

§ 4.1 関数の極限

解析学では、0.0節で述べたように、正の無限大とよばれる $+\infty$ と負の無限大とよばれる $-\infty$ との2つの仮想的な数を用います。正の無限大 $+\infty$ はよく ∞ と略記されます。 ∞ と $-\infty$ とは実数ではありません。更に、

∞ 及び $-\infty$ に対する四則演算は全くできません。

大小関係については、 ∞ はどんな実数よりも大きく、 $-\infty$ はどんな実数よりも小さいと約束します。つまり、任意の実数 x に対して $-\infty < x < \infty$ です。

変数 x について、例えば

$$x = 54, \quad x = 645, \quad x = 7645, \quad x = 87564, \quad x = 986754, \quad \dots$$

のように、 x の値を限りなく大きくしていくことを $x \rightarrow \infty$ と書き表します。また、例えば

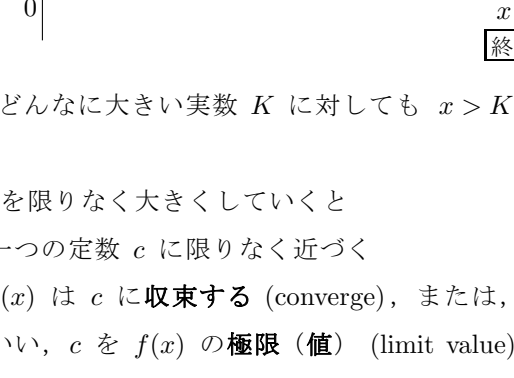
$$x = -54, \quad x = -645, \quad x = -7564, \quad x = -86745, \quad x = -978456, \quad \dots$$

のように、 $x < 0$ として x の絶対値 $|x|$ の値を限りなく大きくしていくことを $x \rightarrow -\infty$ と書き表します。

例解 変数 x の関数 $\frac{1}{x}$ ($x > 0$) について、 x の値を大きくしていくと、例えば次のようになります：

$$\frac{1}{10} = 0.1, \quad \frac{1}{100} = 0.01, \quad \frac{1}{1000} = 0.001, \quad \frac{1}{10000} = 0.0001, \quad \dots$$

変数 x の値を限りなく大きくしていくと $\frac{1}{x}$ の値は 0 に限りなく近づきます。このことを、 $x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{x}$ は 0 に収束するといひ、 $x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{x}$ が限りなく近づいていく定数 0 を $\frac{1}{x}$ の極限值といひます。



一般的に述べます。関数 f について、どんなに大きい実数 K に対しても $x > K$ となる f の定義域の実数 x があり、

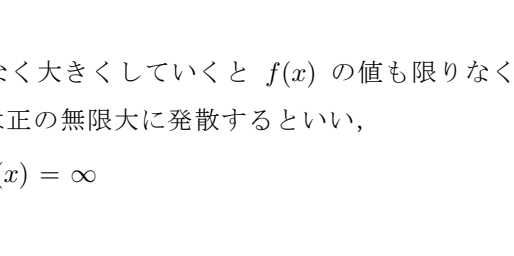
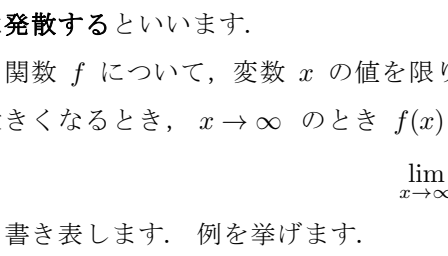
f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくとき f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づくと

とき、 x の値を限りなく大きくすると $f(x)$ は c に収束する (converge)、または、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといひ、 c を $f(x)$ の極限 (値) (limit value) といひます； $x \rightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ と書き表します：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c.$$

