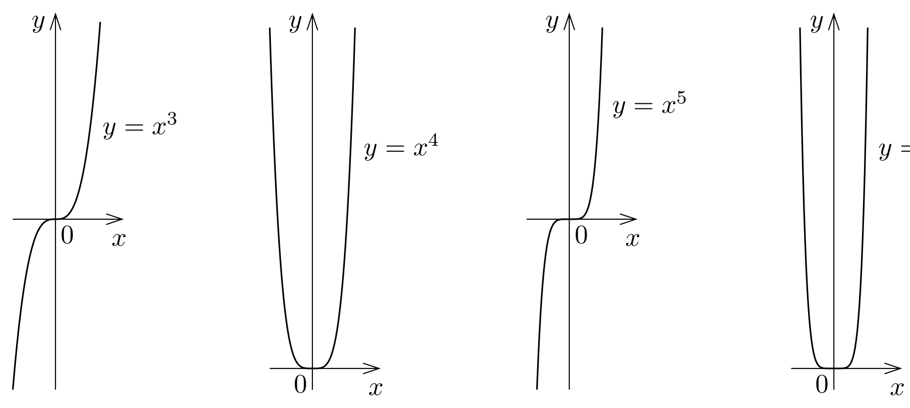
§ 4.3　代数的な関数の極限

定数 n は正の自然数とします．xy 座標平面において冪関数 $y=x^n$ のグラフは次のようになります．



これらのグラフから分かるように次の定理が成り立ちます（証明は省略します）．

定理　定数 n は正の自然数とする．n を指数とする冪関数 x^n について，

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty\ , \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & (n\ \text{が奇数のとき}) \\ \infty & (n\ \text{が偶数のとき}) \end{cases}\ .$$

この定理と定理 4.2.4 より，定数 k 及び正の自然数を表す定数 n について，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0\ , \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0\ .$$

$x\to\pm\infty$ のときの有理整関数 $f(x)$ の極限を求めるためには，$f(x)$ を表す整式において最高次の x の冪を括り出します．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x の関数 $3x^2-7x+4$ について，$x\to\infty$ のときの極限を調べる．

〔解説〕 x の 2 次式 $3x^2-7x+4$ において最高次の x の冪 x^2 を括り出す：

$$3x^2-7x+4 = x^2\left(\frac{3x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right) = x^2\left(3-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x}=0$ ，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}\right) = 3-\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2} = 3-0+0 = 3\ .$$

更に $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}(3x^2-7x+4) = \lim_{x\to\infty}\left\{x^2\left(3-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\right\} = \infty\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x の関数 $\dfrac{2x^3-3x^2-2x+4}{5}$ について，$x\to-\infty$ のときの極限を調べる．

〔解説〕 x の 3 次式 $\dfrac{2x^3-3x^2-2x+4}{5}$ において最高次の x の冪 x^3 を括り出す：

$$\frac{2x^3-3x^2-2x+4}{5} = \frac{x^3}{5}\left(\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{4}{x^3}\right) = \frac{x^3}{5}\left(2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)\ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$ ，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=0$ ，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^3}=0$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right) = 2-0-0+0 = 2\ ;$$

更に $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{5}=-\infty$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-3x^2-2x+4}{5} = \lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{x^3}{5}\left(2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)\right\} = -\infty\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 4.3.1}}$　変数 x の関数 $\dfrac{2x^2-4x+5}{3}$ について，$x\to\infty$ のときの極限を調べなさい．

$\boxed{\text{問題 4.3.2}}$　変数 x の関数 $\dfrac{3}{2}x^3-4x^2+5$ について，$x\to-\infty$ のときの極限を調べなさい．

次数が 1 以上である有理整関数 f について，$x\to\infty$ のとき及び $x\to-\infty$ のとき，$f(x)$ は ∞ か $-\infty$ かのどちらかに発散します．

整式 $P(x)$ と $Q(x)$ に対して，分数式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ で表される関数の $x\to\pm\infty$ のときの極限を求めるためには，分子 $P(x)$ も分母 $Q(x)$ も最高次の x の冪を括り出します．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x の関数 $\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2-7x-4}$ について，$x\to-\infty$ のときの極限を調べる．

〔解説〕 分子と分母とにおいて x^2 を括りだす：

$$\frac{2x^2-5x+3}{3x^2-7x-4} = \frac{x^2\left(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{3-\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}}\ .$$

従って

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-5x+3}{3x^2-7x-4} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{3-\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}} = \frac{2-0+0}{3-0-0} = \frac{2}{3}\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x の関数 $\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^3-7x^2-4x+2}$ について，$x\to\infty$ のときの極限を調べる．

〔解説〕 分子において x^2 を，分母において x^3 を括りだす：

$$\frac{2x^2-5x+3}{3x^3-7x^2-4x+2} = \frac{x^2\left(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(3-\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)} = \frac{1}{x}\cdot\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{3-\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}}\ .$$

$x\to\infty$ とする：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0\ , \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{3-\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = \frac{2-0+0}{3-0-0+0} = \frac{2}{3}\ .$$

従って

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+3}{3x^3-7x^2-4x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{3-\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}}\right) = 0\cdot\frac{2}{3} = 0\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x の関数 $\dfrac{2x^3-5x^2-4x+3}{3x^2-7x+2}$ について，$x\to\infty$ のときの極限を調べる．

〔解説〕 分子において x^3 を，分母において x^2 を括りだす：

$$\frac{2x^3-5x^2-4x+3}{3x^2-7x+2} = \frac{x^3\left(2-\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(3-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = x\cdot\frac{2-\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{3-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}}\ .$$

$x\to\infty$ とする：

$$\lim_{x\to\infty}x = \infty\ , \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{3-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{2-0-0+0}{3-0+0} = \frac{2}{3}\ .$$

従って

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2-4x+3}{3x^2-7x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{2-\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{3-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}}\right) = \infty\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 4.3.3}}$　変数 x の関数 $\dfrac{3x^2+2x-5}{2x^3-5x^2+3}$ について，$x\to-\infty$ のときの極限を調べなさい．

$\boxed{\text{問題 4.3.4}}$　変数 x の関数 $\dfrac{x^4-5x^2-7}{2x^2+3x-4}$ について，$x\to\infty$ のときの極限を調べなさい．

$\boxed{\text{問題 4.3.5}}$　変数 x の関数 $\dfrac{5-3x^2}{2x^2-4x+3}$ について，$x\to\infty$ のときの極限を調べなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{7x+5}}{3x+2}$ について，$x\to\infty$ のときの極限を調べる．

〔解説〕 $x\to\infty$ のときを考えるので，$x>0$ とする．

$$\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2} = \frac{\sqrt{x\left(7+\frac{5}{x}\right)}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}\cdot\frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}} = x^{-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}}\ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{-\frac{1}{2}}=0$ ，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(x^{-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}}\right) = 0\cdot\frac{\sqrt{7}}{3} = 0\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 4.3.6}}$　変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{8x+7}}{5x+3}$ について，$x\to\infty$ のときの極限を調べなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{5x^2-4x+7}}{2x+3}$ について，$x\to\infty$ のときの極限を調べる．

〔解説〕 $x\to\infty$ のときを考えるので，$x>0$ とする．$\sqrt{x^2}=x$ ．

$$\frac{\sqrt{5x^2-4x+7}}{2x+3} = \frac{\sqrt{x^2\left(5-\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{5-\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \frac{x\sqrt{5-\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{5-\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}\ .$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5x^2-4x+7}}{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5-\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 4.3.7}}$　変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{9x^2-7x+8}}{4x+5}$ について，$x\to\infty$ のときの極限を調べなさい．