

§4.8 級数

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の項 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ を順に + でつないだ形の式

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

を(無限)級数(series)といいます; 正確には次のように書き表します:

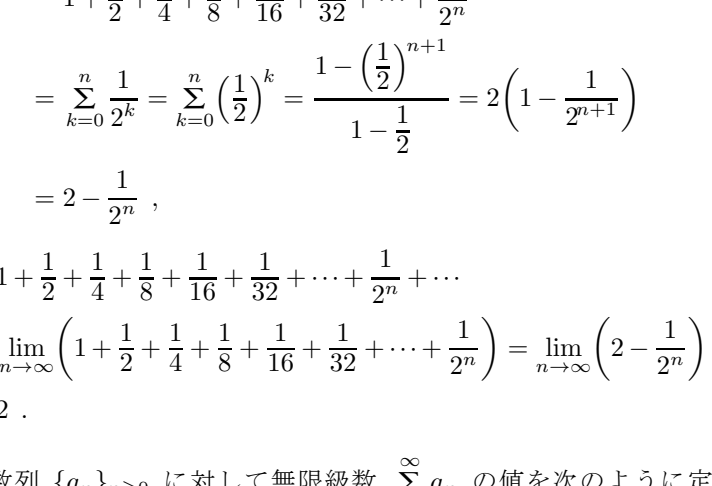
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

この(無限)級数では、無限個の項 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ の値を合計したい訳です。しかし、無限個の値を合計することは実際にはできません。

例解 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ つまり

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

を考えます。次のように、面積が $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$ の長方形をくっつけていきます。



このように長方形をくっつけてできる図形の面積は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

となります。このように無限個の値を合計することはできません。しかし、このような長方形を限りなくくっつけていくと、面積が2の長方形に限りなく近づいていきます。このことから次のように考えられます:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 2.$$

このことは次のような計算で裏付けられます:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

一般的に、数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ に対して無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値を次のように定義します:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n + \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \end{aligned}$$

この極限値を**級数の和**といいます。

定義 自然数 m に対する値から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq m}$ に対して、数列 $\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ は収束するといひ、数列 $\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$ の極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$ を級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ の値とする:

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k.$$

この極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$ を級数の和という。また、数列 $\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$ が発散するとき、級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ は発散するといひ。

つまり、例えば数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ に対して、極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$ があるときに限り級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値があつて

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k;$$

極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$ がないときは級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値もありません。

例題 級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1}\right)$ の和を調べる。

方針 級数の和の定義より $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1}\right)$ 。まず総和 $\sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1}\right)$ を計算する。

解答

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1}\right) &= \frac{5}{2} - \frac{5}{3} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4} + \dots + \frac{5}{n-1} - \frac{5}{n} + \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{5}{n+1}. \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0$ なので、

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{n+1}\right) = \frac{5}{2}.$$

問題 4.8.1

級数 $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{6}{n} - \frac{6}{n+1}\right)$ の和を調べなさい。

実数の定数 a, r 及び自然数の定数 m に対して、等比数列 $\{ar^n\}_{n \geq 0}$ からできる級数 $\sum_{n=m}^{\infty} (ar^n)$ を等比級数といいます。

例題 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べる。

方針 級数の和の定義より $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ 。まず総和 $\sum_{k=1}^n \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算する。

解答 $S_n = \sum_{k=1}^n \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ とおく。

$$\begin{aligned} S_n &= 4 \cdot \frac{3}{5} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \dots + 4\left(\frac{3}{5}\right)^n, \\ \frac{3}{5}S_n &= 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \dots + 4\left(\frac{3}{5}\right)^n + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}; \end{aligned}$$

この2つの等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$\frac{2}{5}S_n = 4 \cdot \frac{3}{5} - 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1},$$

よつて $S_n = 6 - 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$ つまり $\sum_{k=1}^n \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\} = 6 - 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$ 。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = 0$ なので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{6 - 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right\} = 6 - 10 \cdot 0 = 6.$$

問題 4.8.2

等比級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ の和を調べなさい。

例題 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$ の和を調べる。

方針 級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ 。まず総和 $\sum_{k=0}^n \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ を計算する。

解答 等比数列の項の和の公式より

$$\sum_{k=0}^n \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\} = 3 \sum_{k=0}^n \left(\frac{5}{7}\right)^k = 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{7}} = \frac{21}{2} \left\{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right\}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} = 0$ なので、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{21}{2} \left\{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right\}\right] = \frac{21}{2}(1-0) = \frac{21}{2}.$$