例を挙げます。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$



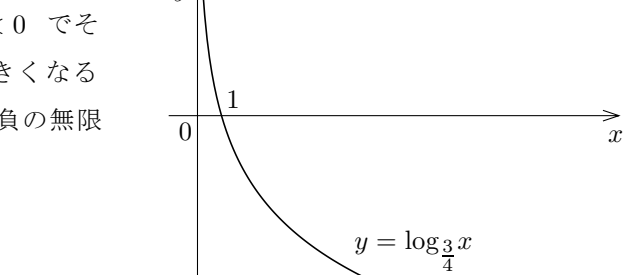
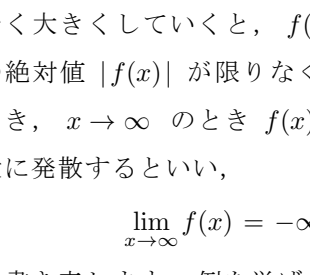
関数 f について、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ がどんな実数にも収束しないとき、 $f(x)$ は発散するといひます。

関数 f について、変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は正の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

と書き表します。例を挙げます。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 x = \infty.$$

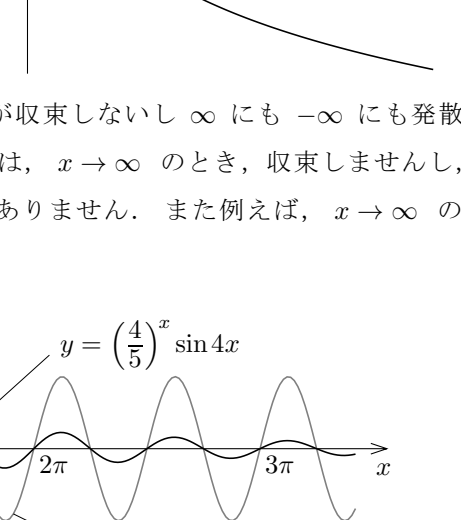


関数 f について、変数 x の値を限りなく大きくしていくと、 $f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は負の無限大に発散するといひ、

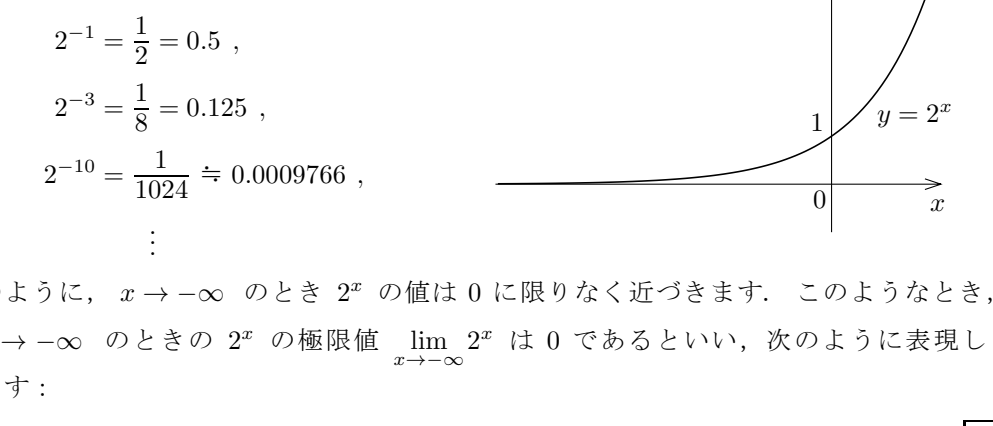
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

と書き表します。例を挙げます。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{3}{4}} x = -\infty.$$



関数 f について、 $x \rightarrow \infty$ のとき、 $f(x)$ が収束しない ∞ にも $-\infty$ にも発散しないこともあります。例えば、関数 $\sin 4x$ は、 $x \rightarrow \infty$ のとき、収束しませんし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin 4x = \infty$ でも $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin 4x = -\infty$ でもありません。また例えば、 $x \rightarrow \infty$ のとき、 $\left(\frac{4}{5}\right)^x \sin 4x$ は 0 に収束します。

