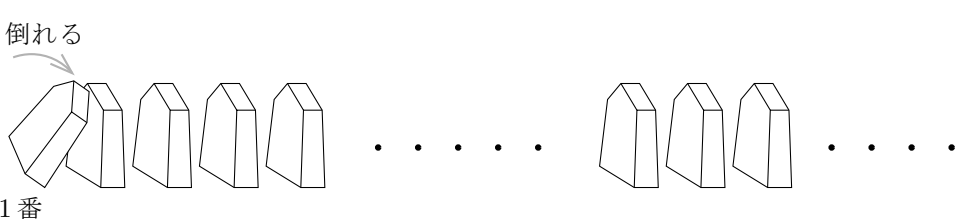
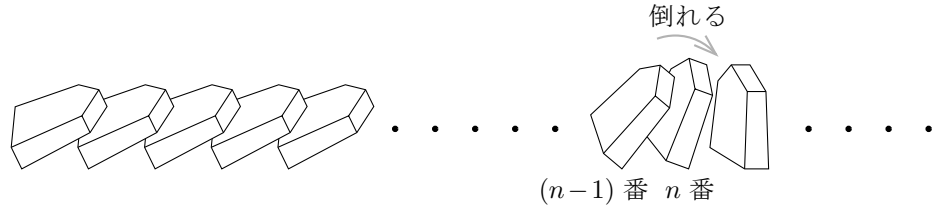


§1.6 数学的帰納法

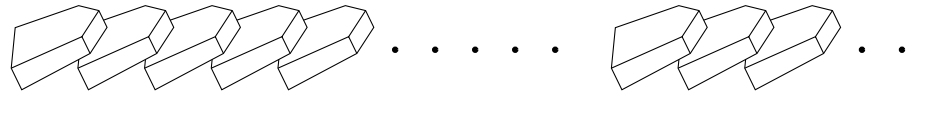
“将棋倒し”という言葉があります。将棋の駒を適当な間隔で一列に並べます。まず、1番めの駒が倒れるとします。



このとき、2番めの駒、3番めの駒、4番めの駒、…と順に倒れていきます。2以上の自然数 n について、 $(n-1)$ 番めの駒が倒れると必ず n 番めの駒も倒れるとします。



このとき、結局総ての駒が倒れます。



つまり、次の2つのことが成り立つとき総ての駒が倒れます：

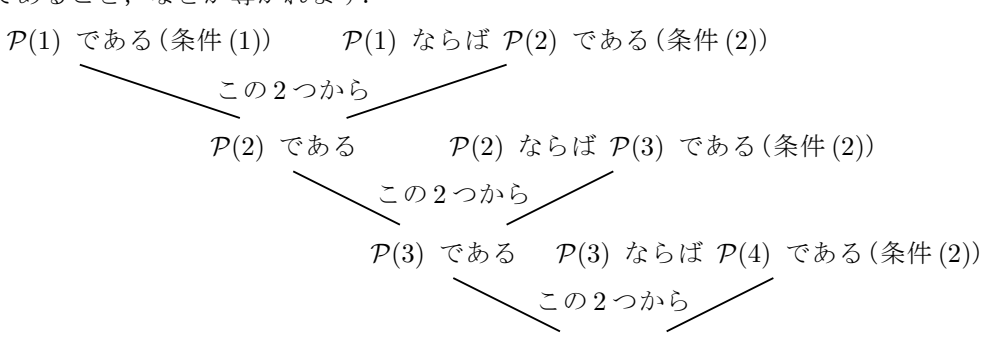
- (1) 1番めの駒が倒れる；
- (2) 2以上の任意の自然数 n について、 $(n-1)$ 番めの駒が倒れると次の n 番めの駒も倒れる。

数学においてこの将棋倒しに似た論法が使われます。

正の自然数 n に関する条件 $P(n)$ について、次の2つのことが成り立つとします：

- (1) $P(1)$ である；
- (2) 2以上の任意の自然数 n について、 $P(n-1)$ であるならば $P(n)$ である。

この2つのことから、次のようにして、 $P(2)$ であること、 $P(3)$ であること、 $P(4)$ であること、などが導かれます。



以下同様にして、 $P(5)$ であること、 $P(6)$ であること、などが導かれます。結局、任意の正の自然数 n について $P(n)$ であることとなります。

