# §3.1　導関数

例解　実数全体を定義域とする関数 $\varphi$ を $\varphi(x)=x^3$ と定めます．定理2.5.1より，各実数 $x$ における $\varphi$ の微分係数は $3x^2$ です．ですから，各実数 $x$ に対して，$x$ における $\varphi$ の微分係数 $3x^2$ は唯一つに決まります．実数を表す変数 $x$ の値をいろいろ変化させると，

$x$ に対して　$x$ における $\varphi$ の微分係数 $3x^2$ を対応させる 関数

ができます．この関数を $\varphi$ の導関数といい，$\varphi'$ と書き表します．$\varphi$ の導関数 $\varphi'$ の値 $\varphi'(x)$ は $x$ における $\varphi$ の微分係数なので，$\varphi'(x)=3x^2$ です．ですから例えば次のようになります：

2 に対する導関数 $\varphi'$ の値 $\varphi'(2)=12$ は 2 における $\varphi$ の微分係数である；

5 に対する導関数 $\varphi'$ の値 $\varphi'(5)=75$ は 5 における $\varphi$ の微分係数である．

このように，導関数とは微分係数を求めるための関数です．　終

一般的に述べます．関数 $f$ の定義域の実数 $x$ に対して，$x$ における $f$ の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ は（あるならば）唯一つに決まります．従って，

$x$ に対して　$x$ における $f$ の微分係数を対応させる 関数

を定義できます．この関数を $f$ の**導関数** (derived function) といいます．

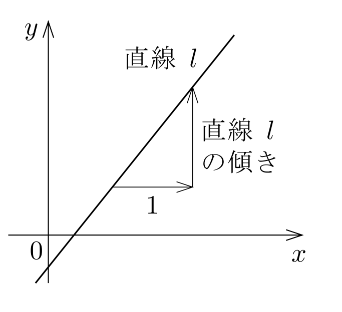
**定義**　関数 $f$ の導関数とは，$f$ の定義域の実数 $x$ に対して $x$ における $f$ の微分係数を対応させる関数のことである[1]．関数 $f$ の導関数を $f'$ と書き表す．

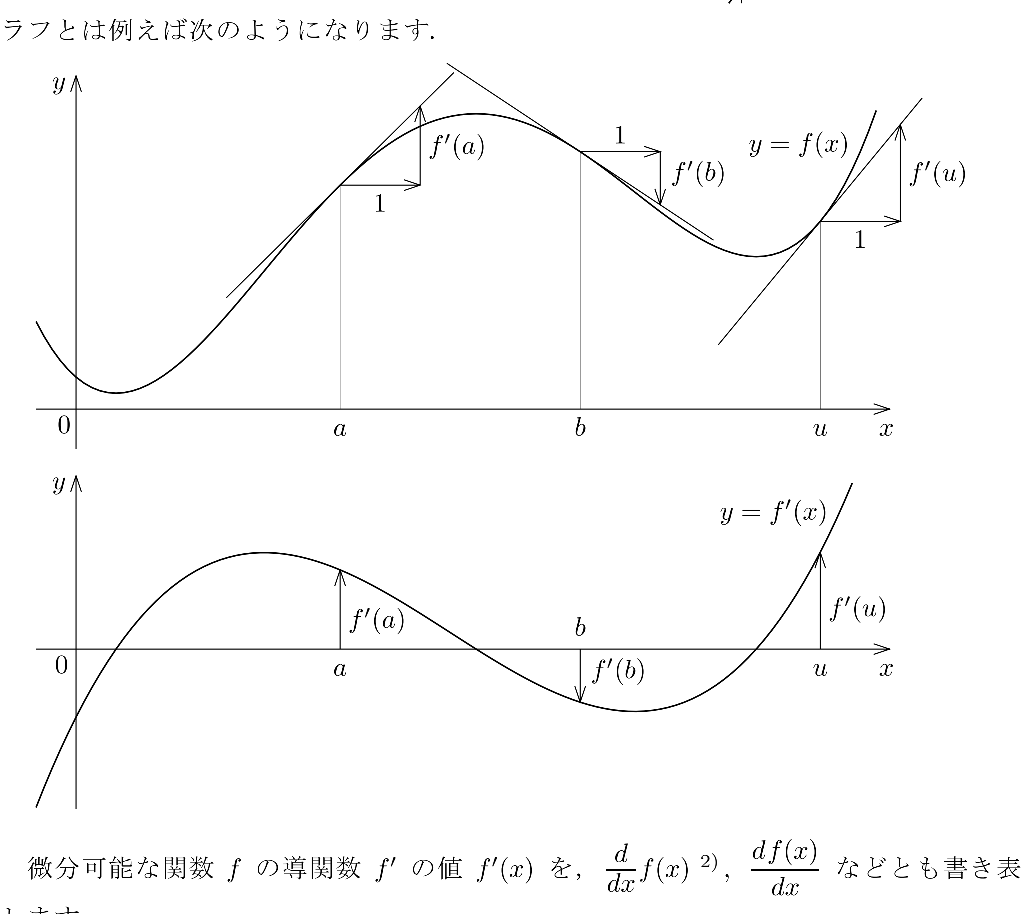
関数 $f$ の導関数 $f'$ とは次のような関数です：実数 $x$ に対する値 $f'(x)$ は $x$ における $f$ の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ である，つまり

