

§ 1.2 数列の項の総和

数列 f の定義域に属す自然数 m, n について $m \leq n$ とします. f について, m に対する項 $f(m)$ から n に対する項 $f(n)$ までの総和

$$f(m) + f(m+1) + f(m+2) + f(m+3) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

を $\sum_{k=m}^n f(k)$ と書き表します:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + f(m+3) + \cdots + f(n-1) + f(n).$$

例を挙げます.

$$\sum_{k=3}^9 \frac{k}{2} = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} + \frac{7}{2} + \frac{8}{2} + \frac{9}{2} = \frac{42}{2} = 21.$$

$$\sum_{k=2}^6 k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 90.$$

式 $\sum_{k=m}^n f(k)$ に現われる文字 k を他の文字に置き換えても値は同じです. 例えば,

$$\sum_{i=2}^5 \frac{6}{i} = \sum_{j=2}^5 \frac{6}{j} = \sum_{k=2}^5 \frac{6}{k} = \frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{4} + \frac{6}{5} = 3 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{6}{5} = \frac{77}{10}.$$

問題 1.2.1 以下の総和を計算しなさい.

$$(1) \sum_{i=0}^4 \frac{i^3}{10}. \quad (2) \sum_{j=2}^5 \frac{12}{j+1}.$$

総和記号 Σ の性質を幾つか導きます.

4 と 7 とが数列 f の定義域に属すとき, 定数 c に対して, 総和記号 Σ の定義より

$$\sum_{k=4}^7 \{cf(k)\} = cf(4) + cf(5) + cf(6) + cf(7) = c\{f(4) + f(5) + f(6) + f(7)\};$$

Σ の定義より $\sum_{k=4}^7 f(k) = f(4) + f(5) + f(6) + f(7)$ なので,

$$\sum_{k=4}^7 \{cf(k)\} = c \sum_{k=4}^7 f(k).$$

一般的に次の定理が成り立ちます.

定理 1.2.1 $m \leq n$ である自然数 m, n が数列 f の定義域に属すとき, 定数 c に対して,

$$\sum_{k=m}^n \{cf(k)\} = c \sum_{k=m}^n f(k).$$

5 と 7 とが数列 f と g との両方の定義域に属すとき, 総和記号 Σ の定義より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=5}^7 \{f(k) + g(k)\} &= f(5) + g(5) + f(6) + g(6) + f(7) + g(7) \\ &= f(5) + f(6) + f(7) + g(5) + g(6) + g(7). \end{aligned}$$

Σ の定義より $\sum_{k=5}^7 f(k) = f(5) + f(6) + f(7)$, $\sum_{k=5}^7 g(k) = g(5) + g(6) + g(7)$ なので,

$$\sum_{k=5}^7 \{f(k) + g(k)\} = \sum_{k=5}^7 f(k) + \sum_{k=5}^7 g(k).$$

一般的に次の定理が成り立ちます.

定理 1.2.2 $m \leq n$ である自然数 m, n が数列 f と g との定義域に属すとき,

$$\sum_{k=m}^n \{f(k) \pm g(k)\} = \sum_{k=m}^n f(k) \pm \sum_{k=m}^n g(k) \quad (\text{複号同順}).$$

総和記号 Σ に関する重要な計算技法を説明します.

例解 4 と 7 とが定義域に属す数列 f に対して $\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\}$ を計算します. 総和記号 Σ の定義より

$$\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\} = f(4) - f(5) + f(5) - f(6) + f(6) - f(7) + f(7) - f(8).$$

この式では, $-f(5)$ と $+f(5)$ とが, $-f(6)$ と $+f(6)$ とが, $-f(7)$ と $+f(7)$ とが, 相殺されて消えます:

$$f(4) - f(5) + f(5) - f(6) + f(6) - f(7) + f(7) - f(8) = f(4) - f(8).$$

従って $\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\} = f(4) - f(8)$. 終

例題 総和 $\sum_{i=3}^{30} \left(\frac{7}{i} - \frac{7}{i+1} \right)$ を計算する.

【解説】

$$\begin{aligned} &\sum_{i=3}^{30} \left(\frac{7}{i} - \frac{7}{i+1} \right) \\ &= \frac{7}{3} - \frac{7}{4} + \frac{7}{4} - \frac{7}{5} + \frac{7}{5} - \frac{7}{6} + \frac{7}{6} - \frac{7}{7} + \cdots + \frac{7}{28} - \frac{7}{29} + \frac{7}{29} - \frac{7}{30} + \frac{7}{30} - \frac{7}{31}. \end{aligned}$$

この式では次のように項が相殺されて消える.

$$\begin{aligned} &\frac{7}{3} - \frac{7}{4} \\ &\quad + \frac{7}{4} - \frac{7}{5} \\ &\quad \quad + \frac{7}{5} - \frac{7}{6} \\ &\quad \quad \quad + \frac{7}{6} - \frac{7}{7} \\ &\quad \quad \quad \quad \vdots \\ &\quad \quad \quad \quad \quad + \frac{7}{28} - \frac{7}{29} \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad + \frac{7}{29} - \frac{7}{30} \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \frac{7}{30} - \frac{7}{31} \\ &\hline &\frac{7}{3} \qquad \qquad \qquad - \frac{7}{31} \end{aligned}$$

故に $\sum_{i=3}^{30} \left(\frac{7}{i} - \frac{7}{i+1} \right) = \frac{7}{3} - \frac{7}{31} = \frac{217-21}{93} = \frac{196}{93}$. 終

問題 1.2.2 総和 $\sum_{i=7}^{48} \left(\frac{24}{i-1} - \frac{24}{i} \right)$ を計算しなさい.

例題 総和 $\sum_{j=4}^{30} (\sqrt{3j+1} - \sqrt{3j-2})$ を計算する.

【解説】

$$\begin{aligned} &\sum_{j=4}^{30} (\sqrt{3j+1} - \sqrt{3j-2}) \\ &= \sqrt{13} - \sqrt{10} + \sqrt{16} - \sqrt{13} + \sqrt{19} - \sqrt{16} + \cdots + \sqrt{88} - \sqrt{85} + \sqrt{91} - \sqrt{88}. \end{aligned}$$

この式では次のように項が相殺されて消える.

$$\begin{aligned} &\sqrt{13} - \sqrt{10} \\ &\quad + \sqrt{16} - \sqrt{13} \\ &\quad \quad + \sqrt{19} - \sqrt{16} \\ &\quad \quad \quad + \sqrt{21} - \sqrt{19} \\ &\quad \quad \quad \quad \vdots \\ &\quad \quad \quad \quad \quad + \sqrt{88} - \sqrt{85} \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad + \sqrt{91} - \sqrt{88} \\ &\hline &\sqrt{91} \qquad \qquad \qquad - \sqrt{10} \end{aligned}$$

従って $\sum_{j=4}^{30} (\sqrt{3j+1} - \sqrt{3j-2}) = \sqrt{91} - \sqrt{10}$. 終

問題 1.2.3 総和 $\sum_{j=2}^{28} (\sqrt{5j+4} - \sqrt{5j-1})$ を計算しなさい.