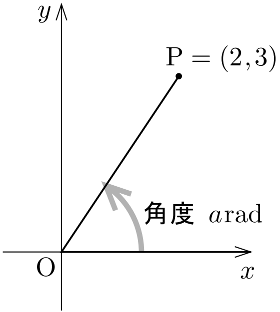
11. 拡充 3　逆正接関数の利用

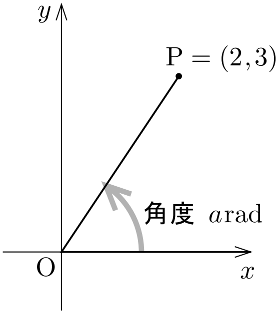
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a$rad（a は実数）とおく．$-\pi < a \leq \pi$ とする．このような実数 a を一つ求める．



$\boxed{例}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a$rad（ a は実数）とおく． $-\pi < a \leq \pi$ とする．このような実数 a を一つ求める．

$$\tan a = \qquad ,$$

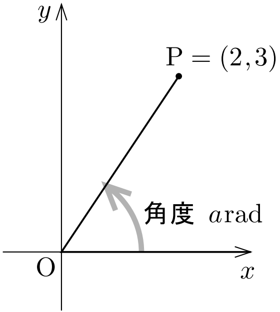
$$\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1} \qquad .$$



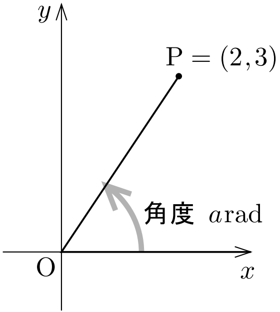
$\boxed{例}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\,\mathrm{rad}$（ a は実数）とおく． $-\pi<a\leq\pi$ とする．このような実数 a を一つ求める．

$$\tan a=\frac{3}{2}\ ,$$

$$\tan^{-1}(\tan a)=\tan^{-1}\frac{3}{2}\ .$$



$\boxed{例}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a$rad（a は実数）とおく．$-\pi < a \leq \pi$ とする．このような実数 a を一つ求める．

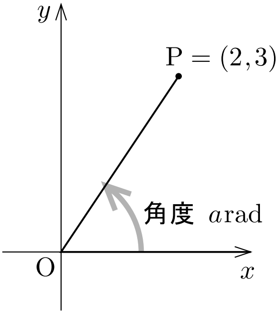


$$\tan a = \frac{3}{2} \ ,$$

$$\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1}\frac{3}{2} \ .$$

点 P の x 座標が正なので，$-\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\tan^{-1}(\tan a) = a$ ．

例 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a$rad（ a は実数）とおく． $-\pi<a\leq\pi$ とする．このような実数 a を一つ求める．



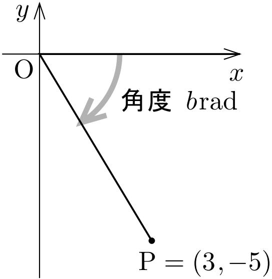
$$\tan a=\frac{3}{2}\ ,$$

$$\tan^{-1}(\tan a)=\tan^{-1}\frac{3}{2}\ .$$

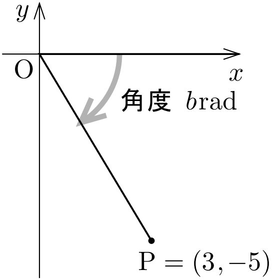
点 P の x 座標が正なので， $-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}$ ，よって $\tan^{-1}(\tan a)=a$ ．故に $a=\tan^{-1}\frac{3}{2}$ ．

終

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(3,-5)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b\mathrm{rad}$（b は実数）とおく．$-\pi < b \leq \pi$ とする．このような実数 b を一つ求める．



例 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(3,-5)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b$rad（b は実数）とおく． $-\pi < b \leq \pi$ とする．このような実数 b を一つ求める．



