$ とおく. $\cos(\tan^{-1}3) = \cos x$ を計算する.

$$\tan x = \tan(\tan^{-1}3) = 3 \ .$$

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので,

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+3^2} = \frac{1}{10} \ ,$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \ ;$$

$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}3 < \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos x > 0$, よって

$\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\cos(\tan^{-1}3)$.

$x = \tan^{-1}3$ とおく. $\cos(\tan^{-1}3) = \cos x$ を計算する.

$$\tan x = \tan(\tan^{-1}3) = 3 \ .$$

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので,

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+3^2} = \frac{1}{10} \ ,$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \ ;$$

$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}3 < \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos x > 0$, よって

$\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. 故に $\cos(\tan^{-1}3) = \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 10.10.4}$ 次の式を計算せよ：$\cos\left\{\tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}$.

$x = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)$ とおく.

$$\tan x = \tan\left\{\tan^{-1}\left(\qquad\right)\right\} = \qquad .$$

$1 + \tan^2 x = \qquad\qquad$ なので,

$$\cos^2 x = \frac{}{\qquad\qquad} = \frac{}{\qquad\qquad} = \qquad .$$

$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ なので, $\cos x \quad 0$, よって

$\cos x = \sqrt{\qquad} = \qquad\qquad$. 故に $\cos\left\{\tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)\right\} = \qquad\qquad$.

$\boxed{問 10.10.4}$ **次の式を計算せよ**：$\cos\left\{\tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}$.

$x = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)$ **とおく**.

$$\tan x = \tan\left\{\tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)\right\} = -\frac{5}{2} \ .$$

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ **なので**,

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+\left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{4}{29} \ .$$

$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}\left(-\dfrac{5}{2}\right) < \dfrac{\pi}{2}$ **つまり** $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ **なので**, $\cos x \quad 0$, **よって**

$\cos x = \sqrt{\quad} = \qquad$. **故に** $\cos\left\{\tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)\right\} = \qquad$.

$\boxed{\text{問}10.10.4}$ 次の式を計算せよ：$\cos\left\{\tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}$.

$x=\tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)$ とおく.

$$\tan x = \tan\left\{\tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)\right\} = -\frac{5}{2} \ .$$

$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので,

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+\left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{4}{29} \ .$$

$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ なので, $\cos x > 0$, よって

$\cos x = \sqrt{\dfrac{4}{29}} = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$. 故に $\cos\left\{\tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)\right\} = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\sin^{-1}(\sin 6)$.

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\sin^{-1}(\sin 6)$ ．

実数 a について $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ のときに限り $\sin^{-1}(\sin a) = a$ ．この公式を適用できるように $\sin^{-1}(\sin 6)$ を変形する.

$\boxed{例}$ 次の式を計算する：$\sin^{-1}(\sin 6)$ ．

実数 a について $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ のときに限り $\sin^{-1}(\sin a) = a$ ． この公式を適用できるように $\sin^{-1}(\sin 6)$ を変形する.

-2π が正弦関数 $\sin x$ の周期なので,

$$\sin 6 = \sin(6 - 2\pi) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\sin^{-1}(\sin 6)$.

実数 a について $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ のときに限り $\sin^{-1}(\sin a) = a$. この公式を適用できるように $\sin^{-1}(\sin 6)$ を変形する.

-2π が正弦関数 $\sin x$ の周期なので,

$$\sin 6 = \sin(6 - 2\pi) .$$

$6 - 2\pi \fallingdotseq 6 - 6.28 = -0.28$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq 6 - 2\pi \leq \frac{\pi}{2}$.

例 次の式を計算する：$\sin^{-1}(\sin 6)$.

実数 a について $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ のときに限り $\sin^{-1}(\sin a) = a$. この公式を適用できるように $\sin^{-1}(\sin 6)$ を変形する.

-2π が正弦関数 $\sin x$ の周期なので,

$$\sin 6 = \sin(6 - 2\pi) \ .$$

$6 - 2\pi \fallingdotseq 6 - 6.28 = -0.28$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq 6 - 2\pi \leq \frac{\pi}{2}$. よって

$$\sin^{-1}(\sin 6) = \sin^{-1}\{\sin(6 - 2\pi)\} = 6 - 2\pi \ .$$

終

問10.10.5 次の式を計算せよ：$\sin^{-1}\{\sin(-7)\}$.

が正弦関数 $\sin x$ の周期なので,

$$\sin(-7) = \sin(\qquad\qquad) \ .$$

$\fallingdotseq \qquad\qquad =$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq \qquad\qquad \leq \frac{\pi}{2}$, よって

$$\sin^{-1}\{\sin(-7)\} = \sin^{-1}\{\sin(\qquad\qquad)\} = \qquad\qquad .$$

$\boxed{問 10.10.5}$ 次の式を計算せよ：$\sin^{-1}\{\sin(-7)\}$.

