§5.3　関数の単調増加単調減少

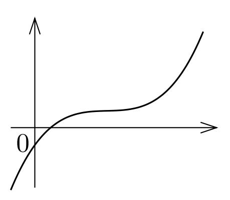
関数 f の定義域が区間 I を含むとします． I において f が**単調増加** (monotone increasing) であるとは次のことです：

I の任意の実数 u と v とについて　$u<v$ ならば $f(u)<f(v)$ ．

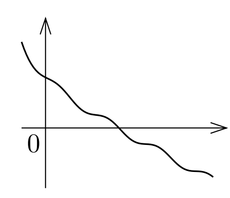
I において f が**単調減少** (monotone decreasing) であるとは次のことです：

I の任意の実数 u と v とについて　$u<v$ ならば $f(u)>f(v)$ ．

感覚的にいうと，関数 f が単調増加である範囲では f のグラフは右上がりになり，f が単調減少である範囲では f のグラフは右下がりになります．

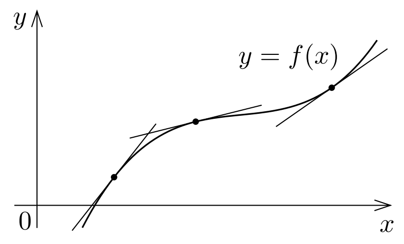


単調増加である関数のグラフの例



単調減少である関数のグラフの例

微分可能な関数 f について， $f'(x)>0$ のとき，f のグラフの接線は，傾きが正なので，右上がりの直線です；このとき，右図のように，関数 f のグラフも右上がりになる，つまり f は単調増加になるように思えます． 実際に次の定理が成り立ちます．



定理　区間 I で関数 f が微分可能であるとき，I の各実数 x について $f'(x)>0$ ならば，I において f は単調増加である．

証明　区間 I で関数 f が微分可能であり，I の各実数 x について $f'(x)>0$ とする．

区間 I の実数 u, v について $u<v$ とする． f は，区間 I で微分可能なので，区間 $[u,v]$ で微分可能である． 平均値の定理より，次のような実数 w がある：

$$f(v)-f(u)=f'(w)(v-u)\ ,\qquad u<w<v\ .$$

u, v は区間 I に属しかつ $u<w<v$ なので， w は区間 I に属す[3]；従って $f'(w)>0$ ． 更に $u<v$ より $v-u>0$ なので，

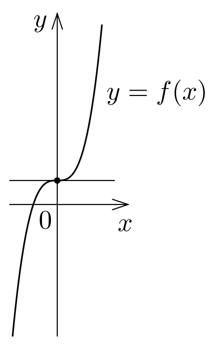
$$f(v)-f(u)=f'(w)(v-u)>0\ ,$$

従って $f(u)<f(v)$ ．

こうして次のことが示された：区間 I の任意の各実数 u, v について， $u<v$ ならば $f(u)<f(v)$ ． つまり I において f は単調増加である．　（証明終り）

例として実数全体を定義域とする関数 $f(x)=x^3+1$ を考えます． $f'(x)=3x^2$ ですから $f'(0)=0$ ですが，右のグラフから分かるように， f は実数全体で単調増加です．

このように，区間 I で微分可能な関数 f について，I の中に一つや二つ $f'(p)=0$ となる実数 p があっても，それ以外の各実数 x で $f'(x)>0$ ならば，f は I において単調増加です．



定理 5.3.1　区間 I で関数 f が微分可能であるとする．
(1)　I の有限個の実数を除く各実数 x について $f'(x)>0$ ならば，I において f は単調増加である．
(2)　I の有限個の実数を除く各実数 x について $f'(x)<0$ ならば，I において f は単調減少である．

実数 p において微分可能な関数 f について，上述の例のように， $f'(p)=0$ であっても f が p において極値をとらないこともあります． ですから，

