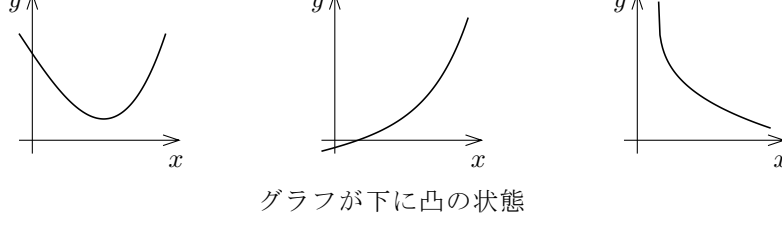


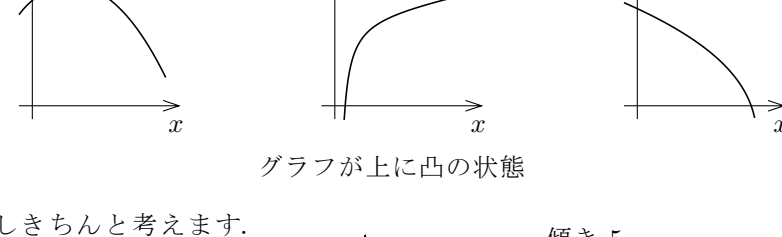
§5.8 関数のグラフの凹凸

まず直観的な話から始めます. xy 座標平面における関数 $y = f(x)$ のグラフについて, 次の図のように, 下側に出張しているとき, 言い替えると, 下方に膨らんでいるとき, $y = f(x)$ のグラフは下に凸であるといえます.



グラフが下に凸の状態

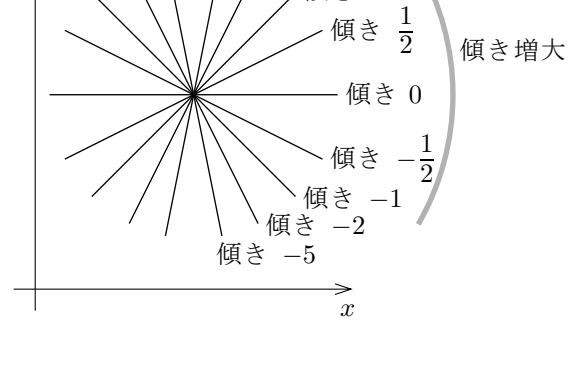
また, xy 座標平面における関数 $y = f(x)$ のグラフについて, 次の図のように, 上側に出張しているとき, 言い替えると, 上方に膨らんでいるとき, $y = f(x)$ のグラフは上に凸であるといえます.



グラフが上に凸の状態

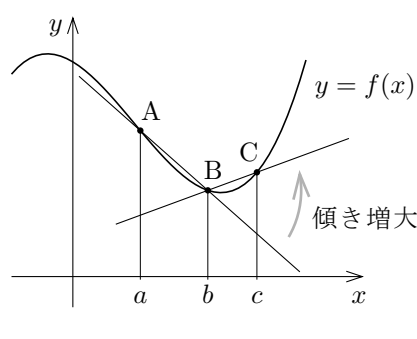
もう少しきちんと考えます.

まず次のことを注意して下さい: 座標平面における直線について, 傾きが大きいほど右上がりになり, 傾きが小さいほど右下がりになる (右図参照).



区間 I が関数 f の定義に含まれているとします. 関数 f のグラフが区間 I において下に凸であるとは次のことを意味します: $a < b < c$ となる I の点 a, b, c に対して, 座標平面における関数 f のグラフに属す3点

$$\begin{aligned} A &= (a, f(a)), \\ B &= (b, f(b)), \\ C &= (c, f(c)) \end{aligned}$$



をとると, 右図のように, 直線 BC の傾きは直線 AB の傾き以上である. ここで, 点 $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$ に対して直線 AB の傾きは $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ で, 点 $B = (b, f(b))$, $C = (c, f(c))$ に対して直線 BC の傾きは $\frac{f(c) - f(b)}{c - b}$ です. よって, 直線 BC の傾きは直線 AB の傾き以上であるということは次の不等式で表せます:

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

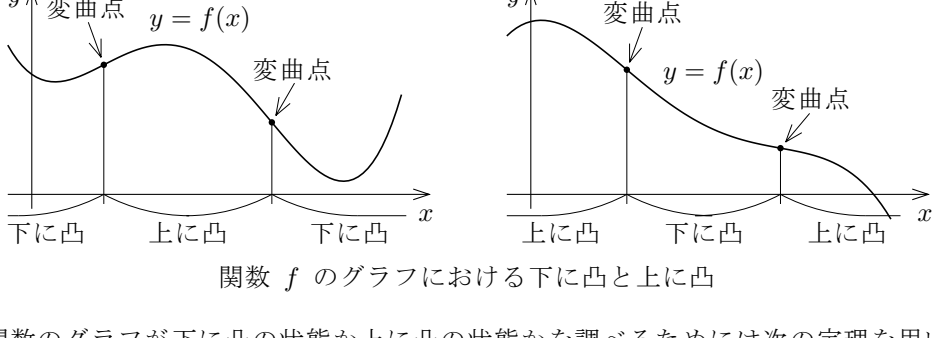
従って, 関数 f のグラフが区間 I において下に凸であることを次のように定義します: I の任意の点 a, b, c に対して,

$$a < b < c \text{ ならば } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

また, 関数 f のグラフが区間 I において上に凸であることを次のように定義します: I の任意の点 a, b, c に対して,

$$a < b < c \text{ ならば } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

関数のグラフにおいて, 下に凸の範囲と上に凸の範囲との境目となる点を変曲点といえます. つまり, 関数 f のグラフに属す点 P について, P を境にグラフが下に凸から上に凸に変わるとき, 及び, P を境にグラフが上に凸から下に凸に変わるとき, 点 P を f のグラフの変曲点といえます.