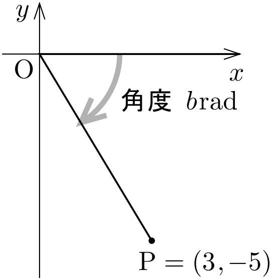
$$\tan b = \qquad = \qquad ,$$

$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\Big(\qquad \Big) = -\tan^{-1} \qquad .$$

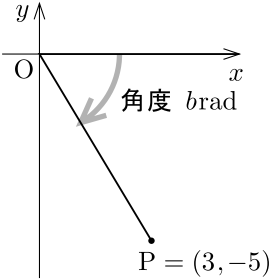
$\boxed{例}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P} = (3, -5)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b$rad（ b は実数）とおく． $-\pi < b \leq \pi$ とする．このような実数 b を一つ求める．

$$\tan b = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3} \ ,$$

$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{5}{3} \ .$$



$\boxed{例}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(3,-5)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b$rad（ b は実数）とおく． $-\pi<b\leq\pi$ とする．このような実数 b を一つ求める．

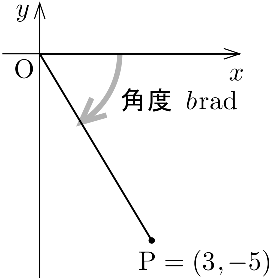


$$\tan b=\frac{-5}{3}=-\frac{5}{3}\ ,$$

$$\tan^{-1}(\tan b)=\tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right)=-\tan^{-1}\frac{5}{3}\ .$$

点 P の x 座標が正なので， $-\frac{\pi}{2}<b<\frac{\pi}{2}$ ，よって $\tan^{-1}(\tan b)=b$ ．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(3,-5)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b$rad（ b は実数）とおく． $-\pi<b\leq\pi$ とする．このような実数 b を一つ求める．

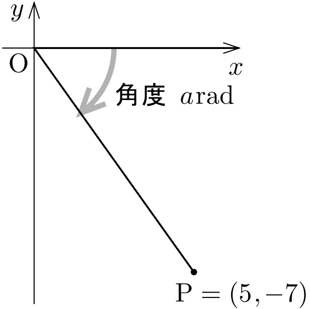


$$\tan b=\frac{-5}{3}=-\frac{5}{3}\ ,$$

$$\tan^{-1}(\tan b)=\tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right)=-\tan^{-1}\frac{5}{3}\ .$$

点 P の x 座標が正なので， $-\frac{\pi}{2}<b<\frac{\pi}{2}$ ，よって $\tan^{-1}(\tan b)=b$ ．故に $b=-\tan^{-1}\frac{5}{3}$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問11.補遺3.1}}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(5,-7)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a$rad（ a は実数）とおく． $-\pi < a \leq \pi$ とする．このような実数 a をーつ求めよ．



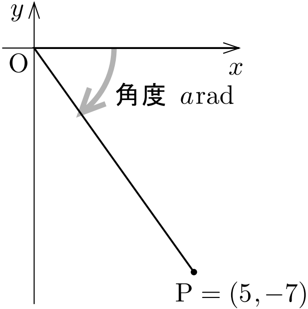
$$\tan a = \qquad = \qquad ,$$

$$\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1}\Big(\qquad \Big) = \qquad .$$

点 P の x 座標が正なので， $-\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\tan^{-1}(\tan a) = \quad$ ．故に

$a = \qquad .$

$\boxed{\text{問11.補遺3.1}}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(5,-7)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a$rad（a は実数）とおく． $-\pi < a \leq \pi$ とする．このような実数 a を一つ求めよ．

