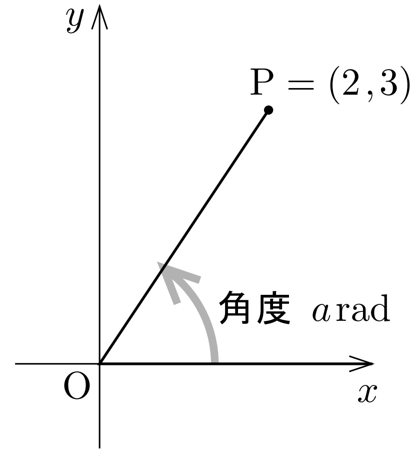
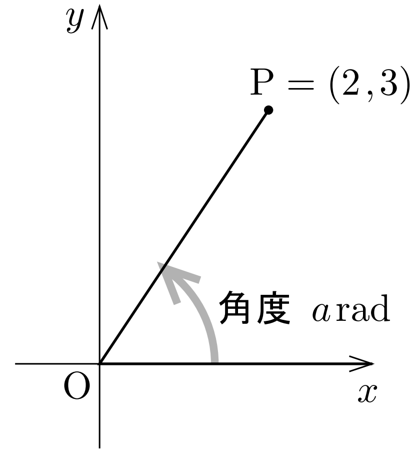
10. 補遺 4　逆正接関数の利用

例 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\,\mathrm{rad}$（a は実数）とおく．$-\pi < a \leq \pi$ とする．逆正接関数を用いて a の値を表す．



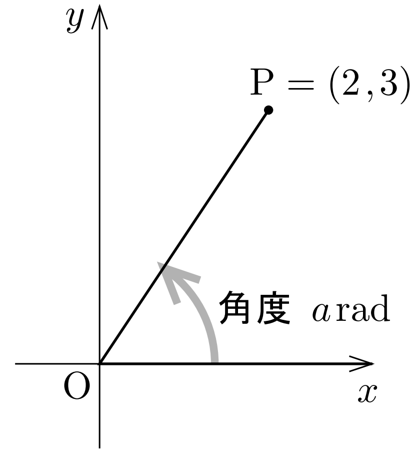
例 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\,\mathrm{rad}$（a は実数）とおく． $-\pi < a \leq \pi$ とする．逆正接関数を用いて a の値を表す．



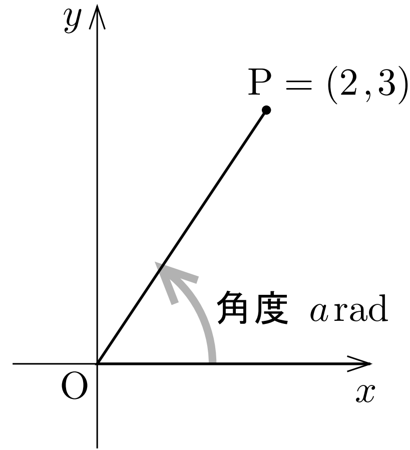
$\tan a =$ 　　 なので $\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1}$ 　　 .

$\boxed{例}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\,\mathrm{rad}$（a は実数）とおく． $-\pi < a \leq \pi$ とする．逆正接関数を用いて a の値を表す．

$$\tan a = \frac{3}{2} \text{ なので } \tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1}\frac{3}{2} .$$

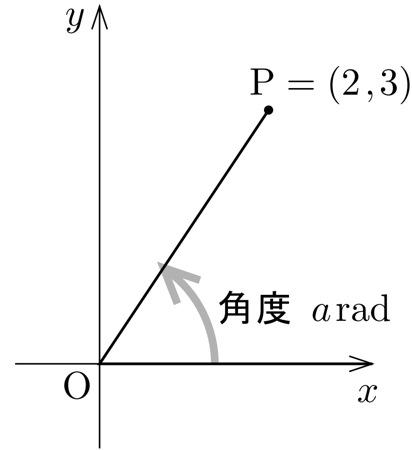


例 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\,\mathrm{rad}$（a は実数）とおく．$-\pi<a\leq\pi$ とする．逆正接関数を用いて a の値を表す．



$\tan a=\dfrac{3}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan a)=\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$．点 P の x 座標が正なので，$-\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{\pi}{2}$，よって $\tan^{-1}(\tan a)=a$．

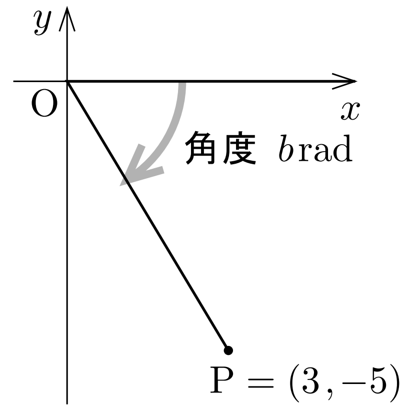
例 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\,\mathrm{rad}$（a は実数）とおく． $-\pi<a\leq\pi$ とする．逆正接関数を用いて a の値を表す．



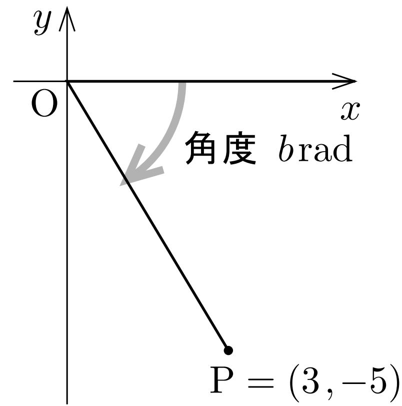
$\tan a=\dfrac{3}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan a)=\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ ．点 P の x 座標が正なので， $-\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\tan^{-1}(\tan a)=a$ ．故に $a=\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ ．