関数 f のグラフにおける下に凸と上に凸

関数のグラフが下に凸の状態か上に凸の状態かを調べるためには次の定理を用います (証明は後回しにします).

定理 5.8 区間 I で関数 f は2回微分可能であるとする. I に属す実数 p について, 点 $(p, f(p))$ が f のグラフの変曲点ならば $f''(p) = 0$. また,

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f''(x) \geq 0,$$

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが上に凸} \iff I \text{ において } f''(x) \leq 0.$$

例題 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める. 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる.

【解説】 まず g の第2次導関数 g'' を求める.

$$g'(x) = 3x^2 - 12x + 5,$$

$$g''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2).$$

$g''(x) = 0$ とすると, $6(x - 2) = 0$ なので $x = 2$.

$$x \leq 2 \text{ のとき } x - 2 \leq 0 \text{ なので } g''(x) = 6(x - 2) \leq 0,$$

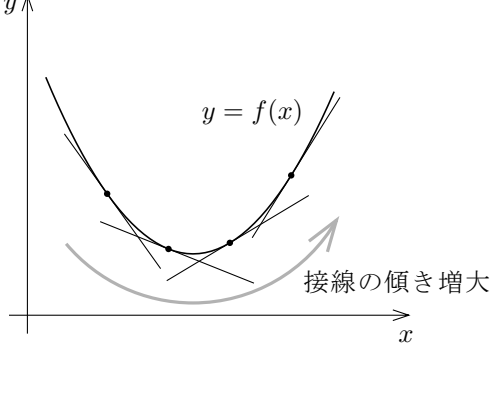
$$x \geq 2 \text{ のとき } x - 2 \geq 0 \text{ なので } g''(x) = 6(x - 2) \geq 0.$$

従って, 関数 g のグラフは, 区間 $(-\infty, 2]$ において上に凸で, 区間 $[2, \infty)$ において下に凸である. また, $g(2) = -6$ なので, g のグラフの変曲点は $(2, -6)$ だけである.

問題 5.8.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 9x^2 - 2x^3 - 3x$ と定めます. 関数 f のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べなさい.

問題 5.8.2 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = e^{2x}(x - 4)$ と定めます. 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べなさい.

定理 5.8 を説明します. 関数 f は微分可能とします. 右図を見ると分かるように, f のグラフが下に凸であるとは, x の値が増加すると f のグラフの点 $(x, f(x))$ における接線の傾きが増大することです. f のグラフの接線の傾きは微分係数 $f'(x)$ ですから, 次の定理が成り立ちます. その証明は後にします.



定理 区間 I において関数 f は微分可能であるとする.

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f' \text{ が広義の単調増加};$$

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが上に凸} \iff I \text{ において } f' \text{ が広義の単調減少}.$$

この定理より定理 5.8 が導かれます.

区間 I で関数 f は2回微分可能であるとします. 上述の定理より,

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f' \text{ が広義の単調増加}.$$

定理 5.3.2 より,

$$I \text{ において } f' \text{ が広義の単調増加} \iff I \text{ において } f''(x) \geq 0.$$

故に

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f''(x) \geq 0.$$

同様に,

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが上に凸} \iff I \text{ において } f''(x) \leq 0.$$

定理の証明

区間 I において関数 f は微分可能であるとします. 次のことを証明します:

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f' \text{ が広義の単調増加}.$$

I において f' が広義の単調増加であると仮定します. $a < b < c$ となる I の任意の3点 a, b, c をとりま. 平均値の定理より, $a < \xi_1 < b$, $b < \xi_2 < c$ となるある実数 ξ_1, ξ_2 を選ぶと,

$$f(b) - f(a) = f'(\xi_1)(b - a), \quad f(c) - f(b) = f'(\xi_2)(c - b),$$

つまり

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(\xi_2).$$

$a < \xi_1 < b < \xi_2 < c$ より, ξ_1, ξ_2 は区間 I の点で $\xi_1 < \xi_2$; 仮定より I において f' は広義の単調増加ですから, $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, 従って

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

つまり I において f のグラフは下に凸です.

逆に, 区間 I において関数 f のグラフが下に凸であると仮定します. I に属す実数 p と q について $p < q$ であるとする. $p < u < v < q$ となる変数 u, v をとりま. I において f のグラフは下に凸ですから, $p < u < v$ より

$$\frac{f(u) - f(p)}{u - p} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u},$$

$u < v < q$ より

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(q) - f(v)}{q - v} = \frac{f(v) - f(q)}{v - q};$$

従って

$$\frac{f(u) - f(p)}{u - p} \leq \frac{f(v) - f(q)}{v - q}.$$

ここで, $u \rightarrow p+0$, $v \rightarrow q-0$ のときの極限をとります. 関数 f は微分可能なので, 極限值 $\lim_{u \rightarrow p+0} \frac{f(u) - f(p)}{u - p} = f'(p)$ と $\lim_{v \rightarrow q-0} \frac{f(v) - f(q)}{v - q} = f'(q)$ とがあって,

$$\lim_{u \rightarrow p+0} \frac{f(u) - f(p)}{u - p} \leq \lim_{v \rightarrow q-0} \frac{f(v) - f(q)}{v - q};$$

故に $f'(p) \leq f'(q)$.

このように, I の任意の点 p, q について, $p < q$ ならば $f'(p) \leq f'(q)$ です. つまり I において関数 f' は広義の単調増加です.