

11.3 還元公式

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) =$.

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. 角度 θ の表現法は度数法でも弧度法でもよい.

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad})$ なので,

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad})$ なので,

$$\sin(-x) = \sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad}) = -\sin x .$$

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad})$ なので,

$$\sin(-x) = \sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad}) = -\sin x .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) =$.

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad})$ なので,

$$\sin(-x) = \sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad}) = -\sin x .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \cos\theta$. 角度 θ の表現法は度数法でも弧度法でもよい.

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad})$ なので,

$$\sin(-x) = \sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad}) = -\sin x .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \cos\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\cos(-x\text{rad}) = \cos(x\text{rad})$ なので,

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad})$ なので,

$$\sin(-x) = \sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad}) = -\sin x .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \cos\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\cos(-x\text{rad}) = \cos(x\text{rad})$ なので,

$$\cos(-x) = \cos(-x\text{rad}) = \cos(x\text{rad}) = \cos x .$$

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad})$ なので,

$$\sin(-x) = \sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad}) = -\sin x .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \cos\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\cos(-x\text{rad}) = \cos(x\text{rad})$ なので,

$$\cos(-x) = \cos(-x\text{rad}) = \cos(x\text{rad}) = \cos x .$$

$\frac{\pi}{2}\text{rad} = 90^\circ$ の奇数倍でない任意の一般角 θ について $\tan(-\theta) =$.

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad})$ なので,

$$\sin(-x) = \sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad}) = -\sin x .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \cos\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\cos(-x\text{rad}) = \cos(x\text{rad})$ なので,

$$\cos(-x) = \cos(-x\text{rad}) = \cos(x\text{rad}) = \cos x .$$

$\frac{\pi}{2}\text{rad} = 90^\circ$ の奇数倍でない任意の一般角 θ について $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.
角度 θ の表現法は度数法でも弧度法でもよい.

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad})$ なので,

$$\sin(-x) = \sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad}) = -\sin x .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \cos\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\cos(-x\text{rad}) = \cos(x\text{rad})$ なので,

$$\cos(-x) = \cos(-x\text{rad}) = \cos(x\text{rad}) = \cos x .$$

$\frac{\pi}{2}\text{rad} = 90^\circ$ の奇数倍でない任意の一般角 θ について $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.

$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\tan(-x\text{rad}) = -\tan(x\text{rad})$ なので,

任意の一般角 θ について $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad})$ なので,

$$\sin(-x) = \sin(-x\text{rad}) = -\sin(x\text{rad}) = -\sin x .$$

任意の一般角 θ について $\cos(-\theta) = \cos\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\cos(-x\text{rad}) = \cos(x\text{rad})$ なので,

$$\cos(-x) = \cos(-x\text{rad}) = \cos(x\text{rad}) = \cos x .$$

$\frac{\pi}{2}\text{rad} = 90^\circ$ の奇数倍でない任意の一般角 θ について $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.
 $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\tan(-x\text{rad}) = -\tan(x\text{rad})$ なので,

$$\tan(-x) = \tan(-x\text{rad}) = -\tan(x\text{rad}) = -\tan x .$$

[定理 11.3.1] 任意の実数 x について,

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x,$$

$$x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき } \tan(-x) = -\tan x.$$

正弦関数 $\sin x$ と正接関数 $\tan x$ とは 関数であり, 余弦関数 $\cos x$ は 関数である.

[定理 11.3.1] 任意の実数 x について,

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x,$$

$$x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき } \tan(-x) = -\tan x.$$

正弦関数 $\sin x$ と正接関数 $\tan x$ とは奇関数であり, 余弦関数 $\cos x$ は偶関数である.

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \sin(\theta + 90^\circ) =$.

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$. 角度 θ の表現法は度数法でも弧度法でもよい.