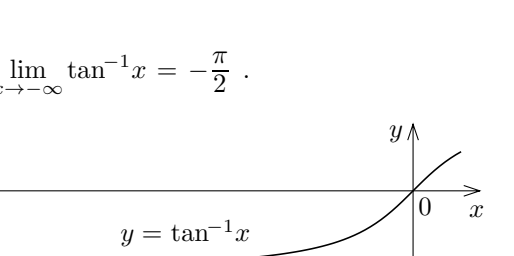


結局、関数の極限について次のように分類できます：

- 収束する = 限りなく唯一つの実数に近づく = 極限 (値) がある
- 収束しない = 発散する
 - ∞ に発散する
 - $-\infty$ に発散する
 - それ以外

例解 指数関数 2^x について、

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5, \\ 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0.125, \\ 2^{-10} = \frac{1}{1024} \doteq 0.0009766, \\ \vdots$$



のように、 $x \rightarrow -\infty$ のとき 2^x の値は 0 に限りなく近づきます。このようなとき、 $x \rightarrow -\infty$ のときの 2^x の極限値 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$ は 0 であるといひ、次のように表現します：

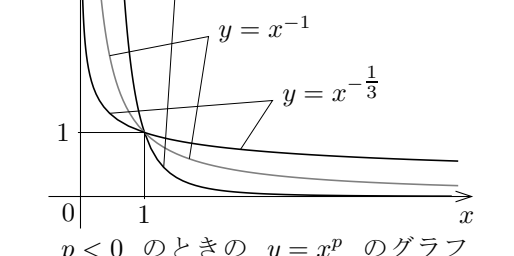
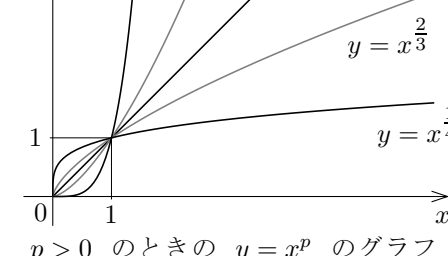
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0.$$

一般的に、関数 f について、どんな実数 K に対しても $x < K$ となる f の定義域の実数 x があり、 f の定義域の実数を表す変数 x について $x \rightarrow -\infty$ とすると f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づけば、 $x \rightarrow -\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといひ、 c を $f(x)$ の極限 (値) (limit value) といひます；この極限 (値) を $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ と書き表します：

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c.$$

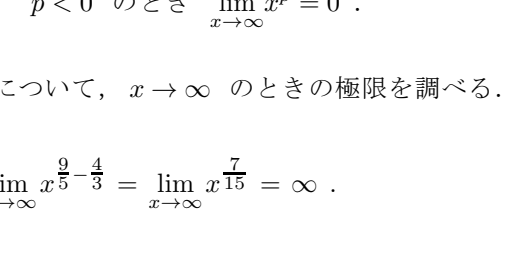
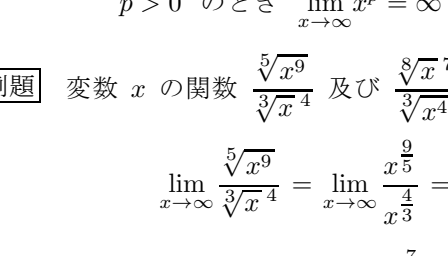
例を挙げます。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}.$$

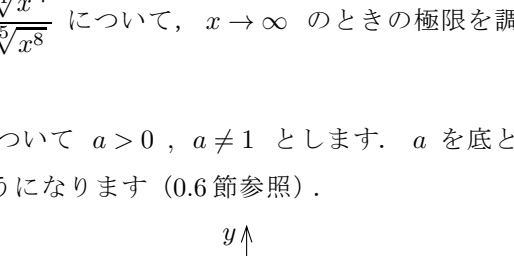
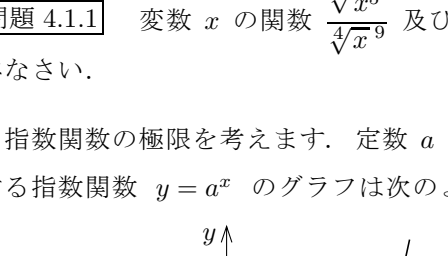