終

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P} = (3, -5)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b$rad（ b は実数）とおく． $-\pi < b \leq \pi$ とする．逆正接関数を用いて b の値を表す．



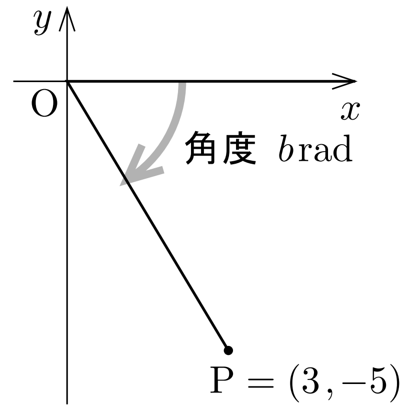
例 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(3,-5)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b\,\mathrm{rad}$（b は実数）とおく．$-\pi<b\leq\pi$ とする．逆正接関数を用いて b の値を表す．



$\tan b=\qquad=\qquad$ なので

$$\tan^{-1}(\tan b)=\tan^{-1}\Big(\qquad\Big)=-\tan^{-1}\qquad.$$

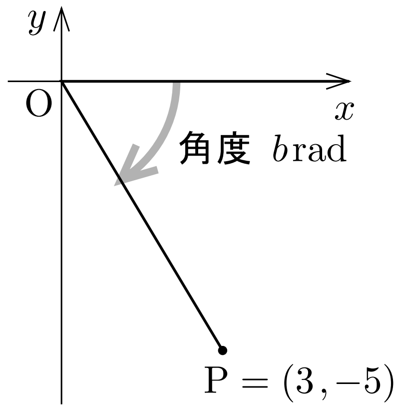
例 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(3,-5)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b$rad（b は実数）とおく．$-\pi<b\leq\pi$ とする．逆正接関数を用いて b の値を表す．



$\tan b=\dfrac{-5}{3}=-\dfrac{5}{3}$ なので

$$\tan^{-1}(\tan b)=\tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right)=-\tan^{-1}\frac{5}{3}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(3,-5)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b\,\mathrm{rad}$（b は実数）とおく．$-\pi < b \leq \pi$ とする．逆正接関数を用いて b の値を表す．

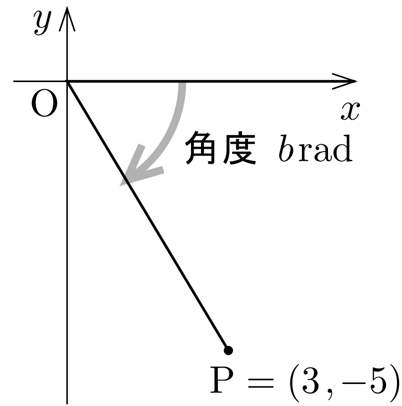


$$\tan b = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3} \text{ なので}$$

$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{5}{3}\ .$$

点 P の x 座標が正なので，$-\dfrac{\pi}{2} < b < \dfrac{\pi}{2}$，よって $\tan^{-1}(\tan b) = b$ ．

例 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(3,-5)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b$rad（b は実数）とおく．$-\pi<b\le\pi$ とする．逆正接関数を用いて b の値を表す．



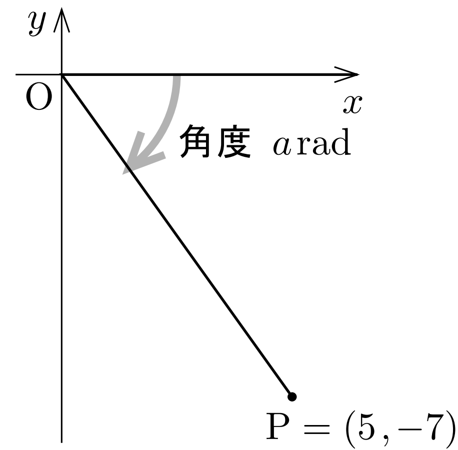
$\tan b=\dfrac{-5}{3}=-\dfrac{5}{3}$ なので

$$\tan^{-1}(\tan b)=\tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right)=-\tan^{-1}\frac{5}{3}\ .$$

点 P の x 座標が正なので，$-\dfrac{\pi}{2}<b<\dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\tan^{-1}(\tan b)=b$ ．故に

$b=-\tan^{-1}\dfrac{5}{3}$ ． 終

問10.補遺4.1 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(5,-7)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\,\mathrm{rad}$（a は実数）とおく．$-\pi<a\leq\pi$ とする．逆正接関数を用いて a の値を表せ．



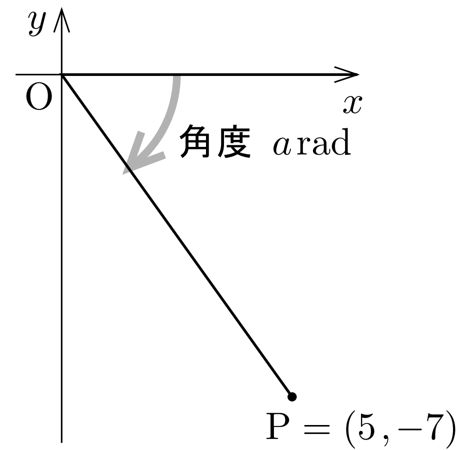
$\tan a = \qquad = \qquad$ なので

$$\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1}\left(\qquad\right) = \qquad\qquad .$$