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin\left(x\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(x\text{rad})$ なので,

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin\left(x\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(x\text{rad})$ なので,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(x\text{rad}) = \cos x .$$

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin\left(x\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(x\text{rad})$ なので,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(x\text{rad}) = \cos x .$$

任意の一般角 θ について $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(\theta + 90^\circ) =$.

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin\left(x\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(x\text{rad})$ なので,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(x\text{rad}) = \cos x .$$

任意の一般角 θ について $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$. 角度 θ の表現法は度数法でも弧度法でもよい.

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin\left(x\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(x\text{rad})$ なので,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(x\text{rad}) = \cos x .$$

任意の一般角 θ について $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\cos\left(x\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = -\sin(x\text{rad})$ なので,

任意の一般角 θ について $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\sin\left(x\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(x\text{rad})$ なので,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(x\text{rad}) = \cos x .$$

任意の一般角 θ について $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について $\cos\left(x\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = -\sin(x\text{rad})$ なので,

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x\text{rad} + \frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = -\sin(x\text{rad}) = -\sin x .$$

任意の実数 x に対して $y = x - \frac{\pi}{2}$ とおく.

任意の実数 x に対して $y = x - \frac{\pi}{2}$ とおく. $\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos y$ つまり

$$\cos y = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{なので,}$$

任意の実数 x に対して $y = x - \frac{\pi}{2}$ とおく. $\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos y$ つまり

$\cos y = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$ なので,

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos y = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin x .$$

任意の実数 x に対して $y = x - \frac{\pi}{2}$ とおく. $\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos y$ つまり

$\cos y = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$ なので,

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos y = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin x .$$

$\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin y$ よって $\sin y = -\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$ なので,

任意の実数 x に対して $y = x - \frac{\pi}{2}$ とおく. $\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos y$ つまり

$\cos y = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$ なので,

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos y = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin x .$$

$\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin y$ よって $\sin y = -\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$ なので,

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin y = -\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = -\cos x .$$

任意の実数 x に対して $y = x - \frac{\pi}{2}$ とおく. $\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos y$ つまり

$$\cos y = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{なので,}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos y = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin x .$$

$$\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin y \quad \text{よって} \quad \sin y = -\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{なので,}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin y = -\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = -\cos x .$$

[定理 11.3.2] 任意の実数 x について,

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x \quad (\text{複号同順}),$$

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x \quad (\text{複号同順}).$$

任意の実数 x に対して $y = x + \frac{\pi}{2}$ とおく.

任意の実数 x に対して $y = x + \frac{\pi}{2}$ とおく.

$$\begin{aligned}\sin(x + \pi) &= \sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos y \qquad \qquad \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x\end{aligned}$$

任意の実数 x に対して $y = x + \frac{\pi}{2}$ とおく.

$$\begin{aligned}\sin(x + \pi) &= \sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x \quad . \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x\end{aligned}$$

任意の実数 x に対して $y = x + \frac{\pi}{2}$ とおく.

$$\begin{aligned}\sin(x + \pi) &= \sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x + \pi) &= \cos\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin y \qquad \qquad \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x\end{aligned}$$

任意の実数 x に対して $y = x + \frac{\pi}{2}$ とおく.

$$\begin{aligned}\sin(x + \pi) &= \sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x + \pi) &= \cos\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos x . \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x\end{aligned}$$

任意の実数 x に対して $z = x - \frac{\pi}{2}$ とおく.

$$\begin{aligned}\sin(x - \pi) &= \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos z \qquad \qquad \qquad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x\end{aligned}$$

任意の実数 x に対して $z = x - \frac{\pi}{2}$ とおく.

$$\begin{aligned}\sin(x - \pi) &= \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos z = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x \quad . \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x\end{aligned}$$

任意の実数 x に対して $z = x - \frac{\pi}{2}$ とおく.

$$\begin{aligned}\sin(x - \pi) &= \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos z = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x - \pi) &= \cos\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right\} = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin z \qquad \qquad \qquad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x\end{aligned}$$

任意の実数 x に対して $z = x - \frac{\pi}{2}$ とおく.

$$\begin{aligned}\sin(x - \pi) &= \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos z = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x - \pi) &= \cos\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right\} = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin z = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos x . \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x\end{aligned}$$

[定理 11.3.3] 任意の実数 x について,

$$\sin(x \pm \pi) = -\sin x \quad , \quad \cos(x \pm \pi) = -\cos x \quad .$$

任意の実数 x に対して $y = x + \pi$ とおく.

