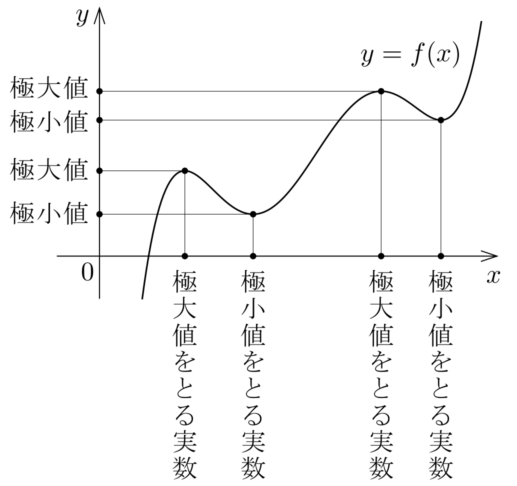
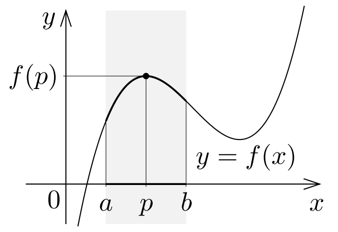
## §5.1　関数の極値

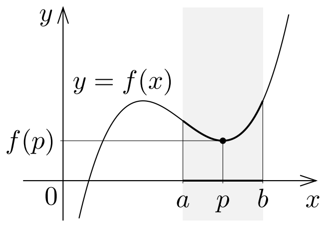
実数 $p$ のすぐ近くの各実数は関数 $f$ の定義域に属すものとします． $f$ が $p$ において**極大値**をとるというのは， $p$ のすぐ近くだけをみると $f$ の値が $p$ で最大になることです． また， $f$ が $p$ において**極小値**をとるというのは， $p$ のすぐ近くだけをみると $f$ の値が $p$ で最小になることです． 座標平面における $f$ のグラフでいうと右図のようになります．




正確な定義を述べます． 関数 $f$ 及び実数 $p$ について， $f$ が $p$ において極大値をとるとは次の条件が成り立つことです： $a<p<b$ となるある実数 $a,b$ を選ぶと， $a<x<b$ となる各実数 $x$ について $f(p) \geq f(x)$ ． また， $f$ が $p$ において極小値をとるとは次の条件が成り立つことです： $a<p<b$ となるある実数 $a,b$ を選ぶと， $a<x<b$ となる各実数 $x$ について $f(p) \leq f(x)$ ．




$f$ が $p$ において極大値をとる．網掛けの部分だけを考えると $f$ は $p$ において最大値をとる．

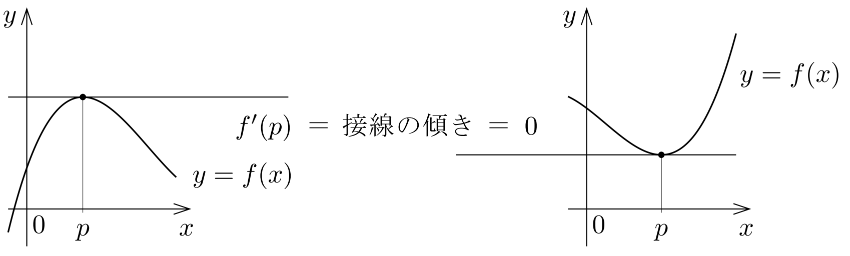



$f$ が $p$ において極小値をとる．網掛けの部分だけを考えると $f$ は $p$ において最小値をとる．

極大値と極小値を併せて**極値**といいます．

関数の最大値・最小値はあるとしても1つだけでした． 関数の極大値・極小値は，数多くあることがありますし，1つもないこともあります．

関数 $f$ が実数 $p$ において微分可能であるとき，微分係数 $f'(p)$ は $f$ のグラフの点 $\big(p, f(p)\big)$ における接線の傾きでした（2.6節参照）． 関数のグラフにおいて，関数が極値をとるところで，接線は“水平”になる，つまり接線の傾きは 0 になります．




関数 $f$ が実数 $p$ において極値をとるときのグラフの状態

このことから次の定理が分かります． その証明は省略します．

**定理 5.1**　関数 $f$ が実数 $p$ において微分可能であるとき， $f$ が $p$ において極値をとるならば $f'(p)=0$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　実数全体を定義域とする関数 $f$ を $f(x)=x^3-3x^2-9x+20$ と定める． この関数 $f$ には異なる2つの極値がある． その2つの極値を求める．

〔解説〕 $f(x)=x^3-3x^2-9x+20$ より $f'(x)=3x^2-6x-9$ ． 実数 $p$ において $f$ が極値をとるとすると， $f'(p)=0$ なので， $3p^2-6p-9=0$ ， $3(p+1)(p-3)=0$ ，よって $p=3,-1$ ． 関数 $f$ には異なる2つの極値があるので， $f$ は 3 と $-1$ とにおいて極値をとる． $f(-1)=25$ ， $f(3)=-7$ なので，関数 $f$ の極値は 25 と $-7$ との2つである． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.1}}$　実数全体を定義域とする関数 $f$ を $f(x)=x^3-2x^2-4x$ と定めます． この関数 $f$ には異なる2つの極値があります． その2つの極値を求めなさい．