点 P の x 座標が正なので，$-\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{\pi}{2}$，よって $\tan^{-1}(\tan a)= \quad$．故に

$a = \qquad\qquad .$

$\boxed{\text{問10.補遺4.1}}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(5,-7)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\,\mathrm{rad}$（a は実数）とおく．$-\pi<a\leq\pi$ とする．逆正接関数を用いて a の値を表せ．



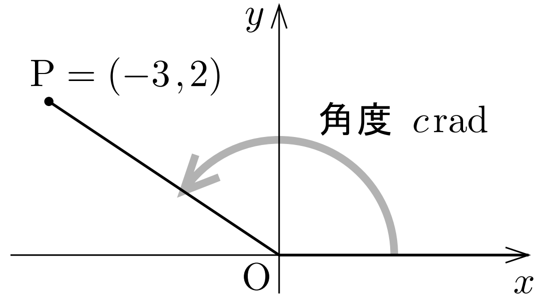
$$\tan a=\frac{-7}{5}=-\frac{7}{5} \text{ なので}$$

$$\tan^{-1}(\tan a)=\tan^{-1}\left(-\frac{7}{5}\right)=-\tan^{-1}\frac{7}{5}\ .$$

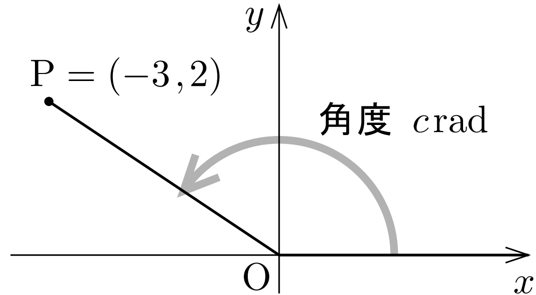
点 P の x 座標が正なので，$-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}$，よって $\tan^{-1}(\tan a)=a$．故に $a=-\tan^{-1}\frac{7}{5}$ ．

終

例 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-3,2)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c\,\mathrm{rad}$（c は実数）とおく．$-\pi < c \leq \pi$ とする．逆正接関数を用いて c の値を表す．



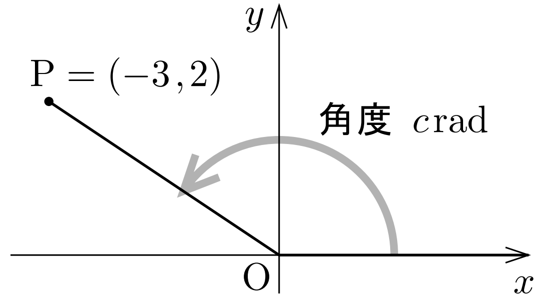
$\boxed{例}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P} = (-3, 2)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c\,\mathrm{rad}$（c は実数）とおく．$-\pi < c \leq \pi$ とする．逆正接関数を用いて c の値を表す．



$\tan c = \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3}$ なので

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{2}{3} .$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-3,2)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c\,\mathrm{rad}$（c は実数）とおく．$-\pi<c\leq\pi$ とする．逆正接関数を用いて c の値を表す．

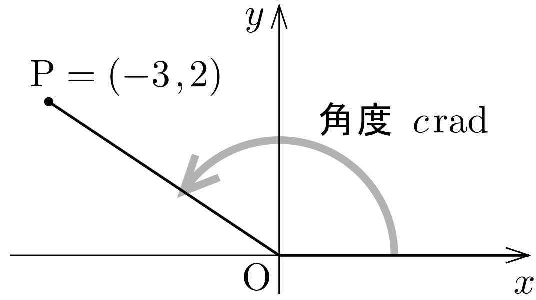


$$\tan c=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$$ なので

$$\tan^{-1}(\tan c)=\tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)=-\tan^{-1}\frac{2}{3}\ .$$

$-\frac{\pi}{2}<c<\frac{\pi}{2}$ ならば $\tan^{-1}(\tan c)=c$ だが，$c>\frac{\pi}{2}$ なので，$\tan^{-1}(\tan c)$ を c に変形できない．$\tan c=\tan(c-\pi)$ なので，$\tan^{-1}\{\tan(c-\pi)\}$ を考える．

例 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-3,2)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c$rad（c は実数）とおく．$-\pi<c\leq\pi$ とする．逆正接関数を用いて c の値を表す．



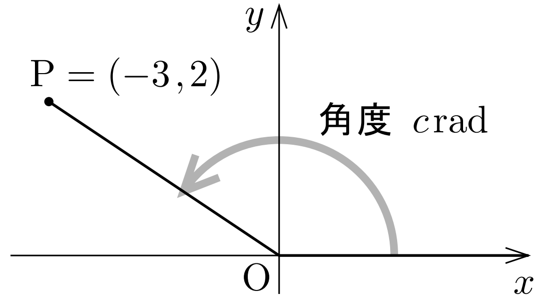
$\tan c=\dfrac{2}{-3}=-\dfrac{2}{3}$ なので

$$\tan^{-1}(\tan c)=\tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)=-\tan^{-1}\frac{2}{3}\ .$$

