§3.5　合成関数の微分法

微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて，$f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれるとします． $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ ができます． 変数 t を $t=f(x)$ とおき，変数 y を $y=g(t)$ とおきます． $y=g(t)=g\big(f(x)\big)$ ． x の増分 $\varDelta x$ に対する t の増分を $\varDelta t$ とおき y の増分を $\varDelta y$ とおきます． $\varDelta x$ が 0 に近い値で $\varDelta x\neq 0$ のとき $\varDelta t\neq 0$ とします[10]． $f(x)$ は微分可能なので，定理 2.7.1 より，$\varDelta x\to 0$ のとき $f(x+\varDelta x)\to f(x)$ なので $\varDelta t=f(x+\varDelta x)-f(x)\to 0$ ．

$$\frac{dy}{dt}=\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\ ,\qquad \frac{dt}{dx}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta t}{\varDelta x}\ .$$

これらのことより，

$$\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta t}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\cdot\frac{\varDelta t}{\varDelta x}\right)=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{dy}{dx}\ ,$$

つまり

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

$y=g(t)$ なので， $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}g(t)$ ， $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}g(t)$ ，よって

$$\frac{d}{dx}g(t)=\frac{d}{dt}g(t)\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

定理 3.5　微分可能な関数 f と g とについて，f の値域が g の定義域に含まれるとき，変数 x,t を $t=f(x)$ とおくと，

$$\frac{d}{dx}g(t)=\frac{d}{dt}g(t)\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

例解　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\sin(3x+2)$ と定めます． f の導関数 f' を求めます． 変数 t を $t=3x+2$ とおきます． $f(x)=\sin(3x+2)=\sin t$ を微分します． 微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$ を適用できるのは， $\dfrac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が sin の中身と一致するときです．

$$\frac{d}{d\boxed{x}}\sin\boxed{x}=\cos x\ ,\qquad\qquad \frac{d}{d\boxed{t}}\sin\boxed{t}=\cos t\ .$$

一致　　　　一致

ですから，変数 x の関数 $f(x)=\sin t$ の導関数

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\sin t$$

を計算するには，このままでは微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$ を適用できません． そこで，定理 3.5 の公式 $\dfrac{d}{dx}g(t)=\dfrac{d}{dt}g(t)\cdot\dfrac{dt}{dx}$ において $g(t)=\sin t$ とおきます：

$$\frac{d}{dx}\sin t=\frac{d}{dt}\sin t\cdot\frac{dt}{dx}=\cos t\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

$t=3x+2$ なので， $\cos t=\cos(3x+2)$ ， $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}(3x+2)=3$ ，よって，

$$\cos t\cdot\frac{dt}{dx}=\cos(3x+2)\cdot 3=3\cos(3x+2)\ .$$

故に

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\sin t=\cos t\cdot\frac{dt}{dx}=3\cos(3x+2)\ .$$

終

例題　変数 x の関数 $y=\cos\dfrac{4x+5}{3}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める．

〔解説〕 変数 t を $t=\dfrac{4x+5}{3}$ とおく． $y=\cos\dfrac{4x+5}{3}=\cos t$ なので

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cos t\ .$$

定理 3.5 の公式 $\dfrac{d}{dx}g(t)=\dfrac{d}{dt}g(t)\cdot\dfrac{dt}{dx}$ において $g(t)=\cos t$ とおくと

$$\frac{d}{dx}\cos t=\frac{d}{dt}\cos t\cdot\frac{dt}{dx}=-\sin t\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

$t=\dfrac{4x+5}{3}$ なので， $\sin t=\sin\dfrac{4x+5}{3}$ ， $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}\dfrac{4x+5}{3}=\dfrac{4}{3}$ ，よって，

$$-\sin t\cdot\frac{dt}{dx}=-\sin\frac{4x+5}{3}\cdot\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}\sin\frac{4x+5}{3}\ .$$

故に

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cos t=-\sin t\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{4}{3}\sin\frac{4x+5}{3}\ .$$

終

問題 3.5.1　 $\dfrac{7x-5}{3}$ が $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数 x の全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\tan\dfrac{7x-5}{3}$ と定めます． f の導関数 f' を求めなさい．

例題　実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=\ln(x^2-5x+7)$ と定める[11]． 関数 g の導関数 g' を求める．