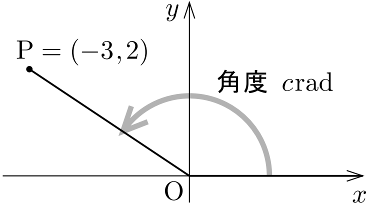


$$\tan a = \frac{-7}{5} = -\frac{7}{5} ,$$

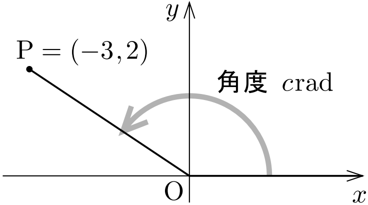
$$\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1}\left(-\frac{7}{5}\right) = -\tan^{-1}\frac{7}{5} .$$

点 P の x 座標が正なので， $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ ，よって $\tan^{-1}(\tan a) = a$ ．故に $a = -\tan^{-1}\frac{7}{5}$ ． $\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-3,2)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c\,\mathrm{rad}$（ c は実数）とおく． $-\pi < c \leq \pi$ とする．このような実数 c を一つ求める．



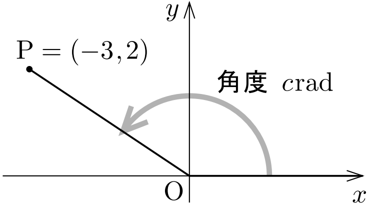
$\boxed{例}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P} = (-3, 2)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c\mathrm{rad}$（ c は実数）とおく． $-\pi < c \leq \pi$ とする．このような実数 c を一つ求める．



$$\tan c = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} \ ,$$

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{2}{3} \ .$$

例 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-3,2)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c\,\mathrm{rad}$（c は実数）とおく． $-\pi < c \leq \pi$ とする．このような実数 c を一つ求める．

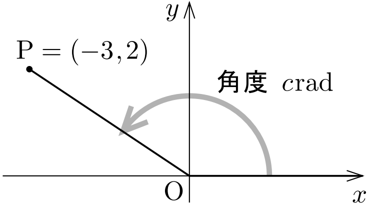


$$\tan c = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}\ ,$$

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{2}{3}\ ,$$

$-\dfrac{\pi}{2} < c < \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\tan^{-1}(\tan c) = c$ だが， $c > \dfrac{\pi}{2}$ なので， $\tan^{-1}(\tan c)$ を c に変形できない． $\tan c = \tan(c-\pi)$ なので， $\tan^{-1}\{\tan(c-\pi)\}$ を考える．

例 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-3,2)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c$rad（ c は実数）とおく． $-\pi < c \leq \pi$ とする．このような実数 c を一つ求める．



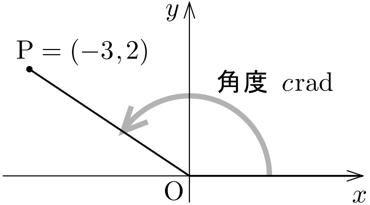
$$\tan c = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} \ ,$$

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{2}{3} \ .$$

$\dfrac{\pi}{2} < c \leq \pi$ なので $-\dfrac{\pi}{2} < c-\pi \leq 0$ ，よって

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\{\tan(c-\pi)\} = c-\pi \ .$$

例 xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-3,2)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c\,\mathrm{rad}$（ c は実数）とおく． $-\pi < c \leq \pi$ とする．このような実数 c を一つ求める．



$$\tan c = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}\ ,$$

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\!\left(-\frac{2}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{2}{3}\ .$$

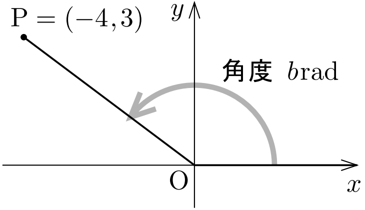
$\dfrac{\pi}{2} < c \leq \pi$ なので $-\dfrac{\pi}{2} < c-\pi \leq 0$ ，よって

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\{\tan(c-\pi)\} = c-\pi\ .$$