このような推論法を**数学的帰納法**といいます。

法則 (数学的帰納法) 正の自然数 n に関する条件 $P(n)$ について、次の2つのことが成り立つとする：

- (1) $P(1)$ である；
- (2) 2以上の任意の自然数 n について、 $P(n-1)$ であるならば $P(n)$ である。

このとき、正の任意の自然数 n について $P(n)$ である。

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$ で、2以上の任意の自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ 。次のことを示す：正の任意の自然数 n について $a_n = n^2$ 。

【方針】 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 等式 $a_n = n^2$ において $n = 1$ とした等式 $a_1 = 1^2$ を示す；
- (2) 2以上の任意の自然数 n について、漸化式 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ を用いて、等式 $a_{n-1} = (n-1)^2$ を仮定して等式 $a_n = n^2$ を導く。

【解答】

- (1) $a_1 = 1$ なので $a_1 = 1^2$ 。
- (2) 2以上の自然数 n について、 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ なので、 $a_{n-1} = (n-1)^2$ ならば

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1 = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2。$$

故に、数学的帰納法により、正の任意の自然数 n について $a_n = n^2$ 。 □

問題 1.6.1 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を次のように帰納的に定義します： $a_1 = 1$ で、2以上の任意の自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$ 。次のことを示しなさい：正の任意の自然数 n について $a_n = n^3$ 。

問題 1.6.2 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を次のように帰納的に定義します： $a_1 = 4$ で、2以上の任意の自然数 n について $a_n = \frac{4a_{n-1}}{a_{n-1} + 4}$ 。次のことを示しなさい：正の任意の自然数 n について $a_n = \frac{4}{n}$ 。

自然数 n に関する条件 $P(n)$ について、任意の自然数 n について $P(n)$ であることを示すためには、0 から数学的帰納法を始めます。

法則 (数学的帰納法) 自然数 n に関する条件 $P(n)$ について、次の2つのことが成り立つとする：

- (1) $P(0)$ である；
- (2) 正の任意の自然数 n について、 $P(n-1)$ であるならば $P(n)$ である。

このとき、任意の自然数 n について $P(n)$ である。

1.4節において次のことを述べました：第0項から始まる等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公差が d であるとき、

$$\text{任意の自然数 } n \text{ について } a_n = a_0 + dn。$$

このことを数学的帰納法により証明します。

証明 第0項から始まる等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公差が d であるとする。

$$d \cdot 0 = 0 \text{ なので } a_0 = a_0 + d \cdot 0。$$

正の任意の自然数 n について、 $a_n = a_{n-1} + d$ なので、 $a_{n-1} = a_0 + d(n-1)$ ならば

$$a_n = a_{n-1} + d = a_0 + d(n-1) + d = a_0 + dn。$$

故に、数学的帰納法により、任意の自然数 n について $a_n = a_0 + dn$ 。 (証明終り)

1.5節において次のことを述べました：第0項から始まる等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が r であるとき、

$$\text{任意の自然数 } n \text{ について } a_n = a_0 r^n。$$

このことを数学的帰納法により証明します。

証明 第0項から始まる等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が r であるとする。

$$r^0 = 1 \text{ なので } a_0 = a_0 r^0。$$

正の任意の自然数 n について、 $a_n = a_{n-1} r$ なので、 $a_{n-1} = a_0 r^{n-1}$ ならば

$$a_n = a_{n-1} r = a_0 r^{n-1} r = a_0 r^n。$$

故に、数学的帰納法により、任意の自然数 n について $a_n = a_0 r^n$ 。 (証明終り)

例題 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で、正の任意の自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ 。次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$ 。

【方針】 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式 $a_n > 3$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 3$ を示す；
- (2) 正の任意の自然数 n について、不等式 $a_{n-1} > 3$ を仮定して不等式 $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$ を導き、漸化式 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ により不等式 $a_n > 3$ を導く。

【解答】

- (1) $a_0 = 4$ なので $a_0 > 3$ 。
- (2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 3$ とする。

$$a_{n-1} + 6 > 3 + 6 = 9, \\ \sqrt{a_{n-1} + 6} > \sqrt{9} = 3,$$

$a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ なので $a_n > 3$ 。つまり、正の任意の自然数 n について、 $a_{n-1} > 3$ ならば $a_n > 3$ 。

故に、数学的帰納法により、任意の自然数 n に対して $a_n > 3$ 。 □

問題 1.6.3 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義します： $a_0 = 7$ で、正の任意の自然数 n に対して $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$ 。次のことを示しなさい：任意の自然数 n に対して $a_n > 5$ 。

なお、数学的帰納法は帰納法ではなくて演繹法です。