

## §0.0 区間

直感的にいうと、**区間** (interval) とは隙間がない実数の集合のことです。正確にいうと、実数の集合  $I$  が区間であるとは  $I$  が次の条件を満たすことです：任意の実数  $x, y, z$  について、 $x$  と  $y$  とが  $I$  に属しかつ  $x < z < y$  ならば、 $z$  も  $I$  に属す。

実数  $a$  と  $b$  とに対して、

$a \leq x \leq b$  となる実数  $x$  の全体  $\{x \mid a \leq x \leq b\}$  を  $[a, b]$  と、

$a < x < b$  となる実数  $x$  の全体  $\{x \mid a < x < b\}$  を  $(a, b)$  と

表記します：

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}, \quad (a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

区間  $[a, b]$  には  $a$  も  $b$  も属しますが、区間  $(a, b)$  には  $a$  も  $b$  も属しません。



区間を表す記法  $(a, b)$  は座標平面の点の座標を表す記法  $(x, y)$  と同じですが、意味は全く異なります。紛らわしいので注意して下さい。

次のような区間もあります：実数  $a, b$  について、

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}.$$

区間  $I$  について、 $I$  に属す実数を  $I$  の点ということがあります。

解析学では、議論の便宜のために、2つの仮想的な数  $+\infty$  と  $-\infty$  とを用います。 $+\infty$  は**正の無限大**とよばれ、 $-\infty$  は**負の無限大**とよばれます。正の無限大  $+\infty$  はよく  $\infty$  と略記されます。 $\infty$  と  $-\infty$  とは実数ではありません。 $\infty$  及び  $-\infty$  に関する四則演算は全く定義されません。大小関係について、正の無限大  $\infty$  はどんな実数よりも大きく、負の無限大  $-\infty$  はどんな実数よりも小さいと約束します；つまり、

$$\text{任意の実数 } x \text{ について } -\infty < x < \infty.$$

実数  $a$  に対して、

$a$  以下の実数の全体  $\{x \mid x \leq a\}$ 、 $a$  より大きい実数の全体  $\{x \mid x > a\}$

等も区間です。このような区間を、 $\infty, -\infty$ <sup>1)</sup> を用いて以下のように表記します：実数  $a$  に対して、

$$(-\infty, a] = \{x \mid -\infty < x \leq a\} = \{x \mid x \leq a\},$$

$$[a, \infty) = \{x \mid a \leq x < \infty\} = \{x \mid x \geq a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid -\infty < x < a\} = \{x \mid x < a\},$$

$$(a, \infty) = \{x \mid a < x < \infty\} = \{x \mid x > a\}.$$

例えば、区間  $[0, \infty)$  は 0 以上の実数全体であり、区間  $(0, \infty)$  は正の実数全体です。

更に、実数全体も1つの区間です。実数全体を  $\mathbf{R}$  と書き表します。

---

<sup>1)</sup> 区間とは実数の集合です。 $\infty$  と  $-\infty$  とは実数ではないので、区間に属すことはありません。