従って $c-\pi = -\tan^{-1}\dfrac{2}{3}$ なので， $c = \pi - \tan^{-1}\dfrac{2}{3}$ ．

終

$\boxed{\text{問11.補遺3.2}}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-4,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b\mathrm{rad}$（b は実数）とおく． $-\pi<b\leq\pi$ とする．このような実数 b を一つ求めよ．



$$\tan b = \qquad ,$$

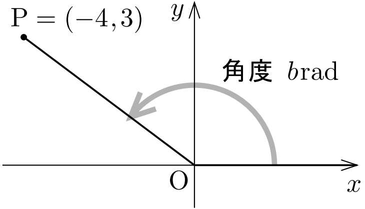
$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\Big(\qquad\Big) = \qquad\qquad .$$

$\dfrac{\pi}{2}<b<\pi$ なので $-\dfrac{\pi}{2}<\qquad<0$，よって

$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\{\tan(\qquad)\} = \qquad .$$

従って $\qquad = \qquad\qquad$ なので，$b = \qquad\qquad$.

$\boxed{\text{問}11.\text{補遺}3.2}$ xy 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-4,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b\,\mathrm{rad}$（b は実数）とおく． $-\pi<b\leq\pi$ とする．このような実数 b を一つ求めよ．



$$\tan b=-\frac{3}{4}\ ,$$

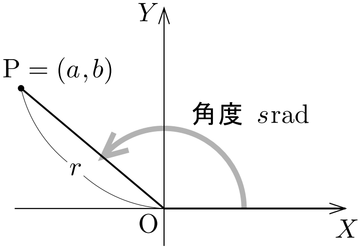
$$\tan^{-1}(\tan b)=\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)=-\tan^{-1}\frac{3}{4}\ .$$

$\dfrac{\pi}{2}<b<\pi$ なので $-\dfrac{\pi}{2}<b-\pi<0$ ，よって

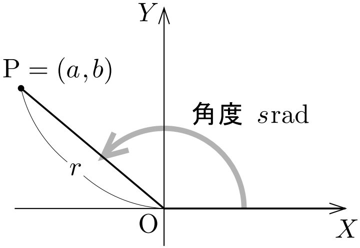
$$\tan^{-1}(\tan b)=\tan^{-1}\{\tan(b-\pi)\}=b-\pi\ .$$

従って $b-\pi=-\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ なので， $b=\pi-\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ ． $\boxed{\text{終}}$

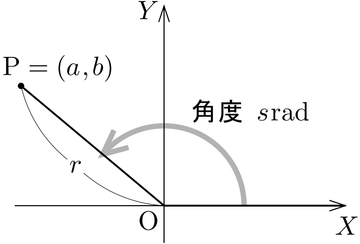
定数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(a,b)$ に対して，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\mathrm{rad}$（s は実数）とおき，$r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおく．



定数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(a,b)$ に対して，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\mathrm{rad}$（ s は実数）とおき， $r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおく． $\mathrm{P}=(r\cos s, r\sin s)$ なので， $a=r\cos s$ かつ $b=r\sin s$ ．



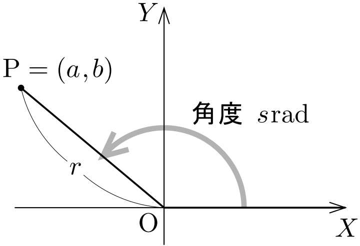
定数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(a,b)$ に対して，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\mathrm{rad}$（ s は実数）とおき， $r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおく． $\mathrm{P}=(r\cos s, r\sin s)$ なので， $a=r\cos s$ かつ $b=r\sin s$ ．よって，各実数 x に対して，



$$a\sin x+b\cos x=r\cos s\sin x+r\sin s\cos x=r(\sin x\cos s+\cos x\sin s)$$

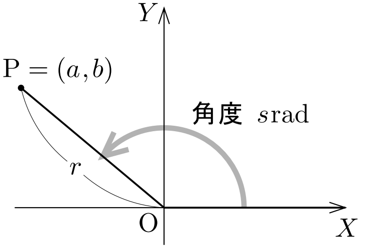
$$=\qquad\qquad\qquad .$$

定数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (a,b)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\mathrm{rad}$（ s は実数）とおき， $r = \overline{\mathrm{OP}}$ とおく． $\mathrm{P} = (r\cos s, r\sin s)$ なので， $a = r\cos s$ かつ $b = r\sin s$ ．よって，各実数 x に対して，



$$a\sin x + b\cos x = r\cos s\sin x + r\sin s\cos x = r(\sin x\cos s + \cos x\sin s)$$
$$= r\sin(x+s)\ .$$

