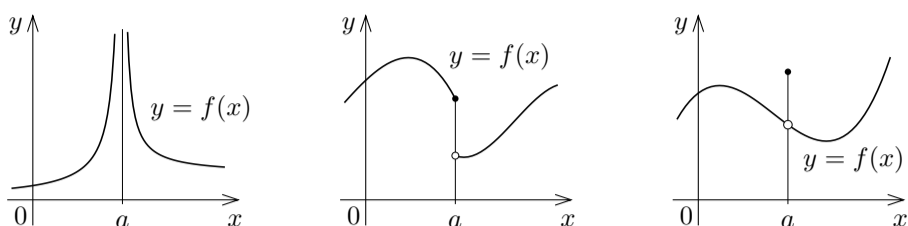


§4.5 関数の連続性

1.2節で述べましたが、関数 f の定義域の実数 a について、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ となるとき、 a において f は**連続**であるといいます。詳しくいうと、 a において f が連続であるとは次の3条件が成り立つことです：

- (1) a が f の定義域に属して（つまり a に対する f の値 $f(a)$ があって）、
- (2) $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が収束して（つまり極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ があって）、更に
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ となる。

実数 a において関数 f が連続でない状況は、関数のグラフで表現すると、例えば以下のような状況があります。



関数 f が実数 a において連続でない事例

関数 f が連続であるというのは、 f の定義域に属すどの実数においても f が連続であるということでした。2.2節で述べたように、冪関数、指数関数、対数関数、三角関数、逆三角関数は総て連続です¹⁾。

例題 実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-7)}{2x-14} & (x \neq 7 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2} & (x = 7 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる。

【方針】 関数 f が 7 において連続であるとは、 $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = f(7)$ となることである。

この等式が成り立つかどうか調べる。極限値の公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いる。

【解答】 $y = x - 7$ とおく。 $2x - 14 = 2y$ 。 $x \neq 7$ のとき、

$$f(x) = \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2} \frac{\sin y}{y}$$

$x \rightarrow 7$ のとき $y = x - 7 \rightarrow 0$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \frac{\sin y}{y} \right) = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

また、 $x = 7$ のとき $f(x) = \frac{1}{2}$ なので $f(7) = \frac{1}{2}$ 。 $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = f(7)$ なので、関数 f は 7 において連続である。 終

問題 4.5.1 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定めます：

$$g(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-3} \sin(2x-6) & (x \neq 3 \text{ のとき}) \\ 5 & (x = 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この関数 g は 3 において連続であるかどうか調べなさい。

例題 区間 $(-1, \infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2e & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる。

【方針】 関数 φ が 0 において連続であるとは、 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi(0)$ となることである。

この等式が成り立つかどうか調べる。自然対数の底 e の定義 $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ を用いる。

【解答】 $x \neq 0$ のとき、

$$\varphi(x) = (1+x)^{\frac{2}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x} \cdot 2} = \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2 = \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2 = e^2$$

また、 $x = 0$ のとき $\varphi(x) = 2e$ なので、 $\varphi(0) = 2e$ 。従って $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) \neq \varphi(0)$ 。故に関数 φ は 0 において連続でない。 終

問題 4.5.2 区間 $(-1, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を次のように定めます：

$$\psi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{3}{x}} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ e^3 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この関数 ψ は 0 において連続であるかどうか調べなさい。

連続な2つの関数の和・差・積などはやはり連続になります。

定理 4.5.1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは実数 a において連続であるとする。このとき、関数 $f(x) + g(x)$ 、 $f(x) - g(x)$ 、 $f(x)g(x)$ も実数 a において連続である。更に、 $g(a) \neq 0$ ならば、関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ も実数 a において連続である。

証明 例として、関数 $f(x)g(x)$ が実数 a において連続であることを示す。関数 $f(x)$ 、 $g(x)$ は実数 a において連続なので、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

従って定理 1.3.1 より

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} = f(a)g(a)$$

つまり関数 $f(x)g(x)$ は実数 a において連続である。 (証明終り)

更に、連続関数と連続関数との合成関数はやはり連続です。

定理 4.5.2 関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(x)$ の定義域に含まれるとする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが連続であるならば、 $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ も連続である。

区間 I が関数 f の定義域に含まれるとき、 I において f が連続であるとは、区間 I の各実数において f が連続であることです。

¹⁾ 例えば冪関数 x^{-1} つまり $\frac{1}{x}$ は 0 において連続ではありません。しかし 0 は定義域に属しません。関数が連続であるということは、定義域に属す各実数において連続であることなので、関数 $\frac{1}{x}$ は連続です。