任意の実数 x に対して $y = x + \pi$ とおく.

$$\sin(x + 2\pi) = \sin\{(x + \pi) + \pi\} = \sin(y + \pi)$$

$$= -\sin y = -\sin(x + \pi) = -(-\sin x)$$

$$= \sin x \ .$$

任意の実数 x に対して $y = x + \pi$ とおく.

$$\begin{aligned}\sin(x + 2\pi) &= \sin\{(x + \pi) + \pi\} = \sin(y + \pi) \\ &= -\sin y = -\sin(x + \pi) = -(-\sin x) \\ &= \sin x .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x + 2\pi) &= \cos\{(x + \pi) + \pi\} = \cos(y + \pi) \\ &= -\cos y = -\cos(x + \pi) = -(-\cos x) \\ &= \cos x .\end{aligned}$$

任意の実数 x に対して $y = x + \pi$ とおく.

$$\begin{aligned}\sin(x + 2\pi) &= \sin\{(x + \pi) + \pi\} = \sin(y + \pi) \\ &= -\sin y = -\sin(x + \pi) = -(-\sin x) \\ &= \sin x .\end{aligned}$$

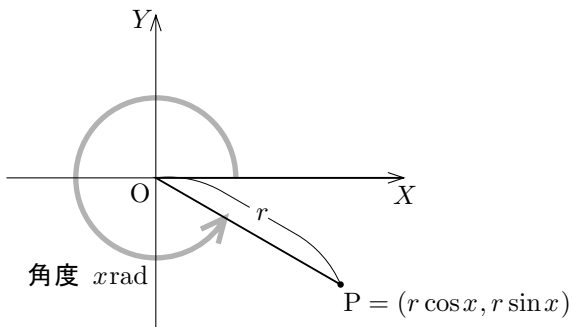
$$\begin{aligned}\cos(x + 2\pi) &= \cos\{(x + \pi) + \pi\} = \cos(y + \pi) \\ &= -\cos y = -\cos(x + \pi) = -(-\cos x) \\ &= \cos x .\end{aligned}$$

こうして次のことが分かる：任意の実数 x について,

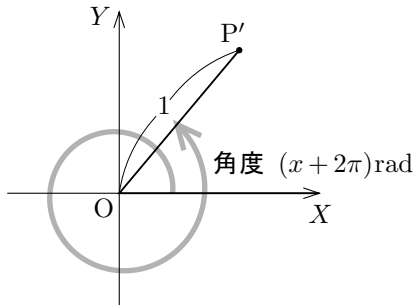
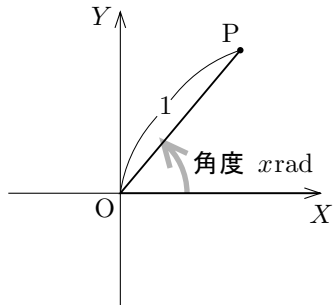
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x , \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x .$$

このことは図で考えても分かる．次のことを用いる：実数 x に対して， XY 座標平面において原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度が $x\text{rad}$ である動径に属する点 P について $\overline{OP} = r$ とおくと

$$P = (r \cos x, r \sin x) .$$



実数 x に対して、 XY 座標平面において原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\text{rad}$ の動径に属し $\overline{OP} = 1$ である点 P と、始線 OX に対する角度 $(x+2\pi)\text{rad}$ の動径に属し $\overline{OP'} = 1$ である点 P' とをとる.