定数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(a,b)$ に対して，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\mathrm{rad}$（ s は実数）とおき，$r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおく．$\mathrm{P}=(r\cos s, r\sin s)$ なので，$a=r\cos s$ かつ $b=r\sin s$ ．よって，各実数 x に対して，



$$a\sin x + b\cos x = r\cos s\sin x + r\sin s\cos x = r(\sin x\cos s + \cos x\sin s)$$

$$= r\sin(x+s) \ .$$

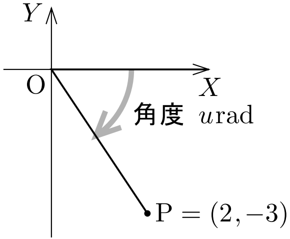
$r=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+b^2}$ なので，

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+s) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について

$2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$.

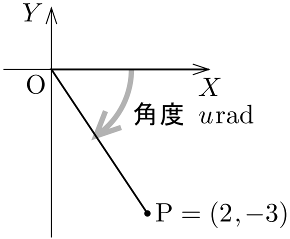
$\boxed{例}$ 次のような実数 r,s の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x-3\cos x=r\sin(x+s)$ ． XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,-3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\mathrm{rad}$（ u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．



$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$ ． XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (2, -3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（ u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ としてよい．

任意の実数 x について

$$\begin{aligned} 2\sin x - 3\cos x &= \sqrt{2^2 + (-3)^2}\sin(x+u) \\ &= \sqrt{13}\sin(x+u) \ . \end{aligned}$$

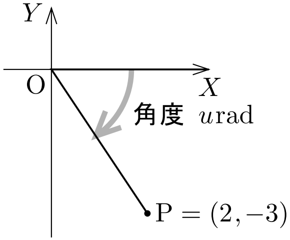


$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$ ． XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,-3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\mathrm{rad}$（ u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ としてよい．
任意の実数 x について

$$\begin{aligned}2\sin x - 3\cos x &= \sqrt{2^2+(-3)^2}\,\sin(x+u)\\ &= \sqrt{13}\,\sin(x+u)\ .\end{aligned}$$

$\tan u = \dfrac{-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$ なので，

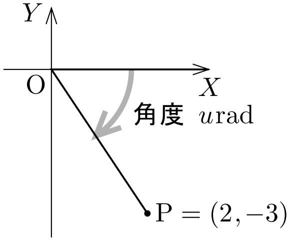
$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\!\left(-\frac{3}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{2}\ .$$



$\boxed{例}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$ ． XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(2,-3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（ u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．

任意の実数 x について

$$\begin{aligned}2\sin x - 3\cos x &= \sqrt{2^2+(-3)^2}\sin(x+u)\\ &= \sqrt{13}\sin(x+u)\ .\end{aligned}$$



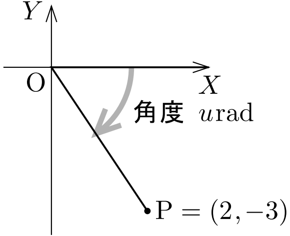
$\tan u = \dfrac{-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{2}\ .$$

$-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u)=u$ ，よって $u=-\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$ ． XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (2, -3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（ u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ としてよい．

任意の実数 x について



$$\begin{aligned} 2\sin x - 3\cos x &= \sqrt{2^2 + (-3)^2}\,\sin(x+u) \\ &= \sqrt{13}\,\sin(x+u) \ . \end{aligned}$$