$\dfrac{\pi}{2}<c\leq\pi$ なので $-\dfrac{\pi}{2}<c-\pi\leq 0$，よって

$$\tan^{-1}(\tan c)=\tan^{-1}\{\tan(c-\pi)\}=c-\pi\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-3,2)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c\,\mathrm{rad}$（c は実数）とおく．$-\pi<c\leq\pi$ とする．逆正接関数を用いて c の値を表す．



$\tan c=\dfrac{2}{-3}=-\dfrac{2}{3}$ なので

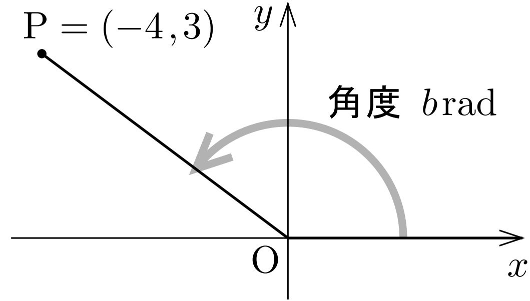
$$\tan^{-1}(\tan c)=\tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)=-\tan^{-1}\frac{2}{3}\ .$$

$\dfrac{\pi}{2}<c\leq\pi$ なので $-\dfrac{\pi}{2}<c-\pi\leq 0$ ，よって

$$\tan^{-1}(\tan c)=\tan^{-1}\{\tan(c-\pi)\}=c-\pi\ .$$

従って $c-\pi=-\tan^{-1}\dfrac{2}{3}$ なので，$c=\pi-\tan^{-1}\dfrac{2}{3}$ ． $\boxed{\text{終}}$

問10.補遺4.2 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-4,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b$rad（b は実数）とおく．$-\pi<b\leq\pi$ とする．逆正接関数を用いて b の値を表せ．



$\tan b=-\dfrac{3}{4}$ なので

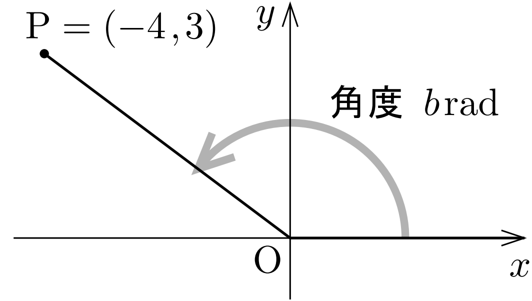
$$\tan^{-1}(\tan b)=\tan^{-1}\Bigl(\qquad\Bigr)=\qquad\qquad .$$

$\dfrac{\pi}{2}<b<\pi$ なので $-\dfrac{\pi}{2}<\qquad<0$，よって

$$\tan^{-1}(\tan b)=\tan^{-1}\{\tan(\qquad)\}=\qquad .$$

従って $\qquad=\qquad\qquad$ なので，$b=\qquad\qquad$.

$\boxed{\text{問}10.\text{補遺}4.2}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-4,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b$rad（b は実数）とおく． $-\pi<b\leq\pi$ とする．逆正接関数を用いて b の値を表せ．



$\tan b=-\dfrac{3}{4}$ なので

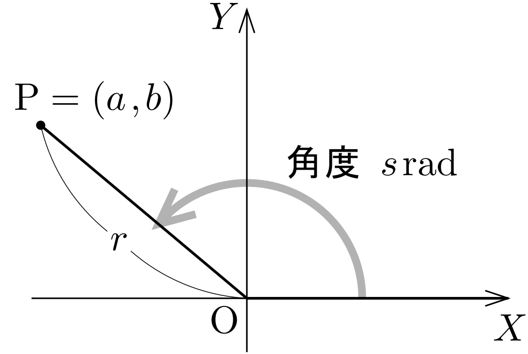
$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{4} \ .$$

$\dfrac{\pi}{2}<b<\pi$ なので $-\dfrac{\pi}{2}<b-\pi<0$ ，よって

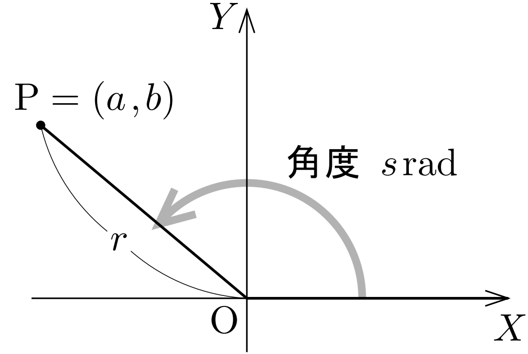
$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\{\tan(b-\pi)\} = b-\pi \ .$$

従って $b-\pi=-\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ なので， $b=\pi-\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ ． $\boxed{\text{終}}$

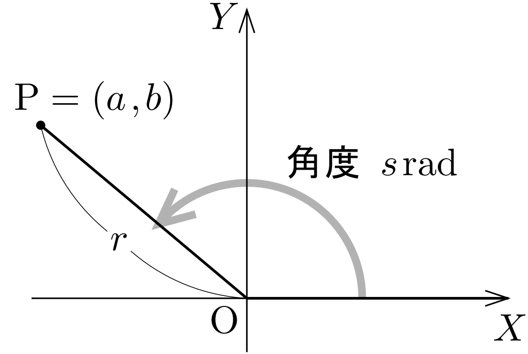
定数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (a, b)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\,\mathrm{rad}$（s は実数）とおき，$r = \overline{\mathrm{OP}}$ とおく．



定数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (a, b)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\,\mathrm{rad}$（ s は実数）とおき，$r = \overline{\mathrm{OP}}$ とおく．$\mathrm{P} = (r\cos s, r\sin s)$ なので，$a = r\cos s$ かつ $b = r\sin s$ ．



