

11.8 三角関数の相互関係

例えば, $(\sin x)^2$ を $\sin^2 x$ のように, $(\cos t)^3$ を $\cos^3 t$ のように略す:

$$\sin^2 x = (\sin x)^2, \quad \cos^3 t = (\cos t)^3.$$

$\sin^2 x = (\sin x)^2$ と $\sin x^2 = \sin(x^2)$ とは通常は等しくない.

任意の一般角 θ について

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 .$$

角度 θ は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

任意の一般角 θ について

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 .$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\text{rad}$ について

$$\{\sin(a\text{rad})\}^2 + \{\cos(a\text{rad})\}^2 = 1 ;$$

任意の一般角 θ について

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 .$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\text{rad}$ について

$$\{\sin(a\text{rad})\}^2 + \{\cos(a\text{rad})\}^2 = 1 ;$$

$\sin(a\text{rad}) = \sin a$, $\cos(a\text{rad}) = \cos a$ **なので**

$$(\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1$$

つまり

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 .$$

任意の実数 a について

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 .$$

任意の実数 a について

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 .$$

a は $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとする. $\cos a \neq 0$ なので両辺を $\cos^2 a$ で割る :

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} ,$$

任意の実数 a について

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 .$$

a は $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとする. $\cos a \neq 0$ なので両辺を $\cos^2 a$ で割る :

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} ,$$
$$\left(\frac{\sin a}{\cos a} \right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} ,$$

任意の実数 a について

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 .$$

a は $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとする. $\cos a \neq 0$ なので両辺を $\cos^2 a$ で割る :

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} ,$$

$$\left(\frac{\sin a}{\cos a} \right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} ,$$

$$\tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} ,$$

任意の実数 a について

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 .$$

a は $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとする. $\cos a \neq 0$ なので両辺を $\cos^2 a$ で割る :

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} ,$$

$$\left(\frac{\sin a}{\cos a} \right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} ,$$

$$\tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} ,$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} \quad \text{なので} \quad \frac{1}{\cos^2 a} = \sec^2 a .$$

任意の実数 a について

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 .$$

a は $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとする. $\cos a \neq 0$ なので両辺を $\cos^2 a$ で割る :

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} ,$$

$$\left(\frac{\sin a}{\cos a} \right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} ,$$

$$\tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} ,$$

$\sec a = \frac{1}{\cos a}$ なので $\frac{1}{\cos^2 a} = \sec^2 a$. よって

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} = \sec^2 a .$$

このように以下の定理が導かれる.

[定理 11.8.1] $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 a について,

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} .$$

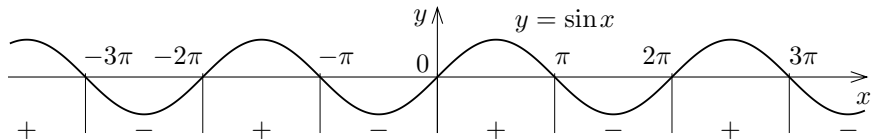
[定理 11.8.2] 任意の実数 a について,

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 .$$

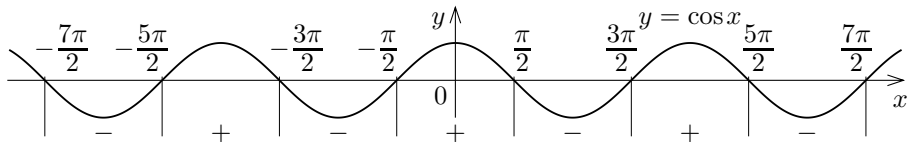
[定理 11.8.3] $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 a について,

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} = \sec^2 a .$$

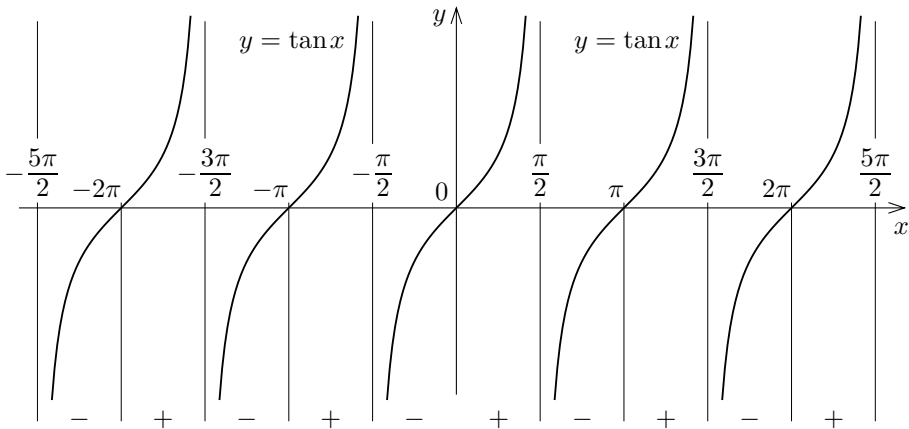
正弦関数 $\sin x$ について、グラフより値の符号は次のようになる。



余弦関数 $\cos x$ について、グラフより値の符号は次のようになる。



正接関数 $\tan x$ について、グラフより値の符号は次のようになる。



例 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\cos x = \frac{3}{5}$ とする. $\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求める.