$\tan u = \dfrac{-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{2} \ .$$

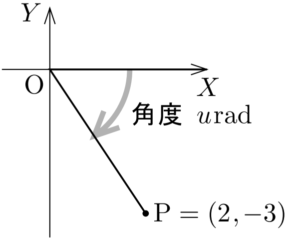
$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = u$ ，よって $u = -\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ ．故に

$$2\sin x - 3\cos x = \sqrt{13}\,\sin\left(x - \tan^{-1}\frac{3}{2}\right) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$．$XY$ 座標平面における点 $\mathrm{P} = (2, -3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\mathrm{rad}$（u は実数）とおく．$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ としてよい．

任意の実数 x について

$$2\sin x - 3\cos x = \sqrt{2^2 + (-3)^2}\sin(x+u)$$
$$= \sqrt{13}\sin(x+u)\ .$$



$\tan u = \dfrac{-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$ なので，

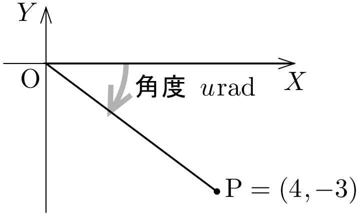
$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{2}\ .$$

$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = u$，よって $u = -\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$．故に $2\sin x - 3\cos x = \sqrt{13}\sin\left(x - \tan^{-1}\dfrac{3}{2}\right)$．$r = \sqrt{13}$ かつ $s = -\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問11.補遺3.3}$ 次のような実数 r,s の組を一つ求めよ：任意の実数 x について $4\sin x-3\cos x=r\sin(x+s)$ ．

XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(4,-3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u$rad（u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$4\sin x-3\cos x=\sqrt{\quad^2+(\quad)^2}\sin(x\quad\quad)$$
$$=\quad\sin(x\quad\quad).$$



$\tan u=\quad\quad=\quad\quad$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan u)=\tan^{-1}\Big(\quad\Big)=\quad\quad.$$

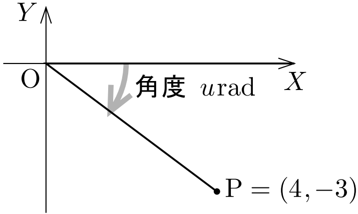
$-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u)=u$ ，よって $u=\quad\quad$ ．故に

$4\sin x-3\cos x=\quad\sin\Big(x\quad\quad\Big)$． $r=\quad$ かつ $s=\quad\quad$ ．

$\boxed{\text{問}11.\text{補遺}3.3}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求めよ：任意の実数 x について $4\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$ ．

XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (4, -3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u$rad（u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$4\sin x - 3\cos x = \sqrt{4^2 + (-3)^2}\sin(x+u)$$
$$= 5\sin(x+u)\ .$$



$\tan u = \qquad = \qquad$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\Big(\qquad\Big) = \qquad\qquad .$$

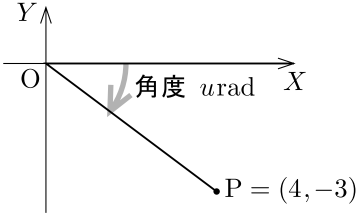
$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = u$ ，よって $u = \qquad\qquad$ ．故に

$4\sin x - 3\cos x = \quad \sin\Big(x \qquad\qquad\Big)$ ． $r = \quad$ かつ $s = \qquad\qquad$ ．

$\boxed{\text{問}11.\text{補遺}3.3}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求めよ：任意の実数 x について $4\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$ ．

XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (4, -3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u$rad（u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$4\sin x - 3\cos x = \sqrt{4^2 + (-3)^2}\,\sin(x+u)$$
$$= 5\sin(x+u) \ .$$