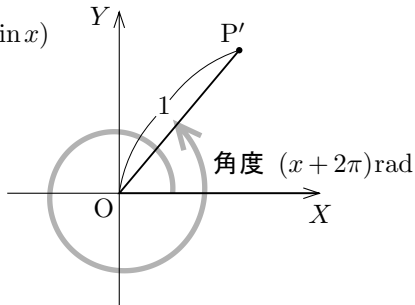
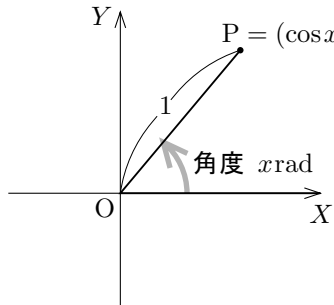


このとき、

$$P = (\quad , \quad),$$

$$P' = (\quad , \quad).$$

実数 x に対して、 XY 座標平面において原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\text{rad}$ の動径に属し $\overline{OP} = 1$ である点 P と、始線 OX に対する角度 $(x+2\pi)\text{rad}$ の動径に属し $\overline{OP'} = 1$ である点 P' とをとる.

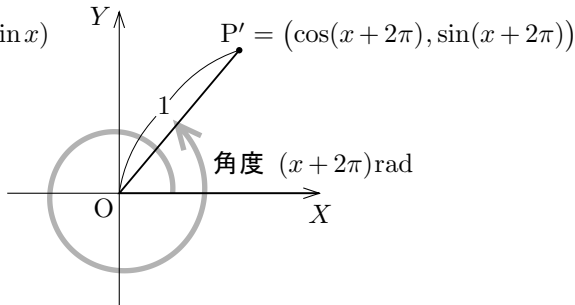
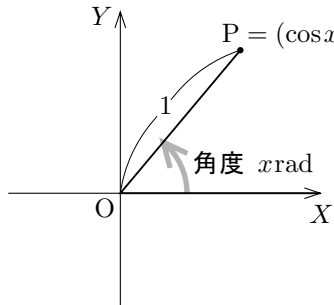


このとき、

$$P = (\cos x, \sin x) ,$$

$$P' = (\quad , \quad) .$$

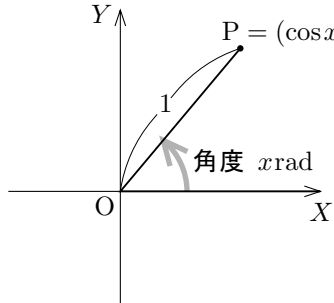
実数 x に対して、 XY 座標平面において原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\text{rad}$ の動径に属し $\overline{OP} = 1$ である点 P と、始線 OX に対する角度 $(x + 2\pi)\text{rad}$ の動径に属し $\overline{OP'} = 1$ である点 P' とをとる.



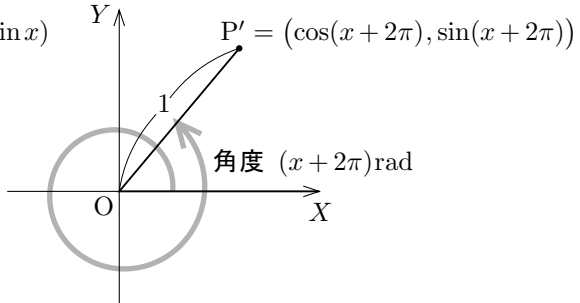
このとき、

$$P = (\cos x, \sin x) ,$$

$$P' = (\cos(x + 2\pi), \sin(x + 2\pi)) .$$

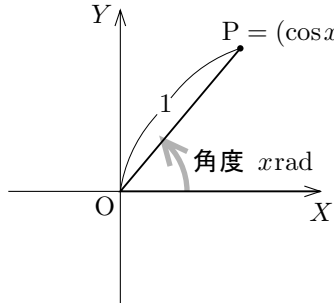


$$P = (\cos x, \sin x) ,$$

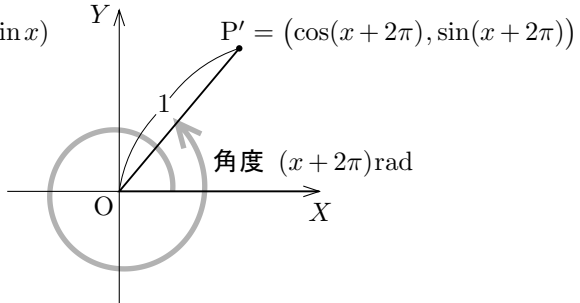


$$P' = (\cos(x + 2\pi), \sin(x + 2\pi)) .$$

線分 OP' は線分 OP を更に 1 回転させたものなので、点 P' は点 P と一致する： $P' = P$.