$$f'(x)=〔f\ の\ x\ における微分係数〕=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ .$$

関数 $f$ の導関数を求めることを，$f$ を**微分する** (differentiate) といいます．

関数 $f$ の導関数 $f'$ の値 $f'(x)$ は $x$ における $f$ の微分係数ですから，$f$ のグラフの点 $\big(x,f(x)\big)$ における接線の傾きです（2.6節参照）．$xy$ 座標平面における直線の傾きは，右図のように，$x$ 座標を1だけ大きくするとき $y$ 座標が大きくなる量です．このことより，$f$ のグラフと導関数 $f'$ のグラフとは例えば次のようになります．




微分可能な関数 $f$ の導関数 $f'$ の値 $f'(x)$ を，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ [2]，$\dfrac{df(x)}{dx}$ などとも書き表します；

$$\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\ .$$

つまり，変数 $x$ の関数 $f(x)$ に対して，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ [3] は $f(x)$ を微分した結果を表します．例えば，関数 $\varphi$ を $\varphi(x)=x^3$ とおくとき，$\varphi'(x)=3x^2$ なので，

$$\frac{d}{dx}x^3=\frac{d}{dx}\varphi(x)=\varphi'(x)=3x^2\ .$$

$\dfrac{d}{dx}$ は変数 $x$ の関数として微分することを意味します．例えば，変数 $t$ の関数として微分するときは $\dfrac{d}{dt}$ と書き表します：

$$\frac{d}{dt}t^3=3t^2\ .$$

正の整数 $n$ に対して，冪関数 $x^n$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^n$ の値は $x^n$ の微分係数で，定理2.5.1より

$x$ における冪関数 $x^n$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{t\to x}\frac{t^n-x^n}{t-x}=nx^{n-1}$

ですから，次の公式が成り立ちます．

> **定理** 3.1.1　正の整数 $n$ を指数とする冪関数 $x^n$ の導関数は
> $$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}\ .$$

この定理より例えば次のようになります：

$$\frac{d}{dx}x^3=3x^2\ ,\qquad \frac{d}{dt}t^5=5t^4\ ,\qquad \frac{d}{dy}y^2=2y^1=2y\ .$$

特に，$x=x^1$ なので，

$$\frac{d}{dx}x=\frac{d}{dx}x^1=1x^0=1\ .$$

例　4 を指数とする冪関数 $x^4$ を $f(x)$ とおきます：$f(x)=x^4$ ．関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{d}{dx}x^4=4x^3$ ．関数 $f(x)$ の $-2$ における微分係数は $f'(x)=4(-2)^3=-32$ ．　終