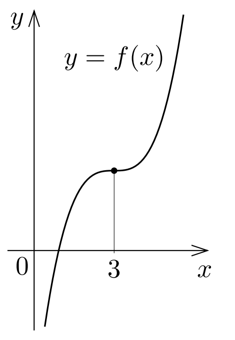
f が p において極値をとるならば　$f'(p)=0$

です（定理 5.1）が，その逆は必ずしも成り立ちません．

例題　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x-6$ と定める． 関数 f の値の増減の様子を調べる．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x-6\Big)=x^2-6x+9$$
$$=(x-3)^2\ .$$

$f'(x)=0$ とすると， $(x-3)^2=0$ なので $x=3$ ．
$x\neq 3$ のとき，$x-3\neq 0$ なので $f'(x)=(x-3)^2>0$ [4]．
従って定理 5.3.1 より，関数 f は実数全体において単調増加である．　終



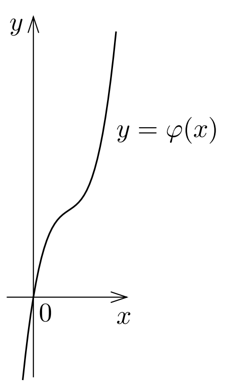
問題 5.3.1　実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=3x^3-6x^2+4x-5$ と定めます． 関数 g の値の増減の様子を調べなさい．

例題　実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^3-4x^2+6x$ と定める． 関数 φ の値の増減の様子を調べる．

〔方針〕 導関数 $\varphi'(x)$ は x の 2 次式で表される． 2 次方程式 $\varphi'(x)=0$ の解が実数でないときは，$\varphi'(x)$ を表す 2 次式を平方完成する．

〔解答〕

$$\varphi'(x)=\frac{d}{dx}(x^3-4x^2+5x)=3x^2-8x+6$$
$$=3\Big(x^2-\frac{8}{3}x\Big)+5$$
$$=3\Big\{x^2-\frac{8}{3}x+\Big(\frac{4}{3}\Big)^2-\frac{16}{9}\Big\}+6$$
$$=3\Big\{x^2-\frac{8}{3}x+\Big(\frac{4}{3}\Big)^2\Big\}-\frac{16}{3}+6$$
$$=3\Big(x-\frac{4}{3}\Big)^2+\frac{2}{3}\ .$$



任意の実数 x について， $\Big(x-\frac{4}{3}\Big)^2\geq 0$ なので $\varphi'(x)=3\Big(x-\frac{4}{3}\Big)^2+\frac{2}{3}\geq\frac{2}{3}>0$ ． 故に φ は実数全体において単調増加である．　終

問題 5.3.2　実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=-x^3+2x^2-2x+1$ と定めます． 関数 ψ の値の増減の様子を調べなさい．

関数 f の定義域が区間 I を含むとします． f が I において**広義の単調増加**であるとは次のことです：

I の任意の実数 p と q とについて　$p\leq q$ ならば $f(p)\leq f(q)$ ．

f が I において**広義の単調減少**であるとは次のことです：

I の任意の実数 p と q とについて　$p\leq q$ ならば $f(p)\geq f(q)$ ．

区間において関数は単調増加であれば広義の単調増加です． 単調増加より広義の単調増加の方が条件が緩くなります． 例えば定数関数は広義の単調増加ですが単調増加ではありません． 同様に単調減少より広義の単調減少の方が条件が緩くなります．

証明は省きますが次の定理が成り立ちます．

定理 5.3.2　区間 I で関数 f が微分可能であるとする．
I において f が広義の単調増加である $\iff$ I の各実数 x について $f'(x)\geq 0$ ；
I において f が広義の単調減少である $\iff$ I の各実数 x について $f'(x)\leq 0$ ．

---

[3] 実数の集合 I が区間であることは次のことでした：各実数 x, y, z について，x, y が I に属し $x<z<y$ ならば z も I に属す．
[4] 任意の実数 x について， $x\neq 0$ ならば $x^2>0$ ．