$$P = (\cos x, \sin x) ,$$



$$P' = (\cos(x + 2\pi), \sin(x + 2\pi)) .$$

線分 OP' は線分 OP を更に 1 回転させたものなので、点 P' は点 P と一致する： $P' = P$. 従って $(\cos(x + 2\pi), \sin(x + 2\pi)) = (\cos x, \sin x)$ なので、

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x , \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x .$$

x は任意の実数とする.

x は任意の実数とする． 任意の実数 X について $\sin X = \sin(X + 2\pi)$ なので，

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(x + 2\pi) = \sin\{(x + 2\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 4\pi) = \sin\{(x + 4\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 6\pi) = \sin\{(x + 6\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 8\pi) = \cdots .\end{aligned}$$

x は任意の実数とする. 任意の実数 X について $\sin X = \sin(X + 2\pi)$ なので,

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(x + 2\pi) = \sin\{(x + 2\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 4\pi) = \sin\{(x + 4\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 6\pi) = \sin\{(x + 6\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 8\pi) = \cdots .\end{aligned}$$

任意の実数 X について $\sin X = \sin\{(X - 2\pi) + 2\pi\} = \sin(X - 2\pi)$ なので,

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(x - 2\pi) = \sin\{(x - 2\pi) - 2\pi\} \\ &= \sin(x - 4\pi) = \sin\{(x - 4\pi) - 2\pi\} \\ &= \sin(x - 6\pi) = \sin\{(x - 6\pi) - 2\pi\} \\ &= \sin(x - 8\pi) = \cdots .\end{aligned}$$

余弦関数 $\cos x$ についても同様のことが成り立つ：

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \cos(x + 6\pi) = \cos(x + 8\pi) = \cdots ,$$

$$\cos x = \cos(x - 2\pi) = \cos(x - 4\pi) = \cos(x - 6\pi) = \cos(x - 8\pi) = \cdots .$$

余弦関数 $\cos x$ についても同様のことが成り立つ：

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \cos(x + 6\pi) = \cos(x + 8\pi) = \cdots ,$$

$$\cos x = \cos(x - 2\pi) = \cos(x - 4\pi) = \cos(x - 6\pi) = \cos(x - 8\pi) = \cdots .$$

つまり次のようになる：

$$\sin(x \pm (\pi \text{ の偶数倍})) = \sin x , \quad \cos(x \pm (\pi \text{ の偶数倍})) = \cos x .$$

余弦関数 $\cos x$ についても同様のことが成り立つ：

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \cos(x + 6\pi) = \cos(x + 8\pi) = \cdots ,$$

$$\cos x = \cos(x - 2\pi) = \cos(x - 4\pi) = \cos(x - 6\pi) = \cos(x - 8\pi) = \cdots .$$

つまり次のようになる：

$$\sin(x \pm (\pi \text{ の偶数倍})) = \sin x , \quad \cos(x \pm (\pi \text{ の偶数倍})) = \cos x .$$

[定理 11.3.4] 任意の整数 n 及び任意の実数 x について,

$$\sin(x \pm 2n\pi) = \sin x , \quad \cos(x \pm 2n\pi) = \cos x .$$

$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 X について, $\sin(X + \pi) = -\sin X$,
 $\cos(X + \pi) = -\cos X$ なので,

$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 X について, $\sin(X + \pi) = -\sin X$,
 $\cos(X + \pi) = -\cos X$ なので,

$$\tan(X + \pi) = \frac{\sin(X + \pi)}{\cos(X + \pi)} = \frac{-\sin X}{-\cos X} = \frac{\sin X}{\cos X} = \tan X ,$$

つまり $\tan X = \tan(X + \pi)$.