問題 3.1.1　5 を指数とする冪関数 $x^5$ を $f(x)$ とおきます．関数 $f(x)$ の導関数を求めて，$f(x)$ の $-2$ における微分係数を求めなさい．

各実数 $x$ に対して，$x$ における定数関数の微分係数は 0 です（定理2.5.2）．従って，変数 $x$ に無関係な定数 $k$ に対して，$f(x)=k$ となる定数関数 $f$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}k=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)=0\ .$$

**定理** 3.1.2　変数 $x$ に無関係な定数 $k$ に対して，定数関数 $k$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}k=0\ .$$

この定理より，例えば次のようになります：

$$\frac{d}{dx}6=0\ ,\qquad \frac{d}{dt}5^3=0\ ,\qquad \frac{d}{dy}\ln 7=0\ .$$

正弦関数 $\sin x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\sin x$ の値は $\sin x$ の微分係数で，定理2.8より，各実数 $x$ に対して

$x$ における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x$

ですから，$\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$ です．同様に，余弦関数 $\cos x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\cos x$ の値は $\cos x$ の微分係数で，各実数 $x$ に対して

$x$ における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\sin x$

ですから，$\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$ です．

> **定理** 3.1.3　正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ の導関数は，それぞれ，
> $$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x\ ,\qquad \frac{d}{dx}\cos x=-\sin x\ .$$

例　正弦関数 $\sin x$ を $f(x)$ とおきます：$f(x)=\sin x$ ．関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$ ．関数 $f(x)$ の $\dfrac{2\pi}{3}$ における微分係数は

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}\ .$$

終

例　余弦関数 $\cos x$ を $g(x)$ とおきます：$g(x)=\cos x$ ．関数 $g(x)$ の導関数は $g'(x)=\dfrac{d}{dx}g(x)=\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$ ．関数 $g(x)$ の $\dfrac{5\pi}{6}$ における微分係数は

$$g'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sin\frac{5\pi}{6}=-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}\ .$$

終

問題 3.1.2　正弦関数 $\sin x$ を $g(x)$ とおきます．関数 $g(x)$ の導関数を求めて，$g(x)$ の $\dfrac{5\pi}{3}$ における微分係数を求めなさい．

問題 3.1.3　余弦関数 $\cos x$ を $f(x)$ とおきます．関数 $f(x)$ の導関数を求めて，$f(x)$ の $\dfrac{11\pi}{6}$ における微分係数を求めなさい．

定数 $a$ について $a>0$ ，$a\neq 0$ とします．定理2.9より，$x>0$ である各実数 $x$ について，

$x$ における対数関数 $\log_a x$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{\log_a e}{x}$

ですから，

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{\log_a e}{x}\ ;$$

対数の底の変換公式より

$$\log_a e=\frac{\log_e e}{\log_e a}=\frac{1}{\ln a}\ ,$$

よって

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln a}\ .$$

特に $a=e$ のときは，$\ln e=\log_e e=1$ なので，

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{d}{dx}\log_e x=\frac{1}{x\ln e}=\frac{1}{x}\ .$$

> **定理** 3.1.4　定数 $a$ について $a>0$ ，$a\neq 0$ とする．対数関数 $\log_a x$ の導関数は
> $$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln a}\quad (\ x>0\ )\ .$$
> 特に自然対数の対数関数 $\ln x=\log_e x$ の導関数は
> $$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}\quad (\ x>0\ )\ .$$

例　3 を底とする対数関数 $\log_3 x$ を $f(x)$ とおきます：$f(x)=\log_3 x$ （ $x>0$ ）．関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{d}{dx}\log_3 x=\dfrac{\log_3 e}{x}$ ．関数 $f(x)$ の 5 における微分係数は $f'(5)=\dfrac{\log_3 e}{5}$ ．　終