問題 4.8.3

等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べなさい。

級数について次の定理が成り立ちます。

定理 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

証明 数列 $\{S_n\}_{n \geq 0}$ を $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ と定める。 $n \geq 1$ である自然数 n に対して、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n, \\ S_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}; \end{aligned}$$

よつて

$$S_n - S_{n-1} = a_n.$$

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するので、その和を S とおく。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S;$$

従つて更に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right) - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}\right) = S - S = 0.$$

(証明終り)

つまり、数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について次のようになります:

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束する ならば 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は 0 に収束する。

この対偶をとると次のことが分かります:

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が 0 に収束しない ならば 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない。

従つて、数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が発散するとき、及び、数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が収束しても $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ のとき、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない、こととなります。

定理 4.8.1

(1) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が発散するならば、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する。

(2) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ならば、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する。

この定理より、数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ならば、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散します。しかし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であつても級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散することがあります(後で例を挙げます); $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であるからといつて級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとは限りません。

例題 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$ の和を調べる。

公比 $\frac{6}{5}$ の等比数列 $\left\{\left(\frac{6}{5}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ は発散するので、定理 4.8 の (1) より、等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$ は発散する。

問題 4.8.4

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{6}\right)^n$ の和を調べなさい。

例題 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right)$ の和を調べる。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0$ なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right) = 5 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 5 - 0 = 5.$$

よつて $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right) \neq 0$ なので、定理 4.8 の (2) より、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right)$ は発散する。

問題 4.8.5

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{n^2+3} - 7\right)$ の和を調べなさい。

例題 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ の和を調べる。

まず $\sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$ を計算する。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k} &= \sum_{k=0}^n \left\{5\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\} = 5 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k = 5 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 5 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{15}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n+1}} = 0$ なので、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\frac{15}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)\right\} = \frac{15}{2}.$$

問題 4.8.6

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n}$ の和を調べなさい。

等比級数について次の定理が成り立ちます。

定理 4.8.2 最初の項が a で公比が r である無限等比数列に対する級数は、 $|r| < 1$ のとき収束して

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \frac{a}{1-r},$$

$|r| \geq 1$ かつ $a \neq 0$ のとき発散する。

証明

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (ar^k).$$

$|r| < 1$ のとき: 定理 1.5.2 より

$$\sum_{k=0}^n (ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r},$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$ なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (ar^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{a(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1})}{1-r} = \frac{a}{1-r},$$

よつて

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (ar^k) = \frac{a}{1-r}.$$

$a \neq 0$ とする。 $r = 1$ のとき:

$$\sum_{k=0}^n (ar^k) = \sum_{k=0}^n a = a(n+1),$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき発散する; 従つて級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (ar^n)$ は発散する。 $r > 1$ または $r \leq -1$ のとき: 定理 1.5.2 より

$$\sum_{k=0}^n (ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1};$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、 r^{n+1} は発散するので $\frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}$ も発散する; 従つて級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (ar^n)$ は発散する。(証明終り)

例題 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{2\left(\frac{3}{7}\right)^n\right\}$ の和を調べる。

公比 $\frac{3}{7}$ について $\left|\frac{3}{7}\right| < 1$ なのでこの級数は収束する。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{2\left(\frac{3}{7}\right)^n\right\} &= \frac{6}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{6}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \frac{6}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \frac{6}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^4 + \dots = \frac{\frac{6}{7}}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{6}{4} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

問題 4.8.7

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べなさい。

級数について次の定理が成り立ちます。

定理 定数 c 及び数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ と $\{b_n\}_{n \geq 0}$ とがあるとする。級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n)$ も収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ とが収束するならば、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ も収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad (\text{複号同順}).$$

証明 定理 1.2.1 より $\sum_{k=0}^n (ca_k) = c \sum_{k=0}^n a_k$ なので、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば、

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (ca_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c \sum_{k=0}^n a_k\right) = c \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

定理 1.2.2 より $\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k$ なので、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ とが収束するならば、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n b_k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n. \end{aligned}$$

(証明終り)

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であつても級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散する例

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について次のことが成り立ちました:

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束する ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

しかしこの逆はいつも成り立つとは限りません。つまり、数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であつても級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散することがあります。

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を次のように定めます: 自然数 n に対して、

$$a_n = \ln(n+1) - \ln n.$$

まずこの数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の極限がどうなるか調べます。対数の性質より

$$a_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0.$$

次にこの数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ からできる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散を調べます。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \{\ln(k+1) - \ln k\} \\ &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + (\ln 5 - \ln 4) + \dots \\ &\quad \dots + \{\ln n - \ln(n-1)\} + \{\ln(n+1) - \ln n\} \\ &= -\ln 1 + \ln(n+$$