§0.7　対数関数

定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とします．実数全体を定義域とする指数関数 a^x の値域は区間 $(0, \infty)$ です． $y > 0$ となる任意の実数 y に対して， $a^x = y$ となる実数が唯一つあります． 従って，定理0.3.3より，指数関数 a^x の逆関数があります． a を底とする指数関数 a^x の逆関数を，a を底とする**対数関数**といい，（その値を） $\log_a x$ と書き表します． 対数関数は区間 $(0, \infty)$ を定義域にすることができます． 以後，対数関数を扱うとき，特に断りがない限り，定義域は区間 $(0, \infty)$ であるとします．

実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とします． a を底とする対数関数の実数 r に対する値 $\log_a r$ を，a を底とする r の**対数** (logarithm) といいます． また，対数を表す式 $\log_a X$ において，$\log_a$ の中身 X を**真数**といいます． 対数関数はの定義域は区間 $(0, \infty)$ （の一部）ですから，

対数の真数は正の数でなければならない

ことに注意して下さい．

定数 a は実数で $a > 0$, $a \neq 1$ とします． a を底とする対数関数 $\log_a x$ は a を底とする指数関数を a^x の逆関数ですから，定理0.3.1より次の定理が成り立ちます．

定理0.7.1　実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする．

任意の実数 p について　$\log_a(a^p) = p$,

$r > 0$ である任意の実数 r について　$a^{\log_a r} = r$.

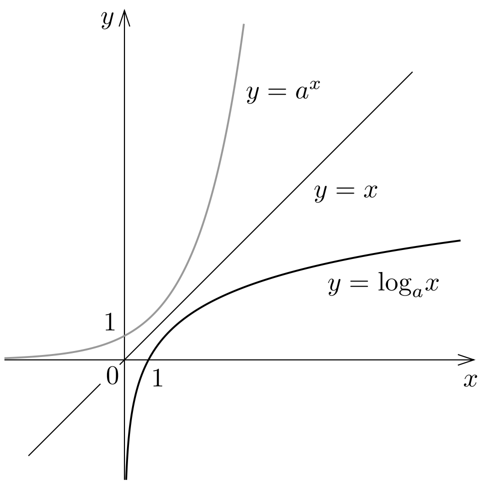
a は実数で $a > 0$, $a \neq 1$ とします． $1 = a^0$ なので，定理0.7.1より，

$$\log_a 1 = \log_a(a^0) = 0 .$$

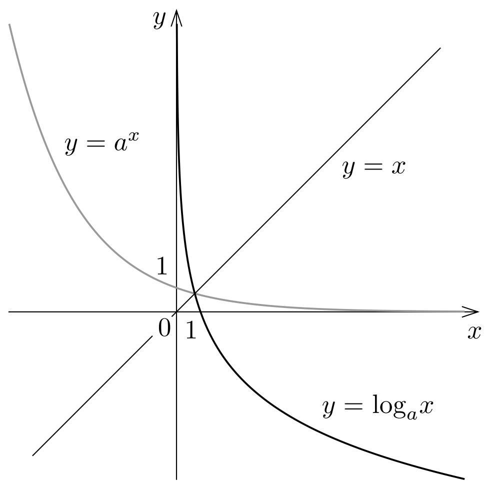
$a = a^1$ なので，

$$\log_a a = \log_a(a^1) = 1 .$$

定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とします． a を底とする対数関数 $\log_a x$ は a を底とする指数関数 a^x の逆関数ですから，定理0.3.2より，xy 座標平面において，$y = \log_a x$ のグラフは $y = a^x$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称です． 対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは限りなく y 軸に近づいていきますが，y 軸に接することはありません． つまり，y 軸は $y = \log_a x$ のグラフの漸近線です．



$a > 1$ のときの $y = \log_a x$ のグラフ



$0 < a < 1$ のときの $y = \log_a x$ のグラフ

グラフから分かるように次の定理が成り立ちます．

定理0.7.2　定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする．対数関数 $\log_a x$ は， $a > 1$ のとき単調増加であり， $0 < a < 1$ のとき単調減少である．

更に，対数関数について以下の定理が成り立ちます．

定理0.7.3　a は正の実数で $a \neq 1$ とする． $r, s > 0$ である任意の実数 r, s 及び任意の実数 p について，

$$\log_a rs = \log_a r + \log_a s , \qquad \log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s , \qquad \log_a r^p = p \log_a r .$$

定理0.7.4（対数の底の変換公式）　実数 a, b, c について， $a, b, c > 0$, $a, c \neq 1$ のとき，

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} .$$

定理0.7.5　実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする． $r > 0$, $s > 0$ である任意の実数 r と s とについて，

$$r = s \iff \log_a r = \log_a s .$$

定理0.7.6　実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする．

(1)　$a > 1$ のとき，任意の実数 r と s とについて，

$$0 < r < s \iff \log_a r < \log_a s ,$$

$$0 < r \leq s \iff \log_a r \leq \log_a s ;$$

(2)　$0 < a < 1$ のとき，任意の実数 r と s とについて，

$$0 < r < s \iff \log_a r > \log_a s ,$$

$$0 < r \leq s \iff \log_a r \geq \log_a s .$$

底が 10 の対数を常用対数といいます． 工学では，正の実数 r の常用対数 $\log_{10} r$ を $\log r$ と略記することがあります．