

§ 2.2 関数の連続性

例解 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^2$ と定めます。この関数 $\varphi(x)$ について、 $x \rightarrow 3$ のときの極限がどうなるか考えます。 x の値を 3 より大きい方から 3 に近づけていきます：

$$\begin{aligned} x = 3.1 \text{ のとき } \varphi(x) &= 3.1^2 = 9.61, \\ x = 3.001 \text{ のとき } \varphi(x) &= 3.001^2 = 9.006001, \\ x = 3.00001 \text{ のとき } \varphi(x) &= 3.00001^2 = 9.0000600001, \\ &\vdots \end{aligned}$$

x の値を 3 より小さい方から 3 に近づけていきます：

$$\begin{aligned} x = 2.9 \text{ のとき } \varphi(x) &= 2.9^2 = 8.41, \\ x = 2.999 \text{ のとき } \varphi(x) &= 2.999^2 = 8.994001, \\ x = 2.99999 \text{ のとき } \varphi(x) &= 2.99999^2 = 8.9999400001, \\ &\vdots \end{aligned}$$

このように、 $x \rightarrow 3$ のとき $\varphi(x)$ は 9 に収束します： $\lim_{x \rightarrow 3} \varphi(x) = 9$ 。この極限值 9 は $\varphi(3)$ の値です： $\varphi(3) = 3^2 = 9$ 。従って $\lim_{x \rightarrow 3} \varphi(x) = \varphi(3)$ となります。 終

関数 f と実数 a について、 $f(a)$ の値があるとき、つまり a が関数 f の定義域に属するとき、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ となるのが普通です。このようなとき、 a において f は**連続** (continuous) であるといえます。

定義 関数 f の定義域の実数 a において f が連続であるとは、 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が収束して $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ となることである。

区間 I において関数 f が連続であるとは、 I の各実数において f が連続であることである。

関数 f が連続であるとは、 f が定義域の任意の実数において連続であることである。

証明は省略しますが、これまで私達が扱ってきた関数のほとんどは連続です²⁾。

定理 2.2.1 定数関数³⁾ は連続である。

例 定数関は連続ですから、

$$\lim_{x \rightarrow 3} 7 = 7, \quad \lim_{x \rightarrow -5} \left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{9}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \sin 2 = \sin 2. \quad \text{終}$$

定理 2.2.2 冪関数は連続である。

例 冪関数 x^3 及び $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ は連続ですから、

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = (-2)^3 = -8, \quad \lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{x} = \sqrt{7}. \quad \text{終}$$

定理 2.2.3 指数関数及び対数関数は連続である。

例 指数関数 2^x 及び対数関数 $\log_3 x$ は連続ですから、

$$\lim_{x \rightarrow 5} 2^x = 2^5 = 32, \quad \lim_{x \rightarrow 8} \log_3 x = \log_3 8. \quad \text{終}$$

定理 2.2.4 三角関数及び逆三角関数は連続である。

例 正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ は連続ですから、

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sin x = \sin 2, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ 及び逆正接関数 $\tan^{-1} x$ は連続ですから、

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sin^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \lim_{x \rightarrow 6} \tan^{-1} x = \tan^{-1} 6. \quad \text{終}$$

このように、“通常”関数 f は定義域に属す実数 a において連続ですから、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ；このとき、極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は結局 $f(x)$ の x に a を代入した値 $f(a)$ ですから、わざわざ極限値を考える意味がありません。しかし、前節で述べた関数 $\psi(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ ($x \neq 2$) のように、 $\psi(2)$ の値が無いときにしばしば極限值 $\lim_{x \rightarrow 2} \psi(x)$ を考えることが有用になります。

²⁾ 例えば 0 以外の実数の全体を定義域とする関数 $\frac{1}{x}$ は、0 において連続ではありませんが、0 は定義域に属しません；0 以外の各実数において、つまり定義域の各実数において連続です；よってこの関数 $\frac{1}{x}$ は連続です。

³⁾ 定義域の任意の x に対して $f(x) = k$ (k は x と無関係な定数) となる関数を定数関数といたしました。