

§3.6 いくつかの関数の導関数

指数関数の導関数は次のようになります。

定理 3.6.1 定数 a は実数で $a > 0$, $a \neq 1$ のとき, a を底とする指数関数 a^x の導関数は

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a .$$

特に, 自然対数の底 e に対して, 指数関数 e^x の導関数は

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x .$$

証明 変数 y を $y = a^x$ とおく. $\frac{d}{dx}a^x = \frac{dy}{dx}$ を求める. $y = a^x$ の自然対数をとると,

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a .$$

この等式の両辺を x で微分する:

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx}(x \ln a) . \quad (1)$$

この等式 (1) の左辺は, 定理 3.5 より

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} ;$$

$\ln a$ は定数なので, 等式 (1) の右辺は

$$\frac{d}{dx}(x \ln a) = \ln a \cdot \frac{d}{dx}x = \ln a \cdot 1 = \ln a ;$$

従って $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln a$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a .$$

$y = a^x$ なので, $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$.

特に, $a = e$ のとき, $\ln e = \log_e e = 1$ なので,

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \ln e = e^x \cdot 1 = e^x .$$

(証明終り)

例題 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3^x \sin x$ と定める. 関数 g の導関数 g' を求める.

$$\frac{d}{dx}3^x = 3^x \ln 3 \text{ なので,}$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}(3^x \sin x) = \frac{d}{dx}3^x \cdot \sin x + 3^x \cdot \frac{d}{dx} \sin x = 3^x \ln 3 \sin x + 3^x \cos x = 3^x (\ln 3 \sin x + \cos x) . \quad \text{終}$$

問題 3.6.1 実数全体を定義域とする関数 f を $g(x) = 2^x \cos x$ と定める. 関数 f の導関数 f' を求めなさい.

例題 変数 x の関数 $y = \frac{x^3}{5^x}$ を微分しなさい.

$$\frac{d}{dx}5^x = 5^x \ln 5 \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{x^3}{5^x} = \frac{\frac{d}{dx}x^3 \cdot 5^x - x^3 \frac{d}{dx}5^x}{(5^x)^2} = \frac{3x^2 5^x - x^3 5^x \ln 5}{(5^x)^2} \\ &= \frac{3x^2 - x^3 \ln 5}{5^x} . \quad \text{終} \end{aligned}$$

問題 3.6.2 変数 x の関数 $y = \frac{\sin x}{3^x}$ を微分しなさい.

例題 変数 x の関数 $y = e^{2x-3}$ を微分する.

変数 t を $t = 2x - 3$ とおく. $y = e^{2x-3} = e^t$ なので,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}e^t = \frac{d}{dt}e^t \cdot \frac{dt}{dx} = e^t \cdot \frac{d}{dx}(2x - 3) = e^{2x-3} \cdot 2 \\ &= 2e^{2x-3} . \quad \text{終} \end{aligned}$$

問題 3.6.3 変数 u の関数 $v = e^{5-3u}$ を微分しなさい.

実数を指数とする冪関数の導関数は次のようになります。

定理 3.6.2 実数 p を指数とする冪関数 x^p の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1} \quad (x > 0) .$$

証明 変数 y を $y = x^p$ ($x > 0$) とおく. $\frac{d}{dx}x^p = \frac{dy}{dx}$ を求める. $y = x^p$ の自然対数をとると,

$$\ln y = \ln x^p = p \ln x .$$

この等式の両辺を x で微分する:

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx}(p \ln x) . \quad (2)$$

この等式 (2) の左辺は, 定理 3.5 より

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} ;$$

p は定数なので, 等式 (2) の右辺は,

$$\frac{d}{dx}(p \ln x) = p \frac{d}{dx} \ln x = p \frac{1}{x} ;$$

従って $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = p \frac{1}{x}$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = p \frac{y}{x} .$$

$y = x^p$ なので, $\frac{d}{dx}x^p = p \frac{x^p}{x} = px^{p-1}$. (証明終り)

冪関数の微分公式を並べてみます.