例 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\cos x = \frac{3}{5}$ とする. $\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求める. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので, $\cos x = \frac{3}{5}$ より

$$\sin^2 x =$$

例 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\cos x = \frac{3}{5}$ とする. $\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求める. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので, $\cos x = \frac{3}{5}$ より

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} .$$

例 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\cos x = \frac{3}{5}$ とする. $\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求める. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので, $\cos x = \frac{3}{5}$ より

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} .$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので,

$$\sin x =$$

例 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\cos x = \frac{3}{5}$ とする. $\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求める. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので, $\cos x = \frac{3}{5}$ より

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} .$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので,

$$\sin x = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5} .$$

更に

$$\tan x = \text{――} = \text{――} = \text{――} .$$

例 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\cos x = \frac{3}{5}$ とする. $\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求める. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので, $\cos x = \frac{3}{5}$ より

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} .$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので,

$$\sin x = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5} .$$

更に

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} .$$

終

問11.8.1 実数 x について $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ かつ $\sin x = -\frac{2}{3}$ とする. $\cos x$ の値と $\tan x$ の値とを求めよ.

$$\cos^2 x =$$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos x \geq 0$ なので, $\cos x =$. 更に

$$\tan x = \text{——} = \text{——} =$$

問11.8.1 実数 x について $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ かつ $\sin x = -\frac{2}{3}$ とする. $\cos x$ の値と $\tan x$ の値とを求めよ.

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} .$$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos x \geq 0$ なので, $\cos x = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. 更に

$$\tan x = \text{——} = \text{——} =$$

問11.8.1 実数 x について $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ かつ $\sin x = -\frac{2}{3}$ とする. $\cos x$ の値と $\tan x$ の値とを求めよ.

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} .$$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos x \geq 0$ なので, $\cos x = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. 更に

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} .$$

終

例 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = -2$ とする. $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求める.

例 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = -2$ とする. $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求める. $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ なの

で, $\tan x = -2$ より

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + (-2)^2 = 5 ,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5} .$$

例 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = -2$ とする. $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求める. $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ なの

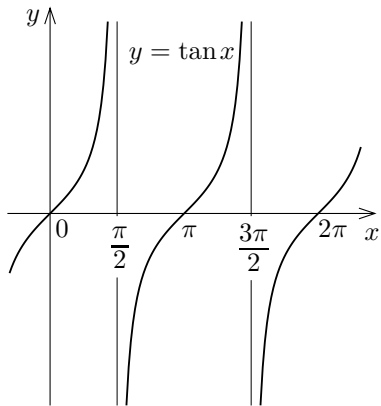
で, $\tan x = -2$ より

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + (-2)^2 = 5 ,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5} .$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x < 0$ なので

$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, よって $\cos x < 0$ なので,



例 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = -2$ とする. $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求める. $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ なの

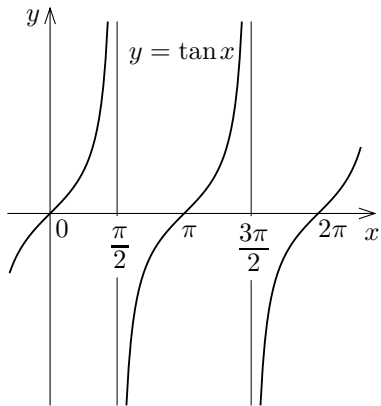
で, $\tan x = -2$ より

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + (-2)^2 = 5 ,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5} .$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x < 0$ なので

$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, よって $\cos x > 0$ なので,



例 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = -2$ とする. $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求める. $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ なの

で, $\tan x = -2$ より

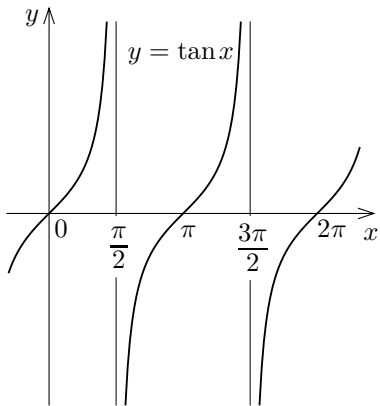
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + (-2)^2 = 5,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5}.$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x < 0$ なので

