第3章の補遺2　対数微分法

関数 f, g は微分可能で $f(x)>0$ とします．関数 $f(x)^{g(x)}$ を微分します．そのために，$y=f(x)^{g(x)}$ とおいて，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}f(x)^{g(x)}$ を求めます． $y=f(x)^{g(x)}$ の自然対数をとると，

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)\ .$$

微分すると

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}\{g(x)\ln f(x)\}\ .$$

この等式の左辺は

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\ ;$$

右辺は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{g(x)\ln f(x)\} &= \frac{d}{dx}g(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\frac{d}{dx}\{\ln f(x)\}\\ &= g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)\\ &= g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\ ;\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\ ,\\ \frac{dy}{dx} &= y\left\{g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}\ .\end{aligned}$$

このようにして $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}f(x)^{g(x)}$ を求めることができます． このような微分法を対数微分法といいます．

例題　変数 x の関数 $x^{\sin x}$ を微分する．

〔解説〕 $y=x^{\sin x}$ とおく． 対数の性質より，

$$\ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x \ln x\ .$$

従って

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(\sin x\ln x)\ .$$

この等式の左辺は，合成関数の微分公式より，

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\ ,$$

右辺は

$$\frac{d}{dx}(\sin x\ln x) = \frac{d}{dx}\sin x\cdot\ln x + \sin x\frac{d}{dx}\ln x = \cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\ ;$$

従って，

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\ ,\\ \frac{dy}{dx} &= y\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)\ ,\end{aligned}$$

$y=x^{\sin x}$ なので

$$\frac{d}{dx}x^{\sin x} = x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)\ .$$

終

問題 3.補遺2.1　変数 x の関数 x^x を微分します． $y=x^x$ とおきます．対数の性質より，

$$\ln y = \ln x^x = x\ln x\ .$$

従って

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(x\ln x)\ .$$

この両辺を計算して $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．

問題 3.補遺2.2　以下の変数 x の関数を微分しなさい．

(1) $x^{\ln x}$.　(2) $x^{\frac{1}{x}}$.　(3) $(\sin x+2)^x$.