$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 X について, $\sin(X + \pi) = -\sin X$,
 $\cos(X + \pi) = -\cos X$ なので,

$$\tan(X + \pi) = \frac{\sin(X + \pi)}{\cos(X + \pi)} = \frac{-\sin X}{-\cos X} = \frac{\sin X}{\cos X} = \tan X ,$$

つまり $\tan X = \tan(X + \pi)$. これより, $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について,

$$\begin{aligned}\tan x &= \tan(x + \pi) = \tan\{(x + \pi) + \pi\} \\ &= \tan(x + 2\pi) = \tan\{(x + 2\pi) + \pi\} \\ &= \tan(x + 3\pi) = \tan\{(x + 3\pi) + \pi\} \\ &= \tan(x + 4\pi) = \cdots .\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 X について

$$\tan X = \tan\{(X - \pi) + \pi\} = \tan(X - \pi) .$$

$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 X について

$$\tan X = \tan\{(X - \pi) + \pi\} = \tan(X - \pi) .$$

これより, $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について,

$$\begin{aligned}\tan x &= \tan(x - \pi) = \tan\{(x - \pi) - \pi\} \\ &= \tan(x - 2\pi) = \tan\{(x - 2\pi) - \pi\} \\ &= \tan(x - 3\pi) = \tan\{(x - 3\pi) - \pi\} \\ &= \tan(x - 4\pi) = \cdots .\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 X について

$$\tan X = \tan\{(X - \pi) + \pi\} = \tan(X - \pi) .$$

これより, $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について,

$$\begin{aligned}\tan x &= \tan(x - \pi) = \tan\{(x - \pi) - \pi\} \\ &= \tan(x - 2\pi) = \tan\{(x - 2\pi) - \pi\} \\ &= \tan(x - 3\pi) = \tan\{(x - 3\pi) - \pi\} \\ &= \tan(x - 4\pi) = \cdots .\end{aligned}$$

[定理 11.3.5] 任意の整数 n 及び任意の実数 x について,

$$x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき } \tan(x \pm n\pi) = \tan x .$$

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - \quad \right)$$

整数 n に対して $\cos x = \cos(x + 2n\pi)$

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi \right)$$

整数 n に対して $\cos x = \cos(x + 2n\pi)$

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right)$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3}$$
$$\cos(-x) = \cos x$$

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi \right)$$

整数 n に対して $\cos x = \cos(x + 2n\pi)$

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi \right) = \cos \frac{5\pi}{3}$$

整数 n に対して $\cos x = \cos(x + 2n\pi)$

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi \right) = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \left(\quad + \pi \right)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi \right) = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \pi \right)$$
$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned} \cos \frac{29\pi}{3} &= \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi \right) = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \pi \right) \\ &= -\cos \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \qquad \cos(x + \pi) = -\cos x$$

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned} \cos \frac{29\pi}{3} &= \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi \right) = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \pi \right) \\ &= -\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \left(\quad + \frac{\pi}{2} \right) \\ &\qquad \qquad \qquad \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x \end{aligned}$$

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned} \cos \frac{29\pi}{3} &= \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi \right) = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \pi \right) \\ &= -\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) \\ &\qquad \qquad \qquad \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x \end{aligned}$$

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned} \cos \frac{29\pi}{3} &= \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi \right) = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \pi \right) \\ &= -\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = -\left(-\sin \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \\ &\qquad \qquad \qquad \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x \end{aligned}$$

例 次の式を計算する： $\cos \frac{29\pi}{3}$.

$$\cos \frac{29\pi}{3} = \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned} \cos \frac{29\pi}{3} &= \cos \left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi \right) = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \pi \right) \\ &= -\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = -\left(-\sin \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