$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, よって $\cos x > 0$ なので,

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$



例 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = -2$ とする. $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求める. $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ なの

で, $\tan x = -2$ より

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + (-2)^2 = 5,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5}.$$

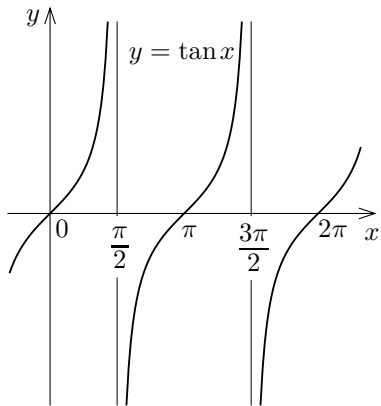
$\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x < 0$ なので

$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, よって $\cos x > 0$ なので,

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

更に $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ なので,

$$\sin x = \tan x \cos x = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$



終

問11.8.2 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = \frac{5}{3}$ とする. $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求めよ.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x =$$

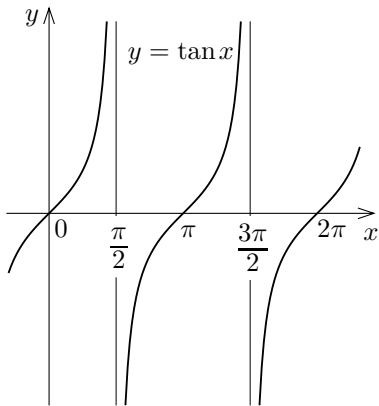
$$\cos^2 x =$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x > 0$ なので
 $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, よって $\cos x < 0$ なので,

$$\cos x =$$

更に, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ なので

$$\sin x = \tan x \cos x =$$



問11.8.2 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = \frac{5}{3}$ とする. $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求めよ.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{34}{9},$$

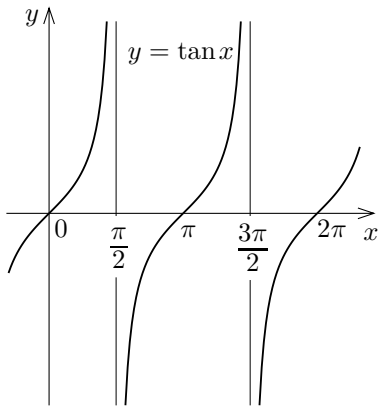
$$\cos^2 x = \frac{9}{34}.$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x > 0$ なので
 $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, よって $\cos x < 0$ なので,

$$\cos x =$$

更に, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ なので

$$\sin x = \tan x \cos x =$$



問11.8.2 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = \frac{5}{3}$ とする. $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求めよ.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{34}{9},$$

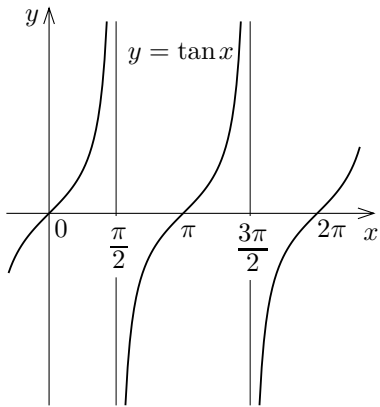
$$\cos^2 x = \frac{9}{34}.$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x > 0$ なので
 $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, よって $\cos x < 0$ なので,

$$\cos x = -\sqrt{\frac{9}{34}} = -\frac{3}{\sqrt{34}}.$$

更に, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ なので

$$\sin x = \tan x \cos x =$$



問11.8.2 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = \frac{5}{3}$ とする. $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求めよ.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{34}{9},$$

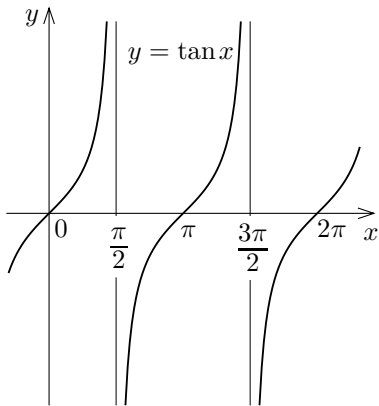
$$\cos^2 x = \frac{9}{34}.$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x > 0$ なので
 $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, よって $\cos x < 0$ なので,

$$\cos x = -\sqrt{\frac{9}{34}} = -\frac{3}{\sqrt{34}}.$$

更に, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ なので

$$\sin x = \tan x \cos x = \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{34}}\right) = -\frac{5}{\sqrt{34}}.$$



終