$\tan u = \dfrac{-3}{4} = -\dfrac{3}{4}$ なので，

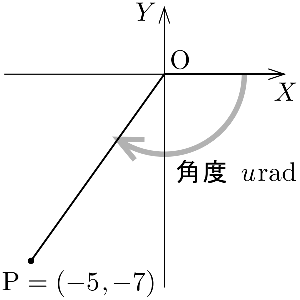
$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\!\left(-\frac{3}{4}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{4} \ .$$

$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = u$ ，よって $u = -\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ ．故に $4\sin x - 3\cos x = 5\sin\!\left(x - \tan^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ ． $r = 5$ かつ $s = -\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について

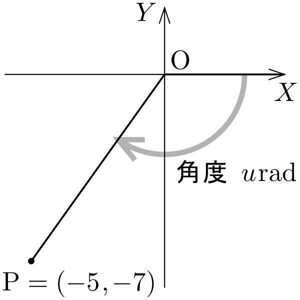
$$-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$$.

$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$ ． XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (-5, -7)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u$rad（ u は実数）とおく． $-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．



$\boxed{\text{例}}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$ ． XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (-5, -7)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u$rad（u は実数）とおく． $-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

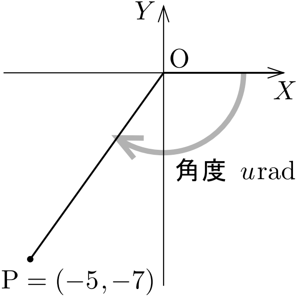
$$\begin{aligned} -5\sin x - 7\cos x &= \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2}\sin(x+u) \\ &= \sqrt{74}\sin(x+u)\ . \end{aligned}$$



$\boxed{例}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$ ． XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-5,-7)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\,\mathrm{rad}$（ u は実数）とおく． $-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

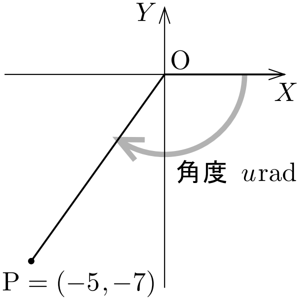
$$\begin{aligned} -5\sin x - 7\cos x &= \sqrt{(-5)^2+(-7)^2}\,\sin(x+u) \\ &= \sqrt{74}\,\sin(x+u)\ . \end{aligned}$$

$\tan u = \dfrac{-7}{-5} = \dfrac{7}{5}$ なので， $\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\dfrac{7}{5}$ ．



例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$ ． XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (-5, -7)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u$rad（u は実数）とおく． $-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$-5\sin x - 7\cos x = \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2}\sin(x+u)$$
$$= \sqrt{74}\sin(x+u) \ .$$

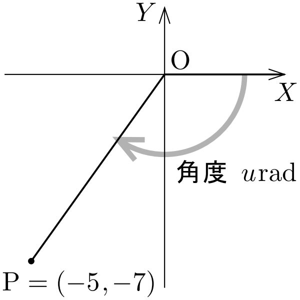


$\tan u = \dfrac{-7}{-5} = \dfrac{7}{5}$ なので， $\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\dfrac{7}{5}$ ．

$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\tan^{-1}(\tan u) = u$ だが，

$u < -\dfrac{\pi}{2}$ なので， $\tan^{-1}(\tan u)$ を u に変形できない． $\tan u = \tan(u+\pi)$ なので， $\tan^{-1}\{\tan(u+\pi)\}$ を考える．

例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x-7\cos x=r\sin(x+s)$ ．XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-5,-7)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\mathrm{rad}$（u は実数）とおく．$-\pi<u<-\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について



$$\begin{aligned}-5\sin x-7\cos x&=\sqrt{(-5)^2+(-7)^2}\sin(x+u)\\&=\sqrt{74}\sin(x+u)\ .\end{aligned}$$

