

§5.5 関数の最大値・最小値

関数 f の値の範囲 (値域) の中で、最も大きい実数のことを f の**最大値** (maximum value) といい、最も小さい実数のことを f の**最小値** (minimum value) と言いました。

正確な定義を述べます。関数 f の定義域に属す実数 p について、 f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことです：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x).$$

また、 f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことです：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x).$$

関数の最大値・最小値は、各々、あるとしても唯一つだけです。最大値・最小値は無いこともあります。

例題 区間 $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x - \ln(4x - 3)$ ($x > \frac{3}{4}$) と定める。関数 f の最大値・最小値を調べる。

【解答】 区間 $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ の各実数 x について、

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\{2x - \ln(4x - 3)\} = 2 - \frac{4}{4x - 3} = \frac{8x - 10}{4x - 3}.$$

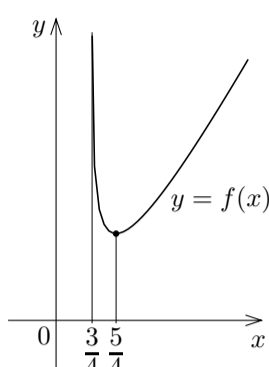
$$f'(x) = 0 \text{ とすると, } \frac{8x - 10}{4x - 3} = 0 \text{ なので } 8x - 10 = 0,$$

$$\text{よって } x = \frac{5}{4}. \quad x > \frac{3}{4} \text{ より } 4x - 3 > 0. \quad \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$$

$$\text{のとき, } 4x - 5 < 0 \text{ なので } f'(x) = \frac{8x - 10}{4x - 3} < 0;$$

$$x > \frac{5}{4} \text{ のとき, } 4x - 5 > 0 \text{ なので } f'(x) = \frac{8x - 10}{4x - 3} > 0.$$

従って、関数 f は、区間 $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ において単調減少であり、区間 $\left[\frac{5}{4}, \infty\right)$ において単調増加である。 $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2} - \ln 2$ なので、関数 f は $\frac{5}{4}$ において最小値 $\frac{5}{2} - \ln 2$ をとる；最大値はとらない。 終



問題 5.5.1 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 6 \tan^{-1} x - \ln(x^2 + 1)$ と定めます。 g の最大値・最小値を調べなさい。

例題 区間 $[-1, 4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ($-1 \leq x \leq 4$) と定める。関数 φ の最大値・最小値を調べる。

【解説】 区間 $[-1, 4]$ の各実数 x について

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3).$$

実数 p について $\varphi'(p) = 0$ とすると、 $3(p - 1)(p - 3) = 0$

なので、 $p = 1, 3$ 。 φ が p において最大値あるいは最小値

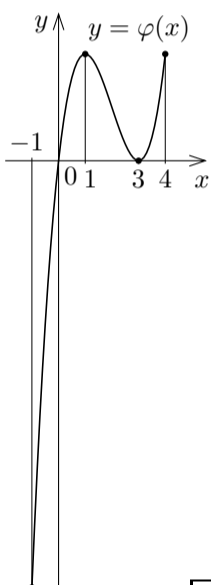
をとるならば、 $\varphi'(p) = 0$ または $p = -1$ または $p = 4$ な

ので、 $p = -1, 1, 3, 4$ 。更に、 $\varphi(-1) = -16$ 、 $\varphi(1) = 4$ 、

$\varphi(3) = 0$ 、 $\varphi(4) = 4$ 。増減表は次のようになる。

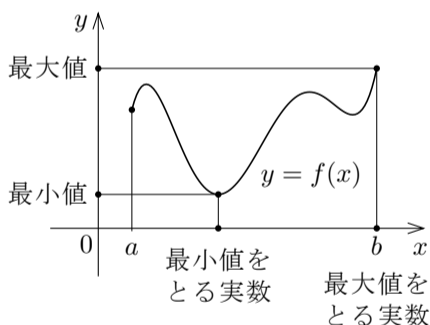
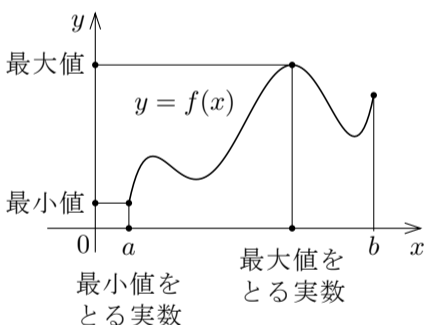
x	-1	...	1	...	3	...	4
$x - 1$	-	-	0	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	0	+	+
$\varphi'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$	+	+	0	-	0	+	+
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16	↗	4	↘	0	↗	4

関数 φ は、1 と 4 とにおいて最大値 4 をとり、-1 において最小値 -16 をとる。 終



問題 5.5.2 区間 $[2, 7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ ($2 \leq x \leq 7$) と定めます。 ψ の最大値・最小値を調べなさい。

実数 a, b について $a < b$ とします。区間 $[a, b]$ を定義域とする関数 f は $[a, b]$ において微分可能であるとし、座標平面の f のグラフにおいて、最大値・最小値は例えば次の図のようになります。



次のことが成り立ちます： f の定義域 $[a, b]$ の実数 p について、

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば、

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである。

f が p において極値をとるとき $f'(p) = 0$ です (定理 5.1) から、

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば、

$$f'(p) = 0 \text{ または } p = a \text{ または } p = b.$$

従って、 $f'(p) = 0$ となる p に対する $f(p)$ と $f(a)$ と $f(b)$ との中で、最大の実数が f の最大値で、最小の実数が f の最小値です。

例題 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin x - \left(x - \frac{3}{4}\right) \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と定める。関数 g の最大値・最小値を調べる。

【解説】 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sin x - \left(x - \frac{3}{4}\right) \cos x\right\} = \left(x - \frac{3}{4}\right) \sin x.$$

$$g'(x) = 0 \text{ とする: } \left(x - \frac{3}{4}\right) \sin x = 0 \text{ より } x - \frac{3}{4} = 0 \text{ または } \sin x = 0; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

なので、 $x = \frac{3}{4}$ または $x = 0$ 。従って、関数 g が実数 p において最大値または最小値をとるならば $p = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{3}{4}, \frac{\pi}{2}$ 。

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad g(0) = \frac{3}{4}, \quad g\left(\frac{3}{4}\right) = \sin \frac{3}{4}, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$ は単調増加なので、 $0 < \frac{3}{4} < \frac{\pi}{2}$ より

$$\sin 0 < \sin \frac{3}{4} < \sin \frac{\pi}{2} \quad \text{つまり} \quad 0 < \sin \frac{3}{4} < 1. \quad \text{よって、}$$

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{3}{4}\right) < g\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

故に、関数 g は、 $\frac{\pi}{2}$ において最大値 1 をとり、 $-\frac{\pi}{2}$ において最小値 -1 をとる。 終

問題 5.5.3 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right) \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と定めます。関数 g の最大値・最小値を調べなさい。