〔解説〕 変数 t を $t=x^2-5x+7$ とおく． $g(x)=\ln(x^2-5x+7)=\ln t$ なので

$$g'(x)=\frac{d}{dx}g(x)=\frac{d}{dx}\ln t\ .$$

定理 3.5 の公式 $\dfrac{d}{dx}g(t)=\dfrac{d}{dt}g(t)\cdot\dfrac{dt}{dx}$ において $g(t)=\ln t$ とおくと

$$\frac{d}{dx}\ln t=\frac{d}{dt}\ln t\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

$t=x^2-5x+7$ なので， $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{x^2-5x+7}$ ， $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}(x^2-5x+7)=2x-5$ ，よって

$$\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2-5x+7}\cdot(2x-5)=\frac{2x-5}{x^2-5x+7}\ .$$

故に

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\ln t=\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{2x-5}{x^2-5x+7}\ .$$

終

問題 3.5.2　変数 x の関数 $y=\ln(3x^2-7x+5)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．

例題　変数 x の関数 $y=\cos^4 x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める．

〔解説〕 変数 t を $t=\cos x$ とおく． $y=(\cos x)^4=t^4$ なので，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}t^4\ .$$

定理 3.5 の公式 $\dfrac{d}{dx}g(t)=\dfrac{d}{dt}g(t)\cdot\dfrac{dt}{dx}$ において $g(t)=x^4$ とおくと

$$\frac{d}{dx}t^4=\frac{d}{dt}t^4\cdot\frac{dt}{dx}=4t^3\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

$t=\cos x$ なので， $t^3=(\cos x)^3=\cos^3 x$ ， $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$ ，よって

$$4t^3\cdot\frac{dt}{dy}=4\cos^3 x\cdot(-\sin x)=-4\sin x\cos^3 x\ .$$

故に

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}t^4=4t^3\cdot\frac{dt}{dx}=-4\sin x\cos^3 x\ .$$

終

問題 3.5.3　実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\sin^3 x$ と定めます． 関数 ψ の導関数 ψ' を求めなさい．

関数 f の定義域の要素 a における f の微分係数は，f の導関数 f' の a に対する値 $f'(a)$ でした．

例題　実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\cos\dfrac{5x+8\pi}{3}$ と定める． π における ψ の微分係数を求める．

変数 t を $t=\dfrac{5x+8\pi}{3}$ とおく． $\psi(x)=\cos\dfrac{5x+8\pi}{3}=\cos t$ なので，ψ の導関数 ψ' は

$$\begin{aligned}\psi'(x)&=\frac{d}{dx}\psi(x)=\frac{d}{dx}\cos t=\frac{d}{dt}\cos t\cdot\frac{dt}{dx}\\&=-\sin t\cdot\frac{d}{dx}\frac{5x+8\pi}{3}=-\sin\frac{5x+8\pi}{3}\cdot\frac{5}{3}\\&=-\frac{5}{3}\sin\frac{5x+8\pi}{3}\ .\end{aligned}$$

π における ψ の微分係数は

$$\begin{aligned}\psi'(\pi)&=-\frac{5}{3}\sin\frac{5\pi+8\pi}{3}=-\frac{5}{3}\sin\frac{13\pi}{3}\\&=-\frac{5}{3}\sin\left(\frac{13\pi}{3}-4\pi\right)=-\frac{5}{3}\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{5}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=-\frac{5\sqrt{3}}{6}\ .\end{aligned}$$

終

問題 3.5.4　実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=\sin\dfrac{7x+8\pi}{3}$ と定めます． $\dfrac{\pi}{2}$ における φ の微分係数を求めなさい．

---

10) 独立変数 x の増分 $\varDelta x$ の値は私達が自由に決めることができるので，勝手に $\varDelta x\neq 0$ とすることができます． しかし， $\varDelta t=f(x+\varDelta x)-f(x)$ なので，従属変数 t の増分 $\varDelta t$ の値は x と $\varDelta x$ の値から自動的に決まってしまいます；あるいは $\varDelta t=0$ となるかもしれません． もしそうなれば，$\varDelta t$ を分母とする分数 $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta t}$ には値がありません． ですから，本当は $\varDelta t=0$ になり得る場合を別に証明しなければなりませんが，繁雑なので省略します．

11) 各実数 x について， $x^2-5x+7=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}>0$ なので， $g(x)=\ln(x^2-5x+7)$ の値があります．