定数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (a, b)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\,\mathrm{rad}$（s は実数）とおき，$r = \overline{\mathrm{OP}}$ とおく．

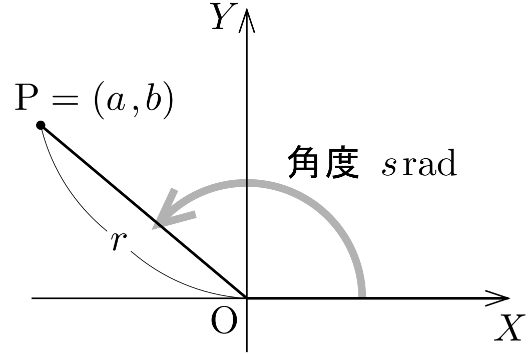


$\mathrm{P} = (r\cos s, r\sin s)$ なので，$a = r\cos s$ かつ $b = r\sin s$．よって，各実数 x に対して，

$$a\sin x + b\cos x = r\cos s\sin x + r\sin s\cos x = r(\sin x\cos s + \cos x\sin s)$$

$$= \qquad\qquad\qquad .$$

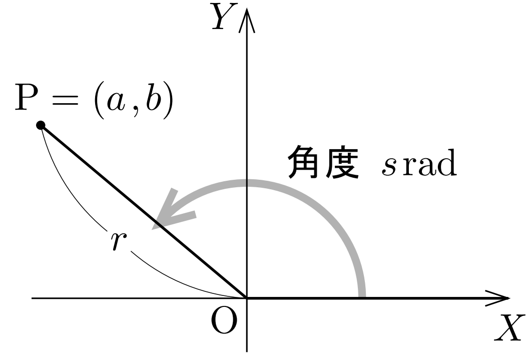
定数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (a, b)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\,\mathrm{rad}$（ s は実数）とおき，$r = \overline{\mathrm{OP}}$ とおく．$\mathrm{P} = (r\cos s, r\sin s)$ なので，$a = r\cos s$ かつ $b = r\sin s$ ．よって，各実数 x に対して，



$$a\sin x + b\cos x = r\cos s\sin x + r\sin s\cos x = r(\sin x\cos s + \cos x\sin s)$$

$$= r\sin(x + s)\ .$$

定数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (a\,, b)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0\,, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\,\mathrm{rad}$（ s は実数）とおき， $r = \overline{\mathrm{OP}}$ とおく． $\mathrm{P} = (r\cos s\,, r\sin s)$ なので， $a = r\cos s$ かつ $b = r\sin s$ ．よって，各実数 x に対して，



$$a\sin x + b\cos x = r\cos s\sin x + r\sin s\cos x = r(\sin x\cos s + \cos x\sin s)$$

$$= r\sin(x+s)\ .$$

$r = \overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{a^2+b^2}$ なので，

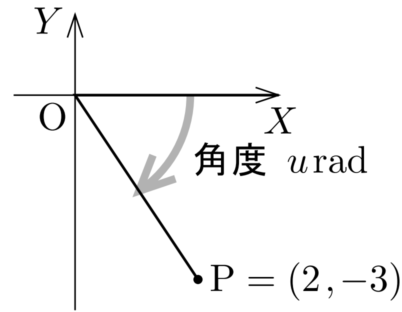
$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+s)\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について

$$2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s) \quad .$$

$\boxed{例}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$.

XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,-3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．

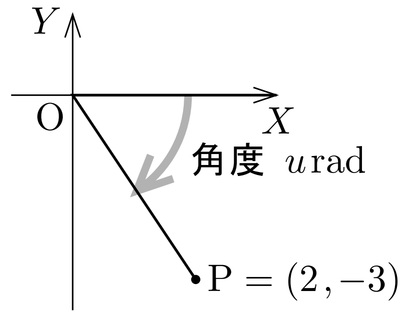


$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 $r\,,s$ の組を一つ求める：任意の実数 x について

$2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$.

XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2\,,-3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

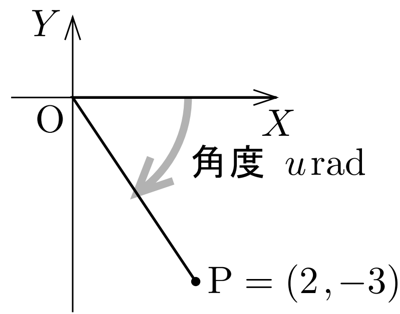
$$\begin{aligned} 2\sin x - 3\cos x &= \sqrt{2^2+(-3)^2}\,\sin(x+u) \\ &= \sqrt{13}\,\sin(x+u)\ . \end{aligned}$$



例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について
$2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$.

XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,-3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u$rad（u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$\begin{aligned} 2\sin x - 3\cos x &= \sqrt{2^2+(-3)^2}\sin(x+u) \\ &= \sqrt{13}\sin(x+u) \ . \end{aligned}$$



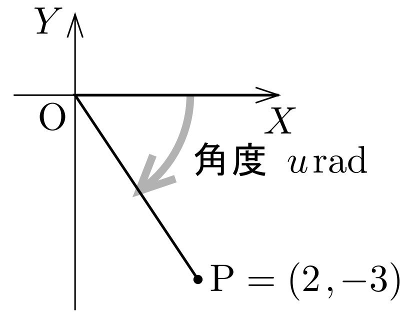
$\tan u = \dfrac{-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{2} \ .$$

$\boxed{例}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$ ．

XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (2, -3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$2\sin x - 3\cos x = \sqrt{2^2 + (-3)^2}\sin(x+u)$$
$$= \sqrt{13}\sin(x+u)\ .$$



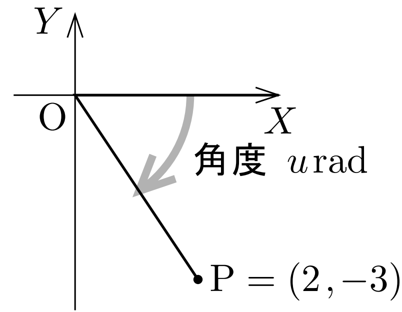
$\tan u = \dfrac{-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{2}\ .$$

$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = u$ ，よって $u = -\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 $r\,,s$ の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x-3\cos x=r\sin(x+s)$.

XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,-3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について



$$2\sin x-3\cos x=\sqrt{2^2+(-3)^2}\sin(x+u)$$
$$=\sqrt{13}\sin(x+u)\ .$$

$\tan u=\dfrac{-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$ なので，

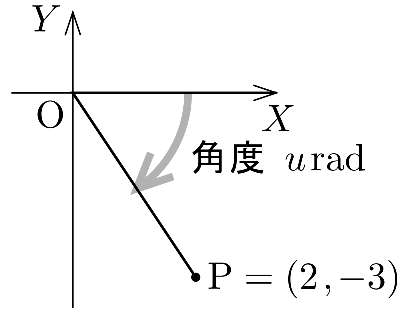
$$\tan^{-1}(\tan u)=\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)=-\tan^{-1}\frac{3}{2}\ .$$

$-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u)=u$ ，よって $u=-\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ ．故に $2\sin x-3\cos x=\sqrt{13}\sin\left(x-\tan^{-1}\dfrac{3}{2}\right)$.

$\boxed{例}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について
$2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$.

　XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,-3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\mathrm{rad}$（u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$2\sin x - 3\cos x = \sqrt{2^2+(-3)^2}\sin(x+u)$$
$$= \sqrt{13}\sin(x+u) \ .$$



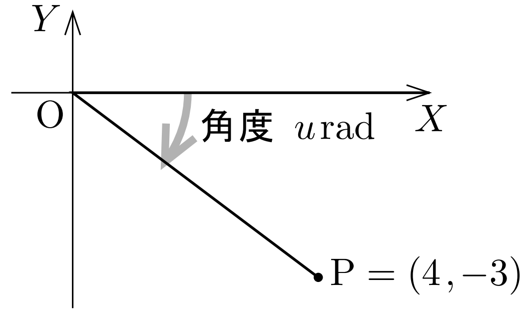
$\tan u = \dfrac{-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{2} \ .$$

$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = u$ ，よって $u = -\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ ．故に
$2\sin x - 3\cos x = \sqrt{13}\sin\left(x - \tan^{-1}\dfrac{3}{2}\right)$ ． $r=\sqrt{13}$ かつ $s = -\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ とすればよい． $\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}10.\text{補遺}4.3}$ 次のような実数 $r\,,s$ の組を一つ求めよ：任意の実数 x について $4\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$ ．

　XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(4\,,-3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について



$$4\sin x - 3\cos x = \sqrt{\quad^2+(\quad\quad)^2}\,\sin(x\quad\quad\quad)$$
$$= \quad\sin(x\quad\quad\quad)\ .$$

$\tan u = \quad\quad\quad = \quad\quad\quad$ なので，

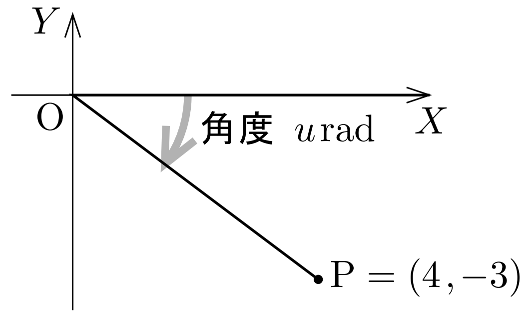
$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\Bigl(\quad\quad\Bigr) = \quad\quad\quad\quad\quad .$$

$-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u)=u$ ，よって $u=\quad\quad\quad\quad$ ．故に $4\sin x - 3\cos x = \quad\sin\Bigl(x\quad\quad\quad\quad\quad\Bigr)$ ． $r=\quad$ かつ $s=\quad\quad\quad\quad$ とすればよい．

問10.補遺4.3 次のような実数 $r\,,s$ の組を一つ求めよ：任意の実数 x について
$4\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$.

XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(4\,,-3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$4\sin x - 3\cos x = \sqrt{4^2+(-3)^2}\sin(x+u)$$
$$= 5\sin(x+u) \ .$$



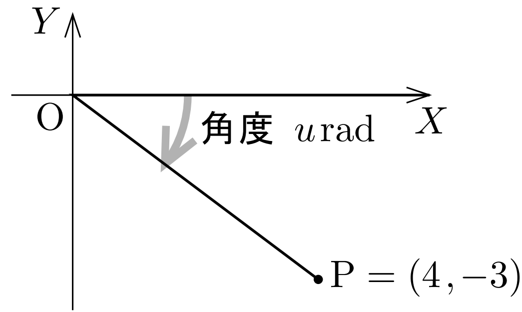
$\tan u = \qquad = \qquad$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(\qquad \right) = \qquad .$$

$-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u)=u$ ，よって $u = \qquad$. 故に
$4\sin x - 3\cos x = \quad \sin\left(x \qquad \right)$. $r = \quad$ かつ $s = \qquad$ とすればよい．

$\boxed{\text{問10.補遺4.3}}$ 次のような実数 $r\,,s$ の組を一つ求めよ：任意の実数 x について $4\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$ ．

XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(4\,,-3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について



$$4\sin x - 3\cos x = \sqrt{4^2+(-3)^2}\,\sin(x+u) = 5\sin(x+u)\ .$$

$\tan u = \dfrac{-3}{4} = -\dfrac{3}{4}$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{4}\ .$$

$-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u)=u$ ，よって $u=-\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ ．故に $4\sin x - 3\cos x = 5\sin\left(x-\tan^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ ． $r=5$ かつ $s=-\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ とすればよい．

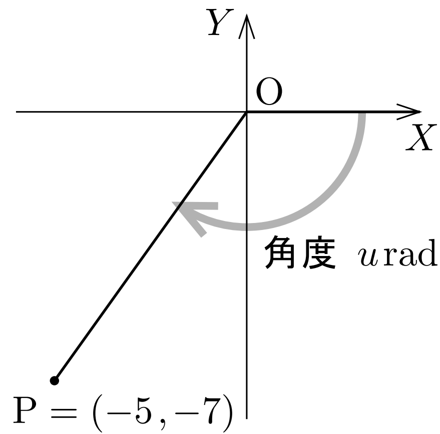
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について

$$-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について
$-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$.

　XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (-5, -7)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$ （u は実数）とおく． $-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．

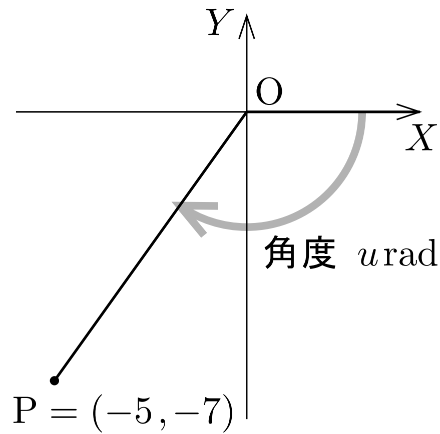


$\boxed{例}$ 次のような実数 $r\,,s$ の組を一つ求める：任意の実数 x について

$$-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)\ .$$

XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (-5\,,-7)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（u は実数）とおく．$-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$\begin{aligned} -5\sin x - 7\cos x &= \sqrt{(-5)^2+(-7)^2}\,\sin(x+u) \\ &= \sqrt{74}\,\sin(x+u)\ . \end{aligned}$$

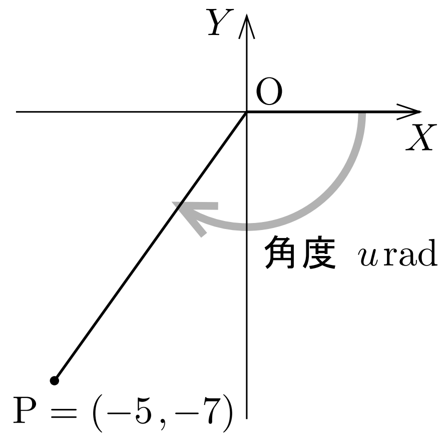


$\boxed{例}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について

$-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$ ．

XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (-5, -7)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（u は実数）とおく． $-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$-5\sin x - 7\cos x = \sqrt{(-5)^2+(-7)^2}\sin(x+u)$$
$$= \sqrt{74}\sin(x+u)\ .$$

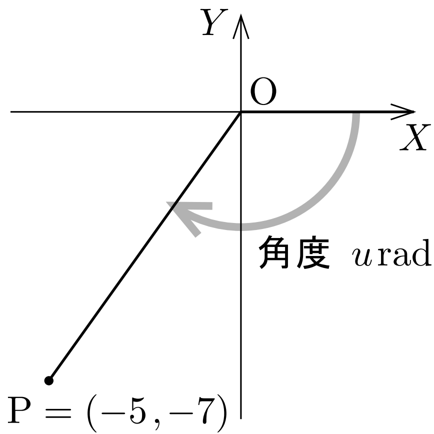


$\tan u = \dfrac{-7}{-5} = \dfrac{7}{5}$ なので， $\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\dfrac{7}{5}$ ．

例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$.

XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-5,-7)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（u は実数）とおく． $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$-5\sin x - 7\cos x = \sqrt{(-5)^2+(-7)^2}\,\sin(x+u)$$
$$= \sqrt{74}\,\sin(x+u)\ .$$



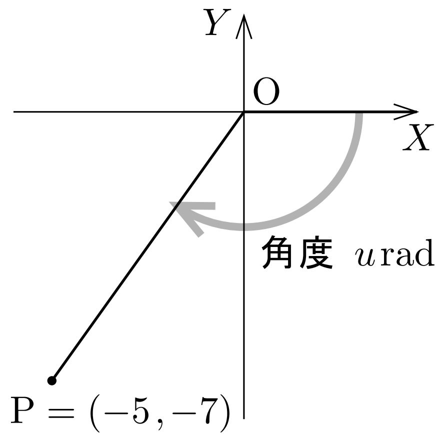
$\tan u = \dfrac{-7}{-5} = \dfrac{7}{5}$ なので， $\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\dfrac{7}{5}$.