定理 3.1.1: 定数 n が正の整数であるとき $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$;

定理 3.4.3: 定数 n が整数であるとき $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ($x \neq 0$) ;

定理 3.6.2: 定数 p が実数であるとき $\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1}$ ($x > 0$) .

冪関数の指数の範囲が広がると独立変数 x の値の範囲は狭くなります.

例題 変数 x の関数 $\sqrt[3]{x^2}$ を微分する.

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x^2} = \frac{d}{dx}x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} . \quad \text{終}$$

問題 3.6.4 変数 x の関数 $\sqrt[5]{x^3}$ を微分しなさい.

例題 変数 x の関数 $\sqrt{\frac{5}{3x}}$ ($x > 0$) を微分する.

$$\sqrt{\frac{5}{3x}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{5}{3}} x^{-\frac{1}{2}} \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{5}{3x}} &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{5}{3}} x^{-\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{x} \sqrt{\frac{5}{12x}} . \quad \text{終} \end{aligned}$$

問題 3.6.5 変数 x の関数 $\sqrt{\frac{6}{5x}}$ ($x > 0$) を微分しなさい.

例題 変数 y の関数 $z = \sqrt{y^2 - 3y + 5}$ を微分する.

変数 t を $t = y^2 - 3y + 5$ とおく. $z = \sqrt{y^2 - 3y + 5} = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ なので, 定理 3.5 を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dy} &= \frac{d}{dy}t^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dy}(y^2 - 3y + 5) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(2y - 3) \\ &= \frac{2y - 3}{2\sqrt{y^2 - 3y + 5}} . \quad \text{終} \end{aligned}$$

問題 3.6.6 変数 y の関数 $z = \sqrt{3y^2 - 5y + 4}$ を微分しなさい.

例題 区間 $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sqrt{5x+1}^3$ と定める. 7 における f の微分係数を求める.

変数 t を $t = 5x + 1$ とおく. $f(x) = \sqrt{5x+1}^3 = \sqrt{t}^3 = t^{\frac{3}{2}}$ なので, f の導関数 f' は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(5x + 1) = \frac{3}{2}\sqrt{t} \cdot 5 \\ &= \frac{15}{2}\sqrt{5x+1} . \end{aligned}$$

7 における f の微分係数は

$$f'(7) = \frac{15}{2}\sqrt{5 \cdot 7 + 1} = \frac{15}{2}\sqrt{36} = \frac{15}{2} \cdot 6 = 45 . \quad \text{終}$$

問題 3.6.7 区間 $\left[\frac{5}{6}, \infty\right)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sqrt{6x-5}^3$ と定めます. 9 における g の微分係数を求めなさい.

最後に, 定理 3.1.3 を拡張します.

定理 3.6.3 関数 $\ln|x|$ ($x \neq 0$) の導関数は

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) .$$

証明 $x \neq 0$ なので, $x > 0$ または $x < 0$. $x > 0$ のときは, $|x| = x$ なので,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} .$$

$x < 0$ のときは, $y = -x$ とおくと, $|x| = -x = y$ なので, 定理 3.5 より

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{d}{dx}(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} .$$

故に, どちらのときも $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$. (証明終り)

例題 変数 y の関数 $z = \ln|y^3 + 2|$ を微分する.

変数 t を $t = y^3 + 2$ とおく. $z = \ln|y^3 + 2| = \ln|t|$ なので,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dy} &= \frac{d}{dy} \ln|t| = \frac{d}{dt} \ln|t| \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dy}(y^3 + 2) = \frac{1}{y^3 + 2} 3y^2 \\ &= \frac{3y^2}{y^3 + 2} . \quad \text{終} \end{aligned}$$

問題 3.6.8 変数 x の関数 $y = \ln|\cos x|$ を微分しなさい.