問題 3.1.4　5 を底とする対数関数 $\log_5 x$ を $f(x)$ とおきます．関数 $f(x)$ の導関数を求めて，$f(x)$ の 7 における微分係数を求めなさい．

関数 $f(x)$ の導関数の表現 $\dfrac{d}{dx}f(x)$ において，$\dfrac{d}{dx}$ は $f(x)$ を変数 $x$ の関数として微分することを意味します．例えば，変数 $y$ の関数 $y^4$ の導関数は $\dfrac{d}{dy}y^4$ と，変数 $t$ の関数 $\sin t$ の導関数は $\dfrac{d}{dt}\sin t$ と書き表します：

$$\frac{d}{dy}y^4=4y^3\ ,\qquad \frac{d}{dt}\sin t=\cos t\ .$$

関数 $f$ について，変数 $x$ の変化に対する $f(x)$ の変化を考えます．$x$ の値の変化量を $x$ の増分 (increment) といい $\Delta x$ [4] と書き表します．$x$ の増分 $\Delta x$ に対して，$x$ が $x+\Delta x$ に変化すると[5]，$f(x)$ は $f(x+\Delta x)$ に変化します．このとき，$f(x)$ の変化量は $f(x+\Delta x)-f(x)$ です[6]．これを，$x$ の増分 $\Delta x$ に対する $f(x)$ の増分といい，$\Delta f(x)$ と書き表します：

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)\ .$$

$f(x)$ の増分 $\Delta f(x)$ を $x$ の増分 $\Delta x$ で割ると

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ ;$$

これは関数 $f$ の平均変化率です．ここで $\Delta x\to 0$ とします：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ .$$

変数 $\Delta x$ を変数 $h$ で置き換えると

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ ;$$

これは関数 $f$ の微分係数です：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)\ .$$

変数 $x,y$ 及び関数 $f$ について $y=f(x)$ のとき，$\Delta y=\Delta f(x)$ ですから，

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ .$$

これを $\dfrac{dy}{dx}$ [7]，$y'$ などと書き表すこともあります．結局，$y=f(x)$ のときは，

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)\ .$$

――――　導関数の値の表記について

例えば，関数 $f$ を $f(x)=x^3$ とおきます．このとき

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}x^3=3x^2\ .$$

等式 $f'(x)=3x^2$ の両辺の $x$ に 2 を代入すると $f'(2)=3\cdot 2^2=12$ ．しかし，$\dfrac{d}{dx}x^3$ の $\dfrac{d}{dx}$ は変数 $x$ で微分することを意味するので，この $x$ に定数 2 を代入することはできません．そこで，関数 $x^3$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^3$ の $x=2$ のときの値を $\left(\dfrac{d}{dx}x^3\right)_{x=2}$ と書き表します．この記法によると，

$$f'(2)=\left(\frac{d}{dx}x^3\right)_{x=2}=\big(3x^2\big)_{x=2}=3\cdot 2^2=12\ .$$

---

1) 関数 $f$ の導関数の定義域は，通常，$x$ において $f$ が微分可能であるような実数 $x$ の全体です．

2) $\dfrac{d}{dx}$ は“ディー ディーエックス”と読みます．

3) $\dfrac{d}{dx}f(x)$ はこれでひとまとまりの表現であり，$\dfrac{d}{dx}$ だけでは意味がありません．

4) $\Delta x$ はこれで1つの変数です．$\Delta$ と $x$ との積ではありません．

5) $x$ の増分といっても $x$ の値が増加するとは限りません．$\Delta x<0$ のとき $x$ の値は減少します．

6) 変化量は“〔変化した後の量〕−〔変化する前の量〕”です

7) $\dfrac{dy}{dx}$ は“ディーワイ ディーエックス”と読みます．$\dfrac{dy}{dx}$ はこれでひとまとまりの表現であり，分数ではありません．