$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ ならば $\tan^{-1}(\tan u) = u$ だが，$u < -\frac{\pi}{2}$ なので， $\tan^{-1}(\tan u)$ を u に変形できない． $\tan u = \tan(u+\pi)$ なので， $\tan^{-1}\{\tan(u+\pi)\}$ を考える．

$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 $r\,,s$ の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$ ．

XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (-5\,,-7)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（u は実数）とおく．$-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$-5\sin x - 7\cos x = \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2}\,\sin(x+u)$$
$$= \sqrt{74}\,\sin(x+u)\ .$$



$\tan u = \dfrac{-7}{-5} = \dfrac{7}{5}$ なので，$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\dfrac{7}{5}$ ．

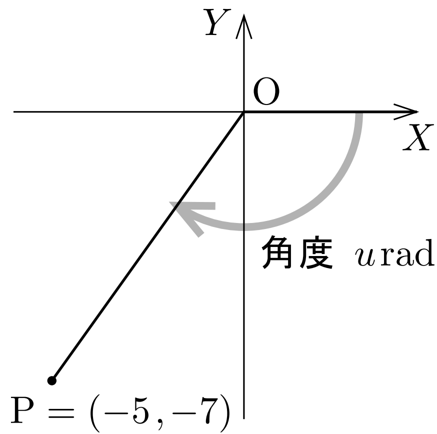
$-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ より $0 < u+\pi < \dfrac{\pi}{2}$ なので

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\{\tan(u+\pi)\} = u+\pi\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$ ．

XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (-5, -7)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（u は実数）とおく．$-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$-5\sin x - 7\cos x = \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2}\sin(x+u)$$
$$= \sqrt{74}\sin(x+u) \ .$$



$\tan u = \dfrac{-7}{-5} = \dfrac{7}{5}$ なので，$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\dfrac{7}{5}$ ．

$-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ より $0 < u + \pi < \dfrac{\pi}{2}$ なので

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\{\tan(u+\pi)\} = u + \pi \ .$$

よって $u + \pi = \tan^{-1}\dfrac{7}{5}$ なので，$u = \tan^{-1}\dfrac{7}{5} - \pi$ ．

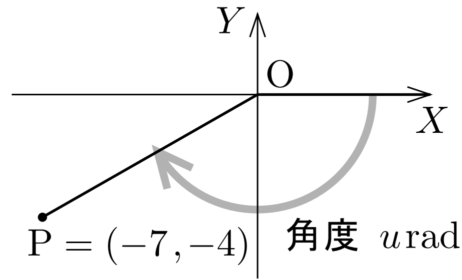
故に $-5\sin x-7\cos x=\sqrt{74}\sin\left(x+\tan^{-1}\dfrac{7}{5}-\pi\right)$ ． $r=\sqrt{74}$ かつ

$s=\tan^{-1}\dfrac{7}{5}-\pi$ とすればよい. 終

$\boxed{\text{問}10.\text{補遺}4.4}$ 次のような実数 $r\,,s$ の組を一つ求めよ：任意の実数 x について $-7\sin x - 4\cos x = r\sin(x+s)$ ．

XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-7,-4)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（ u は実数）とおく． $-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$-7\sin x - 4\cos x = \sqrt{(\qquad)^2+(\qquad)^2}\,\sin(x \qquad)$$
$$= \sqrt{\qquad}\,\sin(x \qquad)\ .$$



$\tan u = \qquad$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = \qquad\qquad$.

$-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ より $0 < u \qquad < \dfrac{\pi}{2}$ なので，

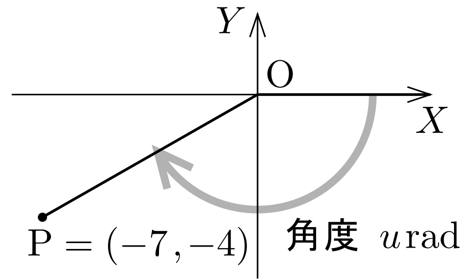
$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\{\tan(u \qquad)\} = u \qquad ,$$

よって $u \qquad = \qquad\qquad$ なので， $u = \qquad\qquad$ ．故に

$\boxed{問10.補遺4.4}$ 次のような実数 $r\,,s$ の組を一つ求めよ：任意の実数 x について $-7\sin x-4\cos x=r\sin(x+s)$ ．

　XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-7,-4)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（u は実数）とおく． $-\pi<u<-\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$-7\sin x-4\cos x=\sqrt{(-7)^2+(-4)^2}\sin(x+u)$$
$$=\sqrt{65}\sin(x+u)\ .$$



$\tan u=\dfrac{4}{7}$ なので $\tan^{-1}(\tan u)=\tan^{-1}\dfrac{4}{7}$ ．

$-\pi<u<-\dfrac{\pi}{2}$ より $0<u+\pi<\dfrac{\pi}{2}$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan u)=\tan^{-1}\{\tan(u+\pi)\}=u+\pi\ ,$$

よって $u+\pi=\tan^{-1}\dfrac{4}{7}$ なので， $u=\tan^{-1}\dfrac{4}{7}-\pi$ ．故に

$$-7\sin x - 4\cos x = \sqrt{65}\sin\left(x + \tan^{-1}\frac{4}{7} - \pi\right) .$$

$r = \sqrt{65}$ かつ $s = \tan^{-1}\dfrac{4}{7} - \pi$ とすればよい. 終