終

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + \quad\quad\right)$$

整数 n に対して $\sin x = \sin(x + 2n\pi)$

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right)$$

整数 n に対して $\sin x = \sin(x + 2n\pi)$

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6}$$

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\quad + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$ ．

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ ．}$$

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = -\sin\frac{19\pi}{6}$$

$$\sin(-x) = -\sin$$

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = -\sin\frac{19\pi}{6}$$

整数 n に対して $\sin x = \sin(x + 2n\pi)$

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = -\sin\frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6} - 2\pi\right)$$

整数 n に対して $\sin x = \sin(x + 2n\pi)$

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = -\sin\frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6} - 2\pi\right) = -\sin\frac{7\pi}{6}$$

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) &= -\sin\frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6} - 2\pi\right) = -\sin\frac{7\pi}{6} \\ &= -\sin\left(\quad + \pi\right) \\ &\qquad \sin(x + \pi) = -\sin x\end{aligned}$$

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) &= -\sin\frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6} - 2\pi\right) = -\sin\frac{7\pi}{6} \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) \\ &\quad \sin(x + \pi) = -\sin x\end{aligned}$$

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) &= -\sin\frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6} - 2\pi\right) = -\sin\frac{7\pi}{6} \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = -\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \\ &\quad \sin(x + \pi) = -\sin x\end{aligned}$$

例 次の式を計算する： $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) &= -\sin\frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6} - 2\pi\right) = -\sin\frac{7\pi}{6} \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = -\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} .\end{aligned}$$

終

問11.3.1 次の式を計算せよ： $\cos \frac{35\pi}{6}$.

問11.3.1 次の式を計算せよ： $\cos \frac{35\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}\cos \frac{35\pi}{6} &= \cos \left(\frac{35\pi}{6} - 6\pi \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} .\end{aligned}$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\cos \frac{35\pi}{6} &= \cos \left(\frac{35\pi}{3} - 4\pi \right) = \cos \frac{11\pi}{6} = \cos \left(\frac{5\pi}{6} + \pi \right) \\ &= -\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} .\end{aligned}$$

終

問11.3.2 次の式を計算せよ： $\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right)$.

問11.3.2 次の式を計算せよ： $\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right)$.

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right) &= \cos\left(-\frac{22\pi}{3} + 8\pi\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{1}{2} .\end{aligned}$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right) &= \cos\frac{22\pi}{3} = \cos\left(\frac{22\pi}{3} - 6\pi\right) \\ &= \cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2} .\end{aligned}$$

終

例 次の式を計算する： $\tan \frac{20\pi}{3}$.

例 次の式を計算する： $\tan \frac{20\pi}{3}$.

$$\tan \frac{20\pi}{3} = \tan \left(\frac{20\pi}{3} - \quad \right)$$

整数 n に対して $\tan x = \tan(x + n\pi)$

例 次の式を計算する： $\tan \frac{20\pi}{3}$.

$$\tan \frac{20\pi}{3} = \tan \left(\frac{20\pi}{3} - 7\pi \right)$$

整数 n に対して $\tan x = \tan(x + n\pi)$

例 次の式を計算する： $\tan \frac{20\pi}{3}$.

$$\tan \frac{20\pi}{3} = \tan \left(\frac{20\pi}{3} - 7\pi \right) = \tan \left(-\frac{\pi}{3} \right)$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

例 次の式を計算する： $\tan \frac{20\pi}{3}$.

$$\tan \frac{20\pi}{3} = \tan \left(\frac{20\pi}{3} - 7\pi \right) = \tan \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\tan \frac{\pi}{3}$$
$$\tan(-x) = -\tan x$$

例 次の式を計算する： $\tan \frac{20\pi}{3}$.

$$\tan \frac{20\pi}{3} = \tan \left(\frac{20\pi}{3} - 7\pi \right) = \tan \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} .$$

終

問11.3.3 次の式を計算せよ： $\tan \frac{17\pi}{6}$.