2π が正弦関数 $\sin x$ の周期なので,

$$\sin(-7) = \sin(2\pi - 7) \ .$$

$2\pi - 7 \fallingdotseq 6.28 - 7 = -0.72$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq 2\pi - 7 \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって

$$\sin^{-1}\{\sin(-7)\} = \sin^{-1}\{\sin(2\pi - 7)\} = 2\pi - 7 \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}10.10.6}$ 次の式を計算する：$\sin^{-1}(\sin 13)$ ．

が正弦関数 $\sin x$ の周期なので，

$$\sin 13 = \sin(\qquad\qquad) \ .$$

$\fallingdotseq$ $\qquad\qquad =$ $\qquad$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq \qquad\qquad \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって

$$\sin^{-1}(\sin 13) = \sin^{-1}\{\sin(\qquad\qquad)\} = \qquad\qquad .$$

$\boxed{問 10.10.6}$ 次の式を計算する：$\sin^{-1}(\sin 13)$.

-4π が正弦関数 $\sin x$ の周期なので，

$$\sin 13 = \sin(13 - 4\pi) \ .$$

$13 - 4\pi \fallingdotseq 13 - 12.57 = 0.43$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq 13 - 4\pi \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって

$$\sin^{-1}(\sin 13) = \sin^{-1}\{\sin(13 - 4\pi)\} = 13 - 4\pi \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**：$\tan^{-1}(\tan 4)$.

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する：$\tan^{-1}(\tan 4)$ ．

実数 a について $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ のときに限り $\tan^{-1}(\tan a) = a$ ．この公式を適用できるように $\tan^{-1}(\tan 4)$ を変形する.

$\boxed{例}$ 次の式を計算する：$\tan^{-1}(\tan 4)$ ．

実数 a について $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ のときに限り $\tan^{-1}(\tan a) = a$ ． この公式を適用できるように $\tan^{-1}(\tan 4)$ を変形する.

$-\pi$ が正接関数 $\tan x$ の周期なので,

$$\tan 4 = \tan(4 - \pi) \ .$$

例 次の式を計算する：$\tan^{-1}(\tan 4)$.

実数 a について $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ のときに限り $\tan^{-1}(\tan a) = a$. この公式を適用できるように $\tan^{-1}(\tan 4)$ を変形する.

$-\pi$ が正接関数 $\tan x$ の周期なので,

$$\tan 4 = \tan(4-\pi) \ .$$

$4-\pi \fallingdotseq 4-3.14 = 0.86$ なので $-\frac{\pi}{2} < 4-\pi < \frac{\pi}{2}$.

例 次の式を計算する：$\tan^{-1}(\tan 4)$ ．

実数 a について $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ のときに限り $\tan^{-1}(\tan a) = a$ ． この公式を適用できるように $\tan^{-1}(\tan 4)$ を変形する.

$-\pi$ が正接関数 $\tan x$ の周期なので,

$$\tan 4 = \tan(4-\pi) \ .$$

$4-\pi \fallingdotseq 4-3.14 = 0.86$ なので $-\frac{\pi}{2} < 4-\pi < \frac{\pi}{2}$ ． よって

$$\tan^{-1}(\tan 4) = \tan^{-1}\{\tan(4-\pi)\} = 4-\pi \ .$$

終

$\boxed{\text{問}10.10.7}$ 次の式を計算せよ：$\tan^{-1}\{\tan(-3)\}$.

が正接関数 $\tan x$ の周期なので,

$$\tan(-3) = \tan(\qquad) .$$

$\fallingdotseq$ $\qquad\qquad =$ $\qquad$ なので $-\dfrac{\pi}{2} < \qquad < \dfrac{\pi}{2}$. よって

$$\tan^{-1}\{\tan(-3)\} = \tan^{-1}\{\tan(\qquad)\} = \qquad\qquad .$$

$\boxed{問 10.10.7}$ 次の式を計算せよ：$\tan^{-1}\{\tan(-3)\}$ ．

π が正接関数 $\tan x$ の周期なので,

$$\tan(-3) = \tan(\pi - 3) \ .$$

$\pi - 3 \fallingdotseq 3.14 - 3 = 0.14$ なので $-\dfrac{\pi}{2} < \pi - 3 < \dfrac{\pi}{2}$ ．よって

$$\tan^{-1}\{\tan(-3)\} = \tan^{-1}\{\tan(\pi - 3)\} = \pi - 3 \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}10.10.8}$ 次の式を計算せよ：$\tan^{-1}(\tan 9)$ ．

が正接関数 $\tan x$ の周期なので，

$$\tan 9 = \tan(\qquad\qquad)\ .$$

$\fallingdotseq \qquad\qquad =$ 　　　　　なので $-\dfrac{\pi}{2} < \qquad\qquad < \dfrac{\pi}{2}$ ．よって

$$\tan^{-1}(\tan 9) = \tan^{-1}\{\tan(\qquad\qquad)\} = \qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{問}10.10.8}$ 次の式を計算せよ：$\tan^{-1}(\tan 9)$.

-3π が正接関数 $\tan x$ の周期なので，

$$\tan 9 = \tan(9-3\pi) \ .$$

$9-3\pi \fallingdotseq 9-9.42 = -0.42$ なので $-\dfrac{\pi}{2} < 9-3\pi < \dfrac{\pi}{2}$ ．よって

$$\tan^{-1}(\tan 9) = \tan^{-1}\{\tan(9-3\pi)\} = 9-3\pi \ .$$

$\boxed{\text{終}}$