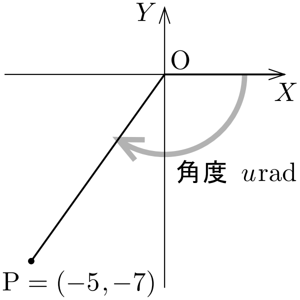
$\tan u=\dfrac{-7}{-5}=\dfrac{7}{5}$ なので，$\tan^{-1}(\tan u)=\tan^{-1}\dfrac{7}{5}$ ．

$-\pi<u<-\dfrac{\pi}{2}$ より $0<u+\pi<\dfrac{\pi}{2}$ なので

$$\tan^{-1}(\tan u)=\tan^{-1}\{\tan(u+\pi)\}=u+\pi\ .$$

$\boxed{例}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$ ． XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (-5, -7)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\mathrm{rad}$（u は実数）とおく． $-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$-5\sin x - 7\cos x = \sqrt{(-5)^2+(-7)^2}\sin(x+u)$$
$$= \sqrt{74}\sin(x+u)\ .$$



$\tan u = \dfrac{-7}{-5} = \dfrac{7}{5}$ なので， $\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\dfrac{7}{5}$ ．

$-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ より $0 < u + \pi < \dfrac{\pi}{2}$ なので

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\{\tan(u+\pi)\} = u + \pi\ .$$

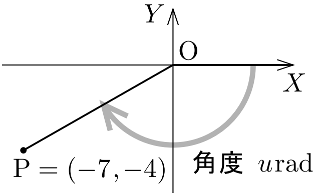
よって $u + \pi = \tan^{-1}\dfrac{7}{5}$ なので， $u = \tan^{-1}\dfrac{7}{5} - \pi$ ．

故に　$-5\sin x - 7\cos x = \sqrt{74}\sin\left(x + \tan^{-1}\dfrac{7}{5} - \pi\right)$ ．　$r = \sqrt{74}$　かつ $s = \tan^{-1}\dfrac{7}{5} - \pi$ ．

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}11.\text{補遺}3.4}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求めよ：任意の実数 x について $-7\sin x - 4\cos x = r\sin(x+s)$.

XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (-7, -4)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u$rad（u は実数）とおく． $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について



$$-7\sin x - 4\cos x = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}\,\sin(x \qquad)$$
$$= \sqrt{\quad}\,\sin(x \qquad) \ .$$

$\tan u = \qquad$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = \qquad\qquad$.

$-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ より $0 < u \qquad < \frac{\pi}{2}$ なので，

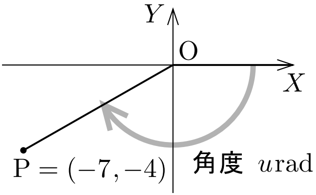
$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\{\tan(u \qquad)\} = u \qquad ,$$

よって $u \qquad = \qquad\qquad$ なので， $u = \qquad\qquad$ ．故に

$\boxed{\text{問11.補遺3.4}}$ 次のような実数 r, s の組を一つ求めよ：任意の実数 x について $-7\sin x - 4\cos x = r\sin(x+s)$ ．

　XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (-7, -4)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u$rad（u は実数）とおく． $-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．任意の実数 x について

$$\begin{aligned} -7\sin x - 4\cos x &= \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2}\sin(x+u) \\ &= \sqrt{65}\sin(x+u) \ . \end{aligned}$$



$\tan u = \dfrac{4}{7}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\dfrac{4}{7}$ ．

$-\pi < u < -\dfrac{\pi}{2}$ より $0 < u + \pi < \dfrac{\pi}{2}$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\{\tan(u+\pi)\} = u + \pi \ ,$$

よって $u + \pi = \tan^{-1}\dfrac{4}{7}$ なので， $u = \tan^{-1}\dfrac{4}{7} - \pi$ ．故に

$$-7\sin x - 4\cos x \;=\; \sqrt{65}\,\sin\!\left(x + \tan^{-1}\frac{4}{7} - \pi\right) \quad .$$

$r = \sqrt{65}$ **かつ** $s = \tan^{-1}\dfrac{4}{7} - \pi$. 終