

§ 1.4 等差数列

数列 $\{a_n\}$ について、漸化式

$$a_n = a_{n-1} + d \quad (d \text{ は変数 } n \text{ と無関係な定数})$$

が成り立つとき、数列 $\{a_n\}$ を**等差数列**といい、定数 d をその**公差**といいます。

例 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について公差は 10 であり $a_3 = 49$ とします。正の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので、

$$\begin{aligned} a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 &= a_3 + 10 = 49 + 10 = 59, \\ a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 &= a_4 + 10 = 59 + 10 = 69, \\ a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 &= a_5 + 10 = 69 + 10 = 79, \\ a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 &= a_6 + 10 = 79 + 10 = 89, \\ &\vdots \end{aligned}$$

また、正の各自然数 n について $a_{n-1} = a_n - 10$ なので、

$$\begin{aligned} a_{n-1} = a_n - 10 \text{ において } n = 3 \text{ とすると } a_2 &= a_3 - 10 = 49 - 10 = 39, \\ a_{n-1} = a_n - 10 \text{ において } n = 2 \text{ とすると } a_1 &= a_2 - 10 = 39 - 10 = 29, \\ a_{n-1} = a_n - 10 \text{ において } n = 1 \text{ とすると } a_0 &= a_1 - 10 = 29 - 10 = 19. \end{aligned} \quad \text{終}$$

等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公差を d とおきます。漸化式 $a_n = a_{n-1} + d$ を用いて、自然数 m に対する項 a_m から $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, a_{m+4}, \dots$ を計算していくと、

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= a_m + d = a_m + d, \\ a_{m+2} &= a_{m+1} + d = (a_m + d) + d = a_m + 2d, \\ a_{m+3} &= a_{m+2} + d = (a_m + 2d) + d = a_m + 3d, \\ a_{m+4} &= a_{m+3} + d = (a_m + 3d) + d = a_m + 4d, \\ a_{m+5} &= a_{m+4} + d = (a_m + 4d) + d = a_m + 5d, \\ &\vdots \end{aligned}$$

このように、各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m + kd$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_m & \xrightarrow{+d} & a_{m+1} & \xrightarrow{+d} & a_{m+2} & \xrightarrow{+d} & a_{m+3} & \xrightarrow{+d} & a_{m+4} & \xrightarrow{+d} & \cdots & \xrightarrow{+d} & a_{m+k} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ & & a_m + d & & a_m + 2d & & a_m + 3d & & a_m + 4d & & \cdots & & a_m + kd \end{array}$$

この等式 $a_{m+k} = a_m + dk$ において $m+k = n$ とおきます； $k = n - m$ なので、
 $a_n = a_m + d(n - m)$.

定理 1.4 等差数列 $\{a_n\}$ の公差が d であるとき、数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m + d(n - m)$.

この定理 1.4 より次のようになります：第 1 項から始まる等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の公差が d であるとき、

$$\text{正の各自然数 } n \text{ について } a_n = a_1 + d(n - 1) ;$$

第 0 項から始まる等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公差が d であるとき、

$$\text{各自然数 } n \text{ について } a_n = a_0 + dn .$$

例題 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について公差は -3 であり $a_5 = 7$ とする。各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す。

等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公差は -3 なので、

$$a_n = a_5 + (-3)(n - 5) = 7 - 3n + 15 = 22 - 3n . \quad \text{終}$$

問題 1.4.1 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ について公差は $-\frac{3}{2}$ であり $a_7 = 5$ とします。正の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表しなさい。

例題 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ について $a_3 = 7$ かつ $a_8 = 27$ とする。正の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す。

等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の公差を d とおく。 $a_8 = a_3 + d(8 - 3)$ なので、
 $5d = a_8 - a_3 = 27 - 7 = 20$, よって $d = 4$. 故に

$$a_n = a_3 + 4(n - 3) = 7 + 4n - 12 = 4n - 5 . \quad \text{終}$$

問題 1.4.2 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について $a_5 = 22$ かつ $a_{11} = 4$ とします。各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表しなさい。

例題 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ について公差は 2 であり第 1 項は $a_1 = 5$ とする。正の自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n a_k$ を計算する。

等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の公差が 2 なので、正の各自然数 k に対して

$$a_k = a_1 + 2(k - 1) = 5 + 2k - 2 = 2k + 3 .$$

これより、

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (2k + 3) = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 3 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + 3n = n(n+4) . \quad \text{終}$$

問題 1.4.3 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について公差は 4 であり第 0 項は $a_0 = 5$ とします。自然数 m に対して総和 $\sum_{k=0}^m a_k$ を計算しなさい。