問11.3.3 次の式を計算せよ： $\tan \frac{17\pi}{6}$ ．

$$\tan \frac{17\pi}{6} = \tan \left(\frac{17\pi}{6} - 3\pi \right) = \tan \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ．}$$

終

問11.3.4 次の式を計算せよ： $\tan\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

問11.3.4 次の式を計算せよ： $\tan\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$ ．

$$\tan\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{19\pi}{6} + 3\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ．} \quad \boxed{\text{終}}$$

例 変数 x を含む式 $\cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

例 変数 x を含む式 $\cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

$$\cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{15\pi}{2} - 8\pi\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x .$$

例 変数 x を含む式 $\cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

$$\cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{15\pi}{2} - 8\pi\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x .$$

次のようにも計算できる :

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right) &= \cos\left(x + \frac{15\pi}{2} - 6\pi\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -(-\sin x) \\ &= \sin x .\end{aligned}$$

終

例 変数 x を含む式 $\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

例 変数 x を含む式 $\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

$$\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{17\pi}{2} + 8\pi\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x .$$

例 変数 x を含む式 $\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

$$\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{17\pi}{2} + 8\pi\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x .$$

次のようにも計算できる :

$$\begin{aligned}\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right) &= \sin\left(x - \frac{17\pi}{2} + 10\pi\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos x .\end{aligned}$$

終

問11.3.5 変数 x を含む式 $\sin\left(x + \frac{23\pi}{2}\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形せよ.

問11.3.5 変数 x を含む式 $\sin\left(x + \frac{23\pi}{2}\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形せよ.

$$\sin\left(x + \frac{23\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{23\pi}{2} - 12\pi\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x .$$

次のようにも計算できる :

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{23\pi}{2}\right) &= \sin\left(x + \frac{23\pi}{2} - 10\pi\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos x .\end{aligned}$$

終

問11.3.6 変数 x を含む式 $\cos\left(x - \frac{21\pi}{2}\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形せよ.

問11.3.6 変数 x を含む式 $\cos\left(x - \frac{21\pi}{2}\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形せよ.

$$\cos\left(x - \frac{21\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{21\pi}{2} + 10\pi\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x .$$

次のようにも計算できる :

$$\begin{aligned}\cos\left(x - \frac{21\pi}{2}\right) &= \cos\left(x - \frac{21\pi}{2} + 12\pi\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -(-\sin x) \\ &= \sin x .\end{aligned}$$

終

例 変数 x を含む式 $\cos\left(\frac{15\pi}{2} - x\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

例 変数 x を含む式 $\cos\left(\frac{15\pi}{2} - x\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) &= \cos\left\{-\left(x - \frac{15\pi}{2}\right)\right\} = \cos\left(x - \frac{15\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x - \frac{15\pi}{2} + 8\pi\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x .\end{aligned}$$

例 変数 x を含む式 $\cos\left(\frac{15\pi}{2} - x\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) &= \cos\left\{-\left(x - \frac{15\pi}{2}\right)\right\} = \cos\left(x - \frac{15\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x - \frac{15\pi}{2} + 8\pi\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x .\end{aligned}$$

次のようにも計算できる :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) &= \cos\left(\frac{15\pi}{2} - x - 8\pi\right) = \cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left\{-\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x .\end{aligned}$$

終

問11.3.7 変数 x を含む式 $\sin\left(\frac{25\pi}{2} - x\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形せよ.

問11.3.7 変数 x を含む式 $\sin\left(\frac{25\pi}{2} - x\right)$ を, $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形せよ.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{25\pi}{2} - x\right) &= \sin\left(\frac{25\pi}{2} - x - 12\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-x) \\ &= \cos x .\end{aligned}$$

次のようにも計算できる :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{25\pi}{2} - x\right) &= -\sin\left(x - \frac{25\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \frac{25\pi}{2} + 12\pi\right) \\ &= -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -(-\cos x) \\ &= \cos x .\end{aligned}$$

終