関数 f について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限と同様に、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ あるいは $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ となることもあります。例を挙げます。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$



冪関数の極限についてまとめます。定数 p について $p \neq 0$ とします。指数 p の冪関数 x^p ($x > 0$) のグラフは次のようになります (0.5節参照)。



これらのグラフから分かるように次の定理が成り立ちます (証明は省略します)。

定理 定数 p について $p \neq 0$ とする。 p を指数とする冪関数 x^p ($x > 0$) について、

$$p > 0 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow \infty} x^p = \infty, \quad p < 0 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow \infty} x^p = 0.$$

例題 変数 x の関数 $\frac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x^4}}$ 及び $\frac{\sqrt[8]{x^7}}{\sqrt[3]{x^4}}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる。

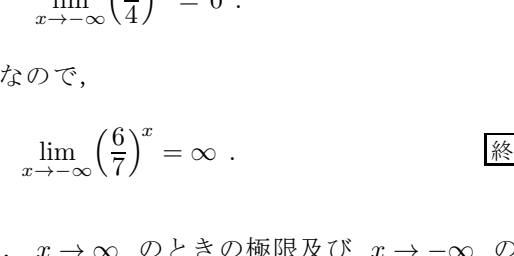
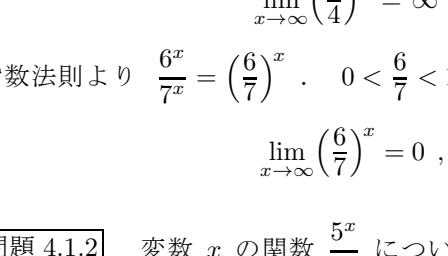
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{9}{5}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{9}{5} - \frac{4}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{7}{15}} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[8]{x^7}}{\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{7}{8}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{7}{8} - \frac{4}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\frac{11}{24}} = 0.$$

問題 4.1.1

変数 x の関数 $\frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x^9}}$ 及び $\frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[5]{x^8}}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べなさい。

指数関数の極限を考えます。定数 a について $a > 0$ 、 $a \neq 1$ とします。 a を底とする指数関数 $y = a^x$ のグラフは次のようになります (0.6節参照)。



これらグラフから分かるように次の定理が成り立ちます (証明は省略します)。

定理 定数 a について $a > 0$ 、 $a \neq 1$ とする。 a を底とする指数関数 a^x について、

$$a > 1 \text{ のとき, } \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0;$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき, } \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty.$$

例題 変数 x の関数 $\frac{5^x}{4^x}$ 及び $\frac{6^x}{7^x}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる。

指数法則より $\frac{5^x}{4^x} = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ 。 $\frac{5}{4} > 1$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^x = 0.$$

指数法則より $\frac{6^x}{7^x} = \left(\frac{6}{7}\right)^x$ 。 $0 < \frac{6}{7} < 1$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{7}\right)^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^x = \infty.$$

問題 4.1.2

変数 x の関数 $\frac{5^x}{6^x}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べなさい。

問題 4.1.3

変数 x の関数 $\frac{4^x}{3^x}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べなさい。

対数関数の極限を考えます。定数 a は実数で $a > 0$ 、 $a \neq 1$ とします。 a を底とする対数関数 $y = \log_a x$ ($x > 0$) のグラフは次のようになります (0.7節参照)。

これらグラフから分かるように次の定理が成り立ちます (証明は省略します)。

定理 定数 a について $a > 0$ 、 $a \neq 1$ とする。 a を底とする対数関数 $\log_a x$ ($x > 0$) について、

$$a > 1 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty, \quad